GAOKAO SHUXUE DE LILUN YU SHIJIAN

高考数学的理论与实践

高慧明 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高考数学的理论与实践

高慧明 著

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书将高中数学教学理论、高考数学考试大纲、高考试题与高中数学教学实际相结合，内容科学、系统、前瞻、实用、易懂。主要作了如下详细论述：七大数学思想在高中数学教学中应用的理论与实践，近几年高考（包括大纲版、新课程版）数学命题特征的深层次思考与分析，近几年高考数学重点专题的深入研究（立足于对高中数学教材的基础知识在高考试题中的考查进行分析把握，以及对思想和方法的指导，引申概念外延的规律、方法，以及解题思考规律等）。

本书适合于高考数学命题与考试研究者、高中数学教师、高中学生及数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

高考数学的理论与实践/高慧明著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.6

ISBN 978-7-5603-2920-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．高…　Ⅲ．数学课-高中-升学参考资料

Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 104966 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　张永芹　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 23　字数 708 千字
版　　次　2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2920-8
定　　价　38.00 元

（如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换）

高慧明的三十而立

——《高考数学的理论与实践》代前言

高慧明老师属"70后集合"中的新秀，我从1995年4月开始注意到这位年轻人，那时他在湖北大学《中学数学》杂志上发表了《在数学教学中预防差生逆反心理浅谈》一文，文章切合实际，视角独特，很快被中国人民大学书报资料中心《中学数学教与学》全文转载。后来，我又接连在全国多家知名数学专业期刊上读到了高老师的一系列颇具影响的教科研成果，于是，我们就有了很多共同的话题进行交流。当时我就断定，这位年轻人如果按自己的教改之路坚持走下去，一定会大有作为！如今，15年弹指一挥间，高老师果然没有出乎我的预料，在教育教学、教研教改方面已经成为全国基础教育界的佼佼者之一。《高考数学的理论与实践》是高老师而立之年的重要著作之一，我作为第一读者有幸拜读了全部内容。该书思考深入，见解独特，文风朴实；内容科学系统，前瞻实用，通俗易懂；读者对象定位准确：高考数学命题与考试研究者，高中数学教师，高中学生，数学爱好者等。掩卷而思，我想就我个人的所见所闻所感谈谈高老师的事业发展之路，相信能给各位读者朋友留下更多的启示。

圣人云：为人三十而立，立则成三。

高慧明的"三立"，其根基正是从"立德"开始

从"为人师表"到"全国十佳"

高慧明老师每年教高中两个班的数学课，同时兼任着一个班的班主任。他常说"上好数学课，那只是一位优秀的数学老师。当好班主任，却能影响学生的一生"。

"先育人，再教书"是他的工作原则，"乐观、豁达、积极、向上"是他的治班理念。人格魅力和爱的力量是高老师做好班级工作的两个法宝。对学生尽心尽力，对工作不遗余力，不计较个人得失。他以实际行动践行着自己"为党和人民的教育事业奋斗终生"的诺言，每学期全校学生评教活动中，他均以全校最高票当选为"我最喜爱的老师"，班级管理师生满意度达到100%。高老师因班主任工作成绩显著，2005年12月，被评选为首届"全国十佳班主任"（《新华网》、《新华每日电讯》、《光明日报》、《中国教育报》、《新浪网》、《搜狐网》等新闻媒体都作

过专题报道）；2006年被全国知名期刊《班主任之友》推为第10期"封面人物"；2007年2月被全国德育主流媒体《德育报》等推选为"全国班主任之星"，并做整版专题报道；2007年4月受邀为中央电教馆制作了"全国优秀班主任培训讲座"专题系列影像资料（培训教材、VCD、DVD等），被选作唯一的封面人物向全国推介，全国公开发行，并被全国各地选作班主任培训主训教材，指定使用。

高慧明的"立业"，是他"立德"内涵的有形化

从"襄樊名师"到"全国讲学"

众所周知，学生升入高中后数学学习要过的第一关，就是学会抽象思维。如何让学生从习惯的形象思维中走出来，掌握逻辑性、推理性极强的高中数学，是摆在每一位高中数学老师面前的重任。高慧明老师在认真研究学生和教材的基础上，结合自己多年的教学实践，探索出了最切合学生实际的"阶段教学法"，把高中数学的教学内容，分解成若干个逻辑片段，通过层层深入引导，逐步加强训练，培养学生的学习能力。比如在"两条直线的夹角"的教学过程中，他通过形象生动的多媒体动画演示，引导学生在平面直角坐标系中，借助直线的方程，从探究学生熟悉的两条直线间的两种特殊位置关系（平行和垂直）入手，层层设问，形成新的问题，温故知新、循序渐进，激发学生的学习兴趣。

知之者不如好之者，好之者不如乐之者。只有真正的热爱，才能把想做的事做好；也只有真正的投入，才能把枯燥上升为享受。高老师把教书当做一件乐事来做，他不断探索最有效的教学方法，引导学生主动学习，把枯燥乏味的数学课堂变成学生爱学、乐学、会学的快乐之旅，让数字与快乐相伴飞翔。就这样，他成了一个教学实验田的有心人，从细节中推敲得失，从实践中总结经验，把每一个教学中的细节都认真考虑后，再从教材、学生学习心理、学习方法等角度全方位地综合设计教学思路，向数学教学的最佳情境努力。

上课前，让学生进行5分钟的"课前思维演练"，将相关内容设置成梯度思维问题，这是预备热身的脑力操；课堂上，因势利导，让学生变被动填灌为主动自学，后来由学生自行设置，从中优选组合。水到渠成，请"小老师"走上讲台，就某一知识点进行讲解；下课后，他常把自己学到的新观点教给学生，教学相长，与学生一同体会学习的乐趣。很多学生都说上高老师的课感觉很轻松，在不知不觉中就把知识弄懂学会了。2004年，高老师的这项课题研究系列成果《在暴露思维过程中培养探究能力》等被《数学教学通讯》和《天津教育》连续刊登，随即被中国人民大学书报资料中心《中学数学教与学》全文转载。

每一年，虽然高老师都要带两个班的数学课，但是每位学生都有高老师为他们专门建立的"学习档案"。他对每一个教过的学生都了如指掌，提起来一个个如数家珍。学生们常开玩笑地说"高老师比父母还了解我们呢"！这是戏语，更是实情。学生的学习档案中不仅记录学生的成绩，还有每个学生的学习情况跟踪分析与总结。多年来，高老师写的"学习档案"就有数百万字。

高老师以自己的实干精神和乐观心态赢得了领导、同行、学生、家长的敬重，由于在教学上的不懈努力、执著追求，在湖北省、全国高中数学教师优质课大赛中喜获一、二等奖。被评为"全国教育科研优秀教师"、"全国重点课题学科带头人"、"湖北省新世纪高层次人才工程"专家、"湖北省优秀教师"、首批"湖北省高中骨干教师"、首届"襄樊名师"、"襄樊市十大青年岗位能手标兵"、"襄樊市教育教学拔尖人才"等。

近几年，高老师受邀在湖北、湖南、北京、上海、天津、河北、河南、山东、山西、陕西、浙江、江苏、安徽、广东、福建、黑龙江、吉林、四川、甘肃、云南等全国20多个省、直辖市做有关课程·教材·教法·学法、高考复习·命题与考试、班级管理等学术专题报告各数场，在全国基础教育界引起了强烈反响。

高慧明的"立言"，是他的立德、立业在时空上的"突围"

从"痴迷课堂"到"严谨治学"

教科研工作在高慧明老师心中举足轻重，精益求精、严谨治学的态度贯穿于他教学与教科研工作的

始终。

他自创数学集体备课新模式"说→议→理→听→说→议"，收效显著，指导培养了一大批省、市优秀青年教师。他对本学科教材和教学深入研究，见解独到，成果丰富。在教法研究中，他自创的"在暴露思维过程中培养探究能力"（从抓住新旧知识之间的联系、注重问题的解决过程、改变问题的叙述方式、体验知识的实际应用等方面来激活思维品质）、"中学数学教研与教学的关系研究"（不断追求教学的高境界→教研为教学开辟广阔的空间→教研的基本途径……）、"学生思维临界状态下的教师点拨"（创设情境，顺向点拨，以求激活效应→讨论质疑，侧向点拨，以求共生效应）、"启发→建构"教学模式（诊断模糊观念→创设教学情境→整合认知结构）等多项改革成果，经国家、省、市教育行政部门、教研部门和学术研究机构有关专家鉴定，对大面积提高教育教学水平具有较高的指导意义和推广价值，并荣获国家、省一、二等奖。

笔耕不辍是高老师的最大特点，他的志向就是做一位学者型教师，既要"教"，又要"研"，还要"写"。在教学、教研中不断学习、不断创新，不断给自己提出更高的要求。他坚持以"学习创新——教学实践——积累素材——提炼成文"为目标，孜孜不倦，乐此不疲。高老师长期致力于课程·教材·教法·学法、高考复习·命题与考试、解题教学、竞赛数学、班级管理等专题研究。在课堂教学中，他向中学数学教学的最佳情境努力，力求让学生学得容易，学得有兴趣；在班级管理中，他是一位善于将班级工作艺术化的探索者。正因如此，参加工作二十一年来，他的教育教学效果显著，教研教改成果丰硕，班级管理成绩突出。已在《数学通报》、《数学教学》、《中国教育学刊》、《中学数学教学参考》、《数学通讯》、《中学数学》、《中学数学月刊》、《中国数学教育》、《中学数学研究》、《中学数学杂志》、《中学数学教学》、《数学教学通讯》、《数学教学研究》、《中学教研》、《教育艺术》、《班主任之友》、《班主任》、《中小学管理》、《教学与研究》等国家、省级学术专业期刊发表论文500余篇，其中90余篇被中国人民大学书报资料中心《中学数学教与学》、《中小学教育》全文转载或作为索引，先后多次受邀为《数学通讯》、《中学数学》、《中学数学教学参考》、《中国数学教育》、《数学教学通讯》、《中学数学杂志》、《数学学习与研究》、《试题与研究》、《中学生数理化》、《高考》、《高考金刊》、《求学》、《理科考试研究》、《中学生语数外》、《招生考试通讯》、《高中生》、《新高考》、《数学大世界》、《湖北教育》、《班主任之友》等多家省级以上杂志社撰写辅教导学、高考复习·命题与考试、班级管理艺术等专题系列讲座连载稿，参与编写教材、教学著作多部，参与研制和编写了《湖北省普通高中新课程实验数学学科教学指导意见》。主持、参与多项国家、省部级课题研究，获国家、省部级优秀教科研成果一等奖18项。

目前，高老师是《中国数学教育》、《中学数学研究》、《中学数学教学参考》等全国多家知名专业期刊特约专栏作者、特邀栏目主持、特约编辑。

万尔遐

2009年1月1日于北京

万尔遐：著名数学特级教师，享受国务院政府特殊津贴的数学教育专家，全国著名高考命题专家。

目录

第一编　数学思想

（一）函数方程思想　//4

（二）数形结合思想　//12

（三）分类与整合思想　//22

（四）化归与转化思想　//32

（五）特殊与一般思想　//41

（六）有限与无限思想　//46

（七）或然与必然思想　//51

第二编　命题研究

（一）2006年全国高考数学试题"亮点"品评　//57

（二）2007年全国高考数学试题"亮点"品评　//71

（三）2008年全国高考数学试题"亮点"品评　//101

（四）2007年全国高考数学新课程卷综合分析　//119

（五）2008年全国高考数学大纲版试题全分析　//129

（六）2008年全国高考数学新课程卷对比分析　//137

（七）近几年全国高考数学热点题型完全检索　//148

（八）全国高考数学基础知识考前130问——大纲版，适合高考前一个月学生使用　//151

第二编　专题研究

(一)函数解析式的求法探究　//159

(二)$y=f(a+x)$与$y=f(x)$　//168

(三)新高考抽象函数分类概说　//172

(四)全国高考函数在考查什么　//176

(五)数列通项公式的求法综析　//188

(六)新高考平面向量试题分析　//196

(七)不等式求解中分类讨论的思维策略　//217

(八)看清不等式"蒙人"的六大招数　//219

(九)数列、不等式、极限专题复习　//225

(十)数阵为什么能成为高考中的"新宠"　//243

(十一)一道高考抛物线题的深层探究　//253

(十二)新高考圆锥曲线命题特点分析　//259

(十三)一道高考双曲线题的个性思考　//267

(十四)在变式探究中学习圆锥曲线方程　//270

(十五)如何求解高考中的轨迹方程问题　//275

(十六)"传统解法"与"向量解法"比较研究　//279

(十七)"直线、平面和简单几何体"专题复习　//285

(十八)一道课本立体几何题的模型探究　//296

(十九)一道高考立体几何题的深层探究　//300

(二十)破解高中几何中的最值问题　//304

(二十一)奥运中的排列组合与概率统计　//313

(二十二)高考二项式定理问题分类解析　//319

(二十三)学习"导数"我们该关注什么　//323

(二十四)高考数学应用题完全解读　//330

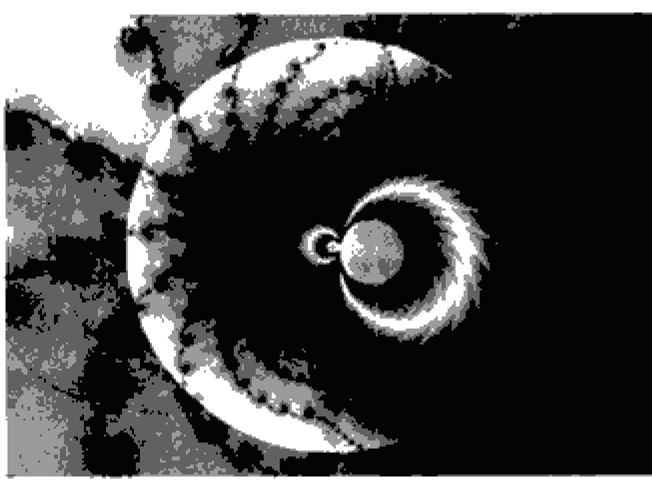
(二十五)全国高考数学压轴题分类导析——以"数列"为主体　//337

(二十六)全国高考数学压轴题分类导析——以"函数、不等式"为主体　//343

(二十七)全国高考数学压轴题分类导析——以"直线及圆锥曲线"为主体　//350

第一编

数学思想



●数学思想是数学的灵魂，数学方法是数学的行为．运用数学方法解决问题的过程就是感性认识不断积累的过程，当这种量的积累达到一定程度时就产生了质的飞跃，从而上升为数学思想．若把数学知识看作是一幅构思巧妙的蓝图而建筑起来的一座宏伟大厦，那么数学方法相当于建筑施工的手段，而这张蓝图就相当于数学思想．教会学生正确运用数学思想方法学习数学或解题，有利于对知识进行比较归类，只有这样，才能把所学知识学得系统，学得灵活，并真正纳入到学生的知识结构中去，变成自己的财富．

●高考对数学思想的考查是与对数学知识的考查结合进行的，是通过对数学知识的考查来反映考生对数学思想、方法理解和掌握程度的．

●教育部考试中心在全国高考数学考试大纲中明确指出必考的数学思想：

函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想，或然与必然的思想．

数学思想是人们对现实世界空间形式和数量关系的本质的认识，是思维加工后的产物，它隐藏在数学概念、法则、公式、公理、定理、方法等知识的背后，反映了这些知识的共同本质.它比一般的数学概念和数学方法具有更高的概括性和抽象性，因而更深刻、更本质.数学思想是数学知识的核心，是数学的精髓和灵魂.简言之，数学思想是对数学概念、方法和理论的本质认识.

数学方法，顾名思义，就是人们从事数学活动时所使用的方法.

人们往往将数学思想和数学方法合为一谈，称之为数学思想方法，可见两者之间有密切的联系，但还是有区别.要想将数学思想与数学方法严格区分开来是困难的，因此，人们常常对这两者不加区分，而统称为数学思想方法，这样研究问题更为方便.

中学数学教材中的思想方法有：抽象概括、化归、数形结合、数学模型、归纳猜想、分类、类比、特殊化、演绎、完全归纳法、反证法、换元法、待定系数法、配方法.从中可以看出，中学数学中确实蕴含了丰富的数学思想方法内容，不但方法的种类多，而且某些方法反复出现并应用，这说明在数学教学中加强数学思想方法教学不但具有重要意义，而且现实可行，是一个颇具开发价值的研究课题.

数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括，它蕴涵在数学知识发生、发展和应用的过程中.曾有一位数学教育家说过这样一段话："学生们在初中或高中所学到的数学知识，在进入社会后，几乎没有什么机会应用，因而这种作为知识的数学，通常在出校门后不到一两年就忘掉了.然而不管他们从事什么职业，那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法，却长期地在他们的生活和工作中发挥着作用."理论研究和人才成长的轨迹都表明——数学思想方法在人的能力培养和素质提高方面具有重要作用，因此，对数学思想方法的考查也是高考数学能力考查的必然.

高考数学试题重在考查对知识理解的准确性、深刻性，重在考查知识的综合灵活运用.它着眼于知识点新颖巧妙的组合，试题新而不偏，活而不过难；着眼于对数学思想方法、数学能力的考查.高考试题这种积极导向，决定了我们在教学中必须以数学思想指导知识、方法的运用，整体把握各部分知识的内在联系.只有加强数学思想方法的教学、优化学生的思维、全面提高数学能力，才能提高学生解题水平和应试能力.

高考复习有别于新知识的教学.它是在学生基本掌握了中学数学知识体系、具备了一定的解题经验的基础上进行复习课教学，也是在学生基本认识各种数学基本方法、思维方法及数学思想的基础上进行复习课教学.其目的在于深化学生对基础知识的理解；完善学生的知识结构，在综合性强的练习中进一步形成基本技能，优化思维品质；使学生在多次的练习中充分运用数学思想方法，提高数学能力.高考复习是学生发展数学思想，熟练掌握数学方法理想的难得的教学过程.

教育部考试中心在全国高考数学考试大纲中明确指出必考的数学思想方法：

数学基本方法包括待定系数法、换元法、配方法、割补法、反证法等；

数学逻辑方法(或思维方法)包括分析与综合、归纳与演绎、比较与类比、具体与抽象等；

数学思想包括函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想、或然与必然的思想等.

在这里，笔者重点谈谈数学思想在解题中应用的具体体现，共分以下七个专题：(一)函数方程思想；(二)数形结合思想；(三)分类整合思想；(四)化归转化思想；(五)特殊与一般思想；(六)有限与无限思想；(七)或然与必然思想.

(一)函数方程思想

函数是高中代数内容的主干,它主要包括函数的概念、图象和性质,重点介绍了几类典型的函数.函数的思想是对函数内容在更高层次上的抽象、概括与提炼,是从函数各部分内容的内在联系和整体角度来考虑问题、研究问题和解决问题.具体来说,就是用运动和变化的观点,集合与对应的思想,即用函数的观点去分析和研究数学问题中的数量关系,建立函数关系或构造函数,运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题,从而使问题获得解决,是对函数概念的本质认识.函数思想贯穿于高中代数的全部内容,它是在学习指数函数、对数函数以及三角函数的过程中逐渐形成,并为研究这些函数服务的.在研究方程、不等式、复数、数列、解析几何等其他内容时,函数思想也起着十分重要的作用.

方程是初中代数的主要内容.初中阶段主要学习了几类方程和方程组的解法,但在初中阶段很难形成方程的思想.所谓方程的思想,就是分析研究数学问题中变量间的关系,通过设未知数、列方程(不等式)或方程(不等式)组,解方程(不等式)或方程(不等式)组等步骤,达到求值目的之解题思路和策略,它是解决各类计算问题的基本思想,是运算能力的基础.或者运用方程的性质去分析、转化问题,使问题获得解决,是对方程概念的本质认识.

函数思想与方程思想是密切相关的.函数与方程、不等式是通过函数值等于零、大于零或小于零而相互关联的,它们之间既有区别又有联系.函数与方程的思想,既是函数思想与方程思想的体现,也是两种思想综合运用的体现,是研究变量与函数、相等与不等过程中的基本数学思想.

对于函数 $y = f(x)$,当 $y = 0$ 时,就转化为方程 $f(x) = 0$,也可以把函数式 $y = f(x)$ 看作二元方程 $y - f(x) = 0$.函数问题(例如求函数的反函数,求函数的值域等)可以转化为方程问题来解决,方程问题也可以转化为函数问题加以解决,如解方程 $f(x) = 0$,就是求函数 $y = f(x)$ 的零点.

函数与不等式也可以相互转化,对于函数 $y = f(x)$,当 $y > 0$ 就化为不等式 $f(x) > 0$,借助于函数的图象与性质可解决相关问题,而研究函数的性质,也离不开解不等式.

除此之外,还有:

(1) 数列的通项或前 n 项和是自变量为正整数的函数,用函数的观点处理数列问题十分重要,其次方程思想也是研究此类问题(求待定系数等)的重要思想方法之一.

(2) 函数 $f(x) = (ax + b)^n(n \in \mathbf{N}^*)$ 与二项式定理是密切相关的,利用这个函数并用赋值法和比较系数法可以解决很多二项式定理的问题.

(3) 解析几何中的许多问题,例如直线和二次曲线的位置关系问题,需要通过解二元

方程组才能解决，涉及二次方程与二次函数的有关理论.

(4) 立体几何中有关线段、角、面积、体积的计算，经常需要运用列方程或建立函数表达式的方法加以解决.

……

函数与方程思想在解题中的应用，一是借助有关初等函数的性质，解决有关求值、解(证)不等式，解方程以及讨论参数的取值范围等问题；二是在问题的研究中，通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质，达到化难为易，化繁为简的目的.

函数与方程的思想是中学数学的基本思想，也是历年高考的重点. 常使用选择题和填空题考查函数与方程思想的基本运用，而在解答题中，则从更深的层次，在知识网络的交汇处，从思想方法与相关能力的关系角度进行综合考查.

在近几年的高考中，函数思想主要用于求变量的取值范围、解不等式等；方程思想的应用可分为逐渐提高的四个层次：

(1) 解方程或不等式；(2) 含参数的方程或不等式的讨论；(3) 转化为对方程的研究，如曲线的位置关系、函数的性质、集合的关系；(4) 构造方程或不等式求解.

【例1】 如图1，已知二次函数 $y=f_1(x)$ 的图象以原点为顶点且过点(1,1)，反比例函数 $y=f_2(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 的两个交点间距离为8，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的表达式；

(Ⅱ) 证明：当 $a>3$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=f(a)$ 有三个实数解.

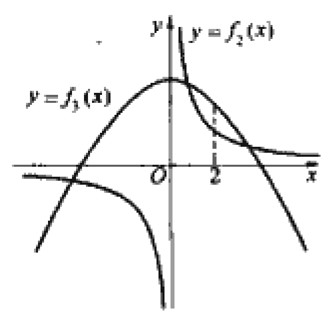


图1

解析 (Ⅰ) 由已知，设 $f_1(x)=ax^2$，由 $f_1(1)=1$，得 $a=1$，所以 $f_1(x)=x^2$.

设 $f_2(x)=\dfrac{k}{x}(k>0)$，它的图象与直线 $y=x$ 的交点分别为 $A(\sqrt{k},\sqrt{k})$，$B(-\sqrt{k},-\sqrt{k})$.

由 $|AB|=8$，得 $k=8$，所以 $f_2(x)=\dfrac{8}{x}$. 故 $f(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$.

(Ⅱ) **证法1** $f(x)=f(a)$，得 $x^2+\dfrac{8}{x}=a^2+\dfrac{8}{a}$，即 $\dfrac{8}{x}=-x^2+a^2+\dfrac{8}{a}$. 在同一坐标系内作出 $f_2(x)=\dfrac{8}{x}$ 和 $f_3(x)=-x^2+a^2+\dfrac{8}{a}$ 的大致图象，其中 $f_2(x)$ 的图象是以坐标轴为渐近线，且位于第一、三象限的双曲线，$f_3(x)$ 的图象是以 $\left(0,a^2+\dfrac{8}{a}\right)$ 为顶点，开口向下的抛物线. 因此，$f_2(x)$ 与 $f_3(x)$ 的图象在第三象限有一个交点，即 $f(x)=f(a)$ 有一个负数解. 又因为 $f_2(2)=4$，$f_3(2)=-4+a^2+\dfrac{8}{a}$，当 $a>3$ 时，$f_3(2)-f_2(2)=a^2+\dfrac{8}{a}-8>0$，所以当 $a>3$ 时，在第一象限 $f_3(x)$ 的图象上存在一点 $(2,f_3(2))$ 在 $f_2(x)$ 图象的上方，所以 $f_2(x)$ 与 $f_3(x)$ 的图象在第一象限有两个交点，即 $f(x)=f(a)$ 有两个正数解. 因此，方程 $f(x)=f(a)$ 有三个实数解.

证法2 由 $f(x)=f(a)$，得 $x^2+\dfrac{8}{x}=a^2+\dfrac{8}{a}$，即 $(x-a)\left(x+a-\dfrac{8}{ax}\right)=0$，得方程的一个解

$x_1=a$. 方程 $x+a-\frac{8}{ax}=0$ 化为 $ax^2+a^2x-8=0$, 由 $a>3,\Delta=a^4+32a>0$, 得 $x_2=\frac{-a^2-\sqrt{a^4+32a}}{2a}$, $x_3=\frac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$. 因为 $x_2<0,x_3>0$, 所以 $x_1\neq x_2$, 且 $x_2\neq x_3$. 若 $x_1=x_3$, 即 $a=\frac{-a^2+\sqrt{a^4+32a}}{2a}$, 则 $3a^2=\sqrt{a^4+32a}$, $a^4=4a$, 得 $a=0$ 或 $a=\sqrt[3]{4}$, 这与 $a>3$ 矛盾, 所以 $x_1\neq x_3$. 故原方程有三个实数解.

点评 第(Ⅱ)问把方程根的个数的判断, 通过式子变形, 转变为两个函数交点个数的判断, 充分体现了方程与函数之间的灵活转换.

【例2】 给定抛物线 $C:y^2=4x$, F 是 C 的焦点, 过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.

(Ⅰ) 设 l 的斜率为 1, 求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角的大小;

(Ⅱ) 设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$, 若 $\lambda\in[4,9]$, 求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

解析 (Ⅰ) C 的焦点为 $F(1,0)$, 直线 l 的斜率为 1, 所以 l 的方程为 $y=x-1$. 将 $y=x-1$ 代入方程 $y^2=4x$, 整理得 $x^2-6x+1=0$. 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则有 $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=1$.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2-(x_1+x_2)+1=-3$$

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_1x_2[x_1x_2+4(x_1+x_2)+16]}=\sqrt{41}$$

$$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=-\frac{3\sqrt{14}}{41}$$

所以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小为 $\pi-\arccos\frac{3\sqrt{14}}{41}$.

(Ⅱ) 由题设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$ 得 $(x_2-1,y_2)=\lambda(1-x_1,-y_1)$, 即

$$\begin{cases}x_2-1=\lambda(1-x_1) & ①\\ y_2=-\lambda y_1 & ②\end{cases}$$

由②得 $y_2^2=\lambda^2y_1^2$, 因为 $y_1^2=4x_1$, $y_2^2=4x_2$, 所以

$$x_2=\lambda^2x_1 \quad ③$$

联立①、③解得 $x_2=\lambda$, 依题意有 $\lambda>0$, 所以 $B(\lambda,2\sqrt{\lambda})$ 或 $B(\lambda,-2\sqrt{\lambda})$. 又 $F(1,0)$, 得直线 l 方程为 $(\lambda-1)y=2\sqrt{\lambda}(x-1)$ 或 $(\lambda-1)y=-2\sqrt{\lambda}(x-1)$. 当 $\lambda\in[4,9]$ 时, l 在方程 y 轴上的截距为 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ 或 $-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$, 由 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}=\frac{2}{\sqrt{\lambda}+1}+\frac{2}{\lambda-1}$, 可知 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ 在 $[4,9]$ 上是递减的, 所以 $\frac{3}{4}\leqslant\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\leqslant\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3}\leqslant-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\leqslant-\frac{3}{4}$, 故直线 l 在 y 轴上截距的变化范围为 $\left[-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right]$.

点评 本小题主要考查抛物线的性质, 直线与抛物线的关系以及解析几何的基本方法、思想和综合解题能力. 当 $\lambda\in[4,9]$ 时, 求出直线 l 在 y 轴上截距 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ 或 $-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ 之后, 如何由 λ 的取值范围求上式的取值范围, 显然需构造函数, 利用函数的单调性来求函数中参数的取值范围.

【例3】 已知 $\frac{\sqrt{5}b-c}{5a}=1(a、b、c\in\mathbf{R})$, 则有(　　)

A. $b^2>4ac$　　B. $b^2\geqslant4ac$　　C. $b^2<4ac$　　D. $b^2\leqslant4ac$

解法1 由已知得 $a\cdot5-b\cdot\sqrt{5}+c=0$, 所以 $\sqrt{5}$ 是实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个实根; 所以 $\Delta=b^2-4ac\geqslant0$, 所以 $b^2\geqslant4ac$, 故选 B.

解法2 去分母、移项, 两边平方得: $5b^2=25a^2+10ac+c^2\geqslant10ac+2\cdot5a\cdot c=20ac$, 所以 $b^2\geqslant4ac$, 故选 B.

点评　解法1通过简单转化，注意到了数与式的特点，运用方程的思想使问题得以解决；解法2转化为 b^2 是 a、c 的函数，运用重要不等式求解，思路清晰.

【例4】　是否存在锐角 α、β，使

$$\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3} \quad ①$$

$$\tan\beta = (2-\sqrt{3})\cot\frac{\alpha}{2} \quad ②$$

同时成立？若存在，求出 α 和 β 的值；若不存在，请说明理由.

解析　本题是一个探索性问题，假设 α 和 β 存在，根据题意求出 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 的值，再根据角的范围求角. 假设存在锐角 α、β，则由式①得 $\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\pi}{3}$，所以

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\beta}=\sqrt{3} \quad ③$$

又由式②得

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=2-\sqrt{3} \quad ④$$

将式④代入③得 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta=3-\sqrt{3}$，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2-(3-\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})=0$ 的两个根，解得 $x_1=1$，$x_2=2-\sqrt{3}$. 又 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}\neq 1$，所以

$$\tan\frac{\alpha}{2}=2-\sqrt{3},\quad \tan\beta=1$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

因此 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，所以存在 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$ 使①、②同时成立.

点评　解答探索性问题，一般先对结论作肯定存在的假设，由此出发推理论证，再由推理论证的结果是否出现矛盾来作判断. 构造方程并借用方程理论解题是本题的创意之处.

【例5】　如图2，在矩形 $ABCD$ 中，已知 $AB=1$，$BC=a(a>0)$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=1$. 问 BC 边上是否存在点 Q，使得 $PQ\perp QD$，并说明理由.

解析　本题是一道立体几何的探索开放题，需要探索满足题设条件的点 Q 是否存在，若存在，这样的 Q 点有几个？此题从几何角度去探寻，则要求学生对平面几何中有关圆的性质相当熟悉，且需记住许多结论方可顺利求解；若从代数角度去考虑，通过引入线段参数，构造一元二次方程，利用其判别式就可以使问题得到迅速解决.

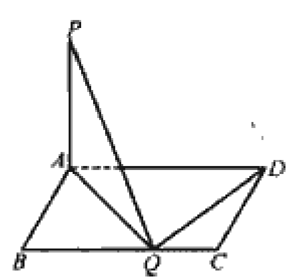


图2

假设 BC 边上存在点 Q，使得 $PQ\perp QD$，联结 AQ，因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，根据三垂线定理的逆定理有 $QD\perp AQ$. 从而有 $AD^2=AQ^2+QD^2$. 设 $CQ=x$，则 $BQ=a-x$，于是

$$AQ=\sqrt{1^2+(a-x)^2},\quad QD=\sqrt{1+x^2}$$

所以

$$AD^2=(a-x)^2+x^2+2=2x^2-2ax+a^2+2=a^2$$

即

$$x^2-ax+1=0 \quad ①$$

其判别式 $\Delta = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$，所以当 $a > 2$ 即 $\Delta > 0$ 时，方程①有两解，即 BC 边上存在两个点 Q，使得 $PQ \perp QD$；当 $a = 2$ 即 $\Delta = 0$ 时，方程①有一解，即 BC 边上存在唯一的点 Q（即 BC 的中点），使得 $PQ \perp QD$；当 $0 < a < 2$ 即 $\Delta < 0$ 时，方程①无解，即 BC 边上不存在点 Q，使得 $PQ \perp QD$.

当然该题也可用直线与圆的位置关系求解或空间向量法求解.

【例 6】 已知 $a > 0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a$，$a_{n+1} = a + \dfrac{1}{a_n}$，$n = 1,2,\cdots$.

（Ⅰ）已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$（将 A 用 a 表示）；

（Ⅱ）设 $b_n = a_n - A$，$n = 1,2,\cdots$. 证明：$b_{n+1} = -\dfrac{b_n}{A(b_n + A)}$；

（Ⅲ）若 $|b_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ 对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立，求 a 的取值范围.

解析　本小题主要考查数列、数列极限的概念和数学归纳法，考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力.

（Ⅰ）由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，且 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n (A > 0)$，对 $a_{n+1} = a + \dfrac{1}{a_n}$ 两边取极限得 $A = a + \dfrac{1}{A}$，解得 $A = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$. 又 $A > 0$，所以 $A = \dfrac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$.

（Ⅱ）由 $a_n = b_n + A$，$a_{n+1} = a + \dfrac{1}{a_n}$ 得 $b_{n+1} + A = a + \dfrac{1}{b_n + A}$，所以

$$b_{n+1} = a - A + \frac{1}{b_n + A} = -\frac{1}{A} + \frac{1}{b_n + A} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$$

即 $b_{n+1} = -\dfrac{b_n}{A(b_n + A)}$ 对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立.

（Ⅲ）**解法 1**　（利用数学归纳法）令 $|b_1| \leqslant \dfrac{1}{2}$，得 $\left|a - \dfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+4})\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$，所以 $\left|\dfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+4} - a)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$. 所以 $\sqrt{a^2+4} - a \leqslant 1$，解得 $a \geqslant \dfrac{3}{2}$. 只须证明当 $a \geqslant \dfrac{3}{2}$ 时，$|b_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$，对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立.

解法 2　由（Ⅰ）求得 $A = \dfrac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$，所以 $-\dfrac{1}{A} = \dfrac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$. 所以

$$a - A = -\frac{1}{A},\ a + \frac{1}{A} = A,\ A^2 = \frac{a^2 + 2 + a\sqrt{a^2+4}}{2},\ A + \frac{1}{A} = \sqrt{a^2+4}$$

所以

$$a_{n+1} - A = a + \frac{1}{a_n} - A = \frac{a_n - A}{-Aa_n},\ a_{n+1} + \frac{1}{A} = a + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{A} = \frac{Aa_n + 1}{a_n}$$

因此

$$\frac{a_{n+1} - A}{a_{n+1} + \frac{1}{A}} = \frac{-\frac{1}{A}a_n + 1}{Aa_n + 1} = -\frac{1}{A^2} \cdot \frac{a_n - A}{a_n + \frac{1}{A}}$$

所以 $\left\{\dfrac{a_n - A}{a_n + \frac{1}{A}}\right\}$ 是以 $\dfrac{a_1 - A}{a_1 + \frac{1}{A}} = -\dfrac{1}{A^2}$ 为首项，$-\dfrac{1}{A^2}$ 为公比的等比数列，故 $\dfrac{a_n - A}{a_n + \frac{1}{A}} = \left(-\dfrac{1}{A^2}\right)^n$. 再将 $a_n = b_n + A$ 代入上式，得 $b_n = \dfrac{\sqrt{a^2+4}}{(-A^2)^n - 1}$.

因为 $|b_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立，所以 $|b_1| = |a - A| \leqslant \dfrac{1}{2}$，即 $\left|\dfrac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$，得 $a \geqslant \dfrac{3}{2}$.

从而
$$A^2 \geqslant \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2} = 4$$
即 $A \geqslant 2$.所以
$$|b_n| = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a^2+4}}{A^{2n}+1}, & n\text{ 为奇数} \\ \dfrac{\sqrt{a^2+4}}{A^{2n}-1}, & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

当 n 为奇数时，$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 可变为 $\left(\frac{A^2}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant \sqrt{a^2+4}$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立，设
$$C_n = \left(\frac{A^2}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
则
$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\left(\frac{A^2}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{A^2}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{A^{2n+2}+1}{2A^{2n}+2} \geqslant \frac{4A^{2n}+1}{2A^{2n}+2} > \frac{2A^{2n}+2}{2A^{2n}+2} = 1$$

所以 $C_{n+1} > C_n$，所以 $\{C_n\}$ 为递增数列.当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时，$C_1 \geqslant \sqrt{a^2+4}$ 已成立，故 n 为奇数时已满足 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

当 n 为偶数时，$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 恒成立，化为 $f(n) = \left(\frac{A^2}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant \sqrt{a^2+4}$ 恒成立.

因为 $\frac{A^2}{2} > 2$，所以 $f(n) = \left(\frac{A^2}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 为递增数列，故只须 $f(2) \geqslant \sqrt{a^2+4}$，而
$$f(2) = \left(\frac{A^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{A^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{A^2}{2} + \frac{1}{2}\right) > \frac{A^2}{2} + \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{a^2+4}$$
也成立.

故 n 为偶数时已满足 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.综上，当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时，有 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 恒成立.

点评 这道题内容涉及递推数列、数列极限(极限存在求极限化归为解方程)、数列恒等式的证明、不等式的证明(归纳法、放缩法)."三问"各有侧重，特别是第三问，其目的是考查我们灵活运用数学知识去分析问题、解决问题的能力.其中前两问主要考查基本概念及运算技能，第一问即考查数列极限的定义，只须抓住 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$，再结合解方程(方程思想)便迎刃而解.但有些同学对这些概念问题不是很重视，按思维定式试图由递推关系推导出通项公式，能力强的同学可能用此法勉强解决，但运算量大，得不偿失；第二问实际上是基本的数学式的变形，是这三问中最简单的一问，在第一问未解决的情况下，也应能完成，可实施"跳步解答"，本问的分数应该分段智取；第三问实质是用数学归纳法证明不等式，但入口较难，首先要用到第一问得出的 A 值，还要联想第二问递推关系式，从而选择使用数学归纳法，形式新颖，对考生思维层次要求极高！同时此问的解法 2 渗透了函数思想.该题的设计同时顺应了新高考《数学考试大纲》中提出的个性品质要求："以实事求是的科学态度解答试题，树立战胜困难的信心，体现锲而不舍的精神."试想当同学们不能顺利解出第一问时，还会心平气和地做好第二问吗?这里正是考查我们是否具有良好个性品质之匠心所在！

【例 7】 在 $\triangle ABC$ 内求一点 P，使 $\overrightarrow{AP}^2 + \overrightarrow{BP}^2 + \overrightarrow{CP}^2$ 取得最小值，则该点是 $\triangle ABC$ 的(　　)

A.垂心　　B.内心　　C.重心　　D.外心

解析 如图 3，设 $\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CP} = \boldsymbol{x}$，则 $\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BP} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$，所以
$$\overrightarrow{AP}^2 + \overrightarrow{BP}^2 + \overrightarrow{CP}^2 = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2 + \boldsymbol{x}^2 = 3\boldsymbol{x}^2 - 2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 =$$
$$3\left[\boldsymbol{x} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right]^2 + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$$

所以当 $x=\frac{1}{3}(a+b)$ 时，$\overrightarrow{AP}^2+\overrightarrow{BP}^2+\overrightarrow{CP}^2$ 有最小值. 记 D 为 AB 的中点，易知 $a+b=2\overrightarrow{CD}$，于是 $\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. 因此，$C$、$P$、$D$ 三点共线，点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心. 故选 C.

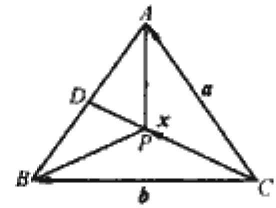


图 3

点评　解答本题之关键是建立一个以向量为变量的二次函数，因此，在解题中应消除只能以实数为变量的思维定式，只须一个量是变化的，不管量的性质如何，均可作为变量，进而建立以这个量为变量的函数.

【例 8】　某企业去年的纯利润为 500 万元，因设备老化等原因，企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造，预测从今年起每年比上一年纯利润减少 20 万元，今年初该企业一次性投入资金 600 万元进行技术改造，预测在未扣除技术改造资金的情况下，第 n 年（今年为第一年）的利润为 $500(1+\frac{1}{2^n})$ 万元（n 为正整数）.

（Ⅰ）设从今年起的前 n 年，若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元，进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元（须扣除技术改造资金），求 A_n、B_n 的表达式；

（Ⅱ）依上述预测，从今年起该企业至少经过多少年，进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润？

解析　本小题主要考查建立函数关系式、数列求和、不等式等基础知识，考查运用数学知识解决实际问题的能力.

（Ⅰ）依题设

$$A_n=(500-20)+(500-40)+\cdots+(500-20n)=490n-10n^2$$

$$B_n=500\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right]-600=500n-\frac{500}{2^n}-100$$

（Ⅱ）

$$B_n-A_n=\left(500n-\frac{500}{2^n}-100\right)-(490n-10n^2)=10n^2+10n-\frac{500}{2^n}-100=$$

$$10\left[n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\right]$$

因为函数 $y=x(x+1)-\frac{50}{2^x}-10$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，当 $1\leqslant n\leqslant 3$ 时，$n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\leqslant 12-\frac{50}{8}-10<0$；当 $n\geqslant 4$ 时，$n(n+1)-\frac{50}{2^n}-10\geqslant 20-\frac{50}{16}-10>0$. 所以仅当 $n\geqslant 4$ 时，$B_n>A_n$.

答：至少经过 4 年，该企业进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润.

点评　解答数列应用性问题时，要善于抓住数列的第 n 项与第 $n-1$ 项的内在联系进行综合分析，并在寻找递推关系时，要明晰是解决第 n 项问题还是解决前 n 项和问题，同时还要特别注意函数思想在处理此类问题中所发挥的作用.

[redacted]

设函数 $f(x)=(x+1)\ln(x+1)$，若对所有的 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\geqslant ax$ 成立，求实数 a 的取值范围.

解法 1　（构造函数）令 $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-ax$，对函数 $g(x)$ 求导数得 $g'(x)=\ln(x+1)+1-a$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=e^{a-1}-1$.

（Ⅰ）当 $a\leqslant 1$ 时，对所有 $x>0$，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数. 又 $g(0)=0$，所以对 $x\geqslant 0$，都有 $g(x)\geqslant g(0)$，即当 $a\leqslant 1$ 时，对于所有 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\geqslant ax$.

（Ⅱ）当 $a>1$ 时，对于 $0<x<e^{a-1}-1$，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,e^{a-1}-1)$ 是减函数，又 $g(0)=0$，所以对 $0<x<e^{a-1}-1$，都有 $g(x)<g(0)$，即当 $a>1$ 时，不是对所有的 $x\geqslant 0$，都有 $f(x)\geqslant ax$ 成

立.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

解法 2(构造函数) $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-ax$，于是不等式 $f(x)\geqslant ax$ 成立即为 $g(x)\geqslant g(0)$ 成立. 对函数 $g(x)$ 求导数得 $g'(x)=\ln(x+1)+1-a$. 令 $g'(x)=0$，解得 $x=e^{a-1}-1$. 当 $x>e^{a-1}-1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，当 $-1<x<e^{a-1}-1$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，所以要对所有 $x\geqslant0$ 都有 $g(x)\geqslant g(0)$ 充要条件为 $e^{a-1}-1\leqslant0$.

由此得 $a\leqslant1$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

点评 本题仍属不等式恒成立问题，主要考查复合函数的导数、对数函数的导数以及利用导数研究函数的单调性，确定参数的取值范围等问题. 解答中对不等式 $f(x)\geqslant ax\Leftrightarrow g(x)\geqslant g(0)$ 成立，这里要对参数分类讨论，通过构造函数利用导数求最值，得出不等关系，借助讨论得出所含参数的取值范围.

[redacted]

处理函数与方程思想类问题，应注意以下几点：

(1) 深刻理解一般函数的图象和性质，熟练掌握一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、三角函数等函数的具体特征，是应用函数思想的基础.

(2) 在解答非函数问题时，要注意对问题中各元素仔细地观察和分析，产生由此及彼的思想，构造出相关的函数模型，从而使问题获得巧妙地解决.

(3) 在许多数学问题中，一般都含有多元参变量，根据题目需要，变换“主元”的方法往往能出奇制胜，但不要脱离题目本身的条件.

(4) 要注意函数方程思想与其他几种思想相互融合使用，才能显示出其强大威力，不要脱离其他思想单独“钻题”，浪费时间.

函数思想，不仅仅只是利用函数的方法技巧来研究和解决有关函数自身的问题，更重要的是要运用函数的观念去分析问题、解决问题，它的精髓就是通过建立函数关系或构建函数，再利用函数的图象和性质去分析问题、转化问题，从而使问题获解. 实际应用时，主要体现在：构造函数，运用函数性质；选定主元，揭示函数关系；选取辅助变元，确定函数关系；利用二项式定理构造函数；用函数的思想解答数列、解析几何、立体几何等问题；建立函数关系解答应用问题.

方程思想，说白了就是若变量之间的关系是通过解析式表示的，则可以把解析式看成一个等式，然后运用方程的理论就可使问题得到解决. 主要体现在：直接解方程、分析方程的解，通过换元构成新方程，直接构造方程求解.

由此可见，熟练掌握基本初等函数的图象和性质，是应用函数与方程思想解题的基础. 善于根据题意构造、抽象出函数关系式是用函数思想解题的关键.

（二）数形结合思想

[redacted]

恩格斯指出："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系.""数"与"形"是数学的基本研究对象，它们之间存在着对立统一的辩证关系.数形结合，就是在解决代数问题时，揭示出隐含在它内部的几何背景，启发思维，找到解题途径；或者在研究几何图形时，注意从代数的角度，通过数量关系的研究解决问题."数"与"形"是一对矛盾，宇宙间万物无不是"数"和"形"的矛盾的统一.华罗庚先生也说过："数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休."

具体说来，数形结合思想就是根据数学问题的条件与结论之间的内在联系，既分析其代数含义，又揭示其几何意义，使数量关系和空间形式巧妙和谐地结合起来，并充分利用这种"结合"寻找解题途径，使问题得到解决，它包含"以形助数"和"以数辅形"两个方面.

数形结合思想是解答数学问题的一种常用方法与技巧，数形结合的思想可以使某些抽象的数学问题直观化、生动化，能够变抽象思维为形象思维，有助于把握数学问题的本质.通过对图形的认识，数形结合的转化，可以培养思维的灵活性、形象性，使问题化难为易、化抽象为具体.数形结合的思想方法将抽象的代数问题给以形象化的原型，训练人们思维形象化的思维品质；将复杂的代数问题赋予灵活变通的形式，从而给人们思维灵活性的思维迁移训练，这正是反映了数形结合的思想方法解决数形之间问题的有效途径所在.

另外，由于使用了数形结合的方法，很多问题便迎刃而解，且解法简捷.特别是在解答选择、填空题时发挥着奇特功效，这就要求我们在平时学习中加强这方面的训练，以提高解题能力和速度.

数形结合的应用主要有两种情形：(1) 借助于数的精确性来阐明形的某些属性，如应用曲线的方程可以精确地阐明曲线的几何性质，应用数字可以表示平面图形的大小；(2) 借助形的几何直观性来阐明数之间的某种关系，如一些函数的最值问题、值域问题，不等式中比较大小问题等都可以用图形解决.

应用数形结合解题时应注意的一些问题：

(1) 注意数与形转化的等价性，将陌生、复杂的数学问题转化为简单、熟知的数学问题，一定要注意转化前后的问题是等价的.

(2) 注意利用"数"的精确性，一些判断公共点个数的问题，转化为图形后一定要"数"精确才能得出正确结论.

(3) 注意图形的全面性.有些数学问题所对应的图形并不唯一，就必须根据不同的情况作出相应的图形再进行讨论求解.

(4) 注意图形的实效性. 数形结合对某些问题来说, 在一定的条件下可以使用该方法, 但一旦条件发生变化, 就有可能不再适用了.

[redacted]

【例 1】 已知 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, S、T 是 U 的两个子集, 并且①$S \cap T = \{2\}$;②$(\complement_U S) \cap T = \{4\}$;③$(\complement_U S) \cap (\complement_U T) = \{1,6\}$. 求 S、T.

解法 1 对于该问题, 我们习惯上易从元素的归属去分析、解决. 由①知 $2 \in S$ 且 $2 \in T$, 由②知 $4 \in T$ 且 $4 \notin S$, 由③知 $1,6 \notin S$ 且 $1,6 \notin T$, 而对于 3、5 两个元素的归属却很难一口说出, 此时我们将势必陷入复杂的讨论中去. 如对于 3, 则要从 $3 \in S$ 且 $3 \in T$; $3 \in S$ 且 $3 \notin T$; $3 \notin S$ 且 $3 \in T$; $3 \notin S$ 且 $3 \notin T$ 四种情况去逐一分析、排除, 最后才能得出结论. 以上这种抽象分析的方法, 使问题的求解复杂化, 使我们对问题的理解难以深入, 对解决问题的方法难以把握.

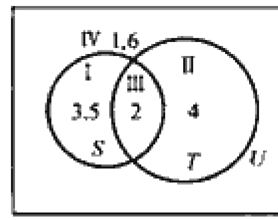


图 1

解法 2 此题我们若从全集中所有元素的分布入手, 用韦恩图将各部分结果展示清楚, 问题将轻易获解. 如图 1, 全集 U 中有 6 个元素, 由①知Ⅲ中有 2, 由②知Ⅱ中有 4, 由③知Ⅳ中有 1,6; 则易知Ⅰ中有 3,5. 所以 $S = \{2,3,5\}$, $T = \{2,4\}$.

【例 2】 某班有 50 名学生报名参加 A、B 两项比赛, 参加 A 项的有 30 人, 参加 B 项的有 33 人, 且 A、B 都不参加的同学比 A、B 都参加的同学的三分之一多一人. 只参加 A 不参加 B 的学生有多少人?

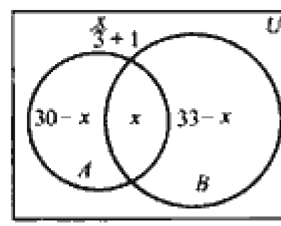


图 2

解析 若只进行空洞分析, 很难找到我们所需的等量关系, 甚至容易出现多解和漏解情形. 相反, 我们若能直观地将各部分人数用韦恩图展示出来, 则问题将迎刃而解.

设两项比赛都参加的同学组成集合 $A \cap B$, 并设其中有 x 个元素, 则各部分人数分布如图 2 所示. 由题意知: $(30 - x) + x + (33 - x) + \frac{x}{3} + 1 = 50$, 所以 $x = 21$, 所以 $30 - x = 9$, 即只参加 A 不参加 B 的人有 9 人.

【例 3】 求函数 $y = \sqrt{\frac{2x-3}{x-2}}$ 的单调区间.

解析 数形结合法是确定函数单调性常用的方法, 函数的单调区间可形象直观地反映在函数的图象中.

先画出函数 $y = \frac{2x-3}{x-2}$ 的图象. 因为 $y = \frac{2x-3}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$, 所以 $(x-2)(y-2) = 1$.

它的图象是以 $x = 2$, $y = 2$ 为渐近线的双曲线, 结合图象(图 3) 可知, 函数 $y = \sqrt{\frac{2x-3}{x-2}}$ 的单调减区间为 $(-\infty, 3/2]$, $(2, +\infty)$.

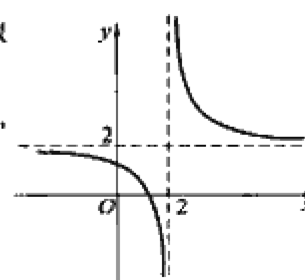


图 3

【例 4】 求 $\log_2(-x) < x + 1$ 成立的 x 的取值范围.

解法 1 由题知 x 的取值范围是 $x < 0$, 分段讨论.

当 $x = -1$ 时, $\log_2(-x) = 0$, $x + 1 = 0$ 不符合题意; 当 $x < -1$ 时, $-x > 1$, $\log_2(-x) > 0$, $x + 1 < 0$, 不合题意; 当 $-1 < x < 0$, $0 < -x < 1$, $\log_2(-x) < 0$, 而 $0 < x + 1$ 符合题意. 故得 x 的范围是 $-1 < x < 0$.

解法2　作出函数 $y=\log_2(-x)$ 及 $y=x+1$ 的图象(图4).其中 $y=\log_2(-x)$ 与 $y=\log_2 x$ 的图象关于 y 轴对称,观察图象知,$-1<x<0$,即 $x\in(-1,0)$.也可把原不等式化为 $\begin{cases}-x>0\\-x<2^{x+1}\end{cases}$ 后去作图.

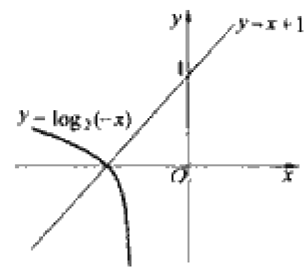


图 4

点评　利用一般解不等式的方法,本题是无法获解的,因为左边是一个对数式,右边是一个线性式,具有超越式的方程、不等式的求解,数形结合是一个有效的方法.通过此例培养用数形结合解决这类问题的意识.

例题链接　方程 $\lg x+x=3$ 的解所在区间为(　　)

A.(0,1)　　B.(1,2)　　C.(2,3)　　D.(3,+∞)

解析　在同一平面直角坐标系中,画出函数 $y=\lg x$ 与 $y=-x+3$ 的图象(图5).它们的交点横坐标 x_0,显然在区间(1,3)内,由此可排除A、D.至于选B还是选C,由于画图精确性的限制,单凭直观就比较困难了.实际上这是要比较 x_0 与2的大小.当 $x=2$ 时,$\lg x=\lg 2$,$3-x=1$.由于 $\lg 2<1$,因此 $x_0>2$,从而判定 $x_0\in(2,3)$,故选C.

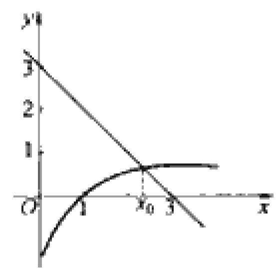


图 5

点评　本题通过构造函数(函数思想)用数形结合法求方程 $\lg x+x=3$ 解所在的区间.既然数形结合,那么就应该在结合方面下功夫.不仅要通过图象直观估计,而且还要计算 x_0 的邻近两个函数值,通过比较其大小进行判断.

【例5】　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\leqslant 0\\2, & x>0\end{cases}$,若 $f(-4)=f(0)$,$f(-2)=-2$,则关于 x 的方程 $f(x)=x$ 的解的个数为(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解析　因为 $f(-4)=f(0)$,所以 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=-2$,所以

$$-\frac{b}{2}=-2 \quad ①$$

又

$$f(-2)=(-2)^2-2b+c=-2 \quad ②$$

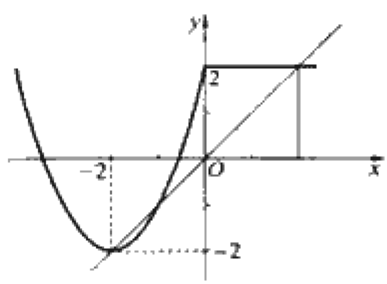


图 6

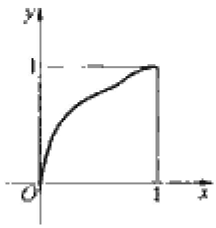
由①②可得:$b=4$,$c=2$.画出 $f(x)$ 的图象如图6所示:$y=x$ 过抛物线的顶点$(-2,-2)$,显然 $y=x$ 与抛物线必有另一交点.所以方程 $f(x)=x$ 的解有3个,故选C.

点评　此题若利用解方程的方法可以做,但运算较繁,把方程的解转化为两个函数的图象的交点,数形结合,解法形象直观,简捷明快.

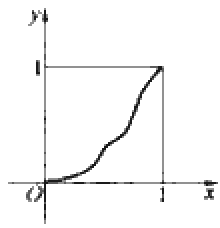
利用数形结合思想研究此类问题,在具体操作时,应注意以下几点:

① 准确画出函数图象,注意函数的定义域.② 用图象法讨论方程(特别是含参数的方程)的解的个数是一种行之有效的方法,值得注意的是首先把方程两边的代数式看作是两个函数的表达式(有时可能先作适当调整,以便于作图),然后作出两个函数的图象,由图求解.

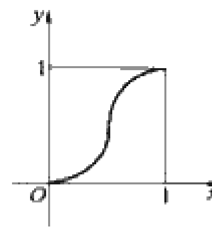
【例6】　一给定函数 $y=f(x)$ 的图象在下列图中,并且对任意 $a_1\in(0,1)$,由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$,得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,则该函数的图象是(　　)



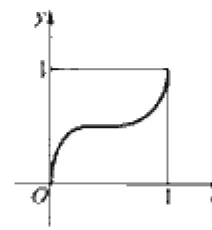
A.



B.



C.



D.

解析 由 $a_{n+1}=f(a_n)$, $a_{n+1}>a_n$, 得 $f(a_n)>a_n$, 即 $f(x)>x$, 故选 A.

点评 分析清楚函数值与自变量的关系，即可判断.

又如图7, 定圆半径为 a, 圆心为 (b,c), 则直线 $ax+by+c=0$ 与直线 $x-y+1=0$ 的交点在(　　)

A. 第四象限　　B. 第三象限　　C. 第二象限　　D. 第一象限

(点评：以绘图形式考查直线和圆的位置关系)

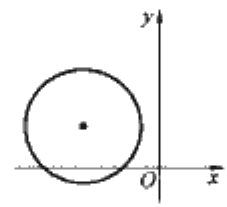


图 7

再如：若过定点 $M(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线与圆 $x^2+4x+y^2-5=0$ 在第一象限内的部分有交点，则 k 的取值范围是(　　)

A. $0<k<\sqrt{5}$　　B. $-\sqrt{5}<k<0$　　C. $0<k<\sqrt{13}$　　D. $0<k<5$

(提示：用画图的方法研究直线与圆的位置关系，直观确定斜率的取值范围，故选 A)

【例 7】 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数，当 $0<x<3$ 时，$f(x)$ 的图象如图 8 所示，那么不等式 $f(x)\cos x<0$ 的解集是(　　)

A. $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup(1,3)$　　B. $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$

C. $(-3,-1)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$　　D. $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup(1,3)$

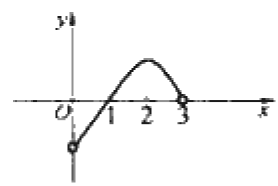


图 8

解析 根据图应分两种情况讨论，也可取特殊值检验作答.

因为 $f(x)\cos x<0 \Rightarrow f(x)>0, \cos x<0$ 或 $f(x)<0, \cos x>0$.

(1) 当 $f(x)>0, \cos x<0$ 时，根据图象 $f(x)>0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(1,3)$，而 $\cos x<0$，在 $(-3,3)$ 内其解为 $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$，则交集为 $\left(\frac{\pi}{2},3\right)$.

(2) 当 $f(x)<0, \cos x>0$ 时，根据图象可知 $f(x)<0$ 的解集为 $(-3,-1)\cup(0,1)$，而 $\cos x>0$，在 $(-3,3)$ 内其解为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则交集为 $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)$.

综合(1)(2)得 $f(x)\cos x<0$ 的解集为 $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$，故选 B.

【例 8】 点 A 在 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象上，其位置如图 9 所示. 试求 $\varphi\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 的值.

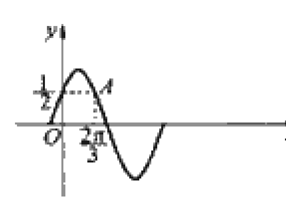


图 9

解析 把点 A 的坐标代入函数式得 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，因为正弦函数 $y=\sin x$ 的单调递减区间是 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，又因为点 A 在单调递减区间上，故应有 $\frac{2\pi}{3}+\varphi\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$. 于是由 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，得 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，又因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以取 $k=0$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

点评 把点 A 的坐标代入函数式得 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，此时学生易错解为：$\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+$

$\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，然后取 $k=0$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$. 其错误原因在于学生对相位的概念未理解清楚，没有弄清点 A 的具体位置，忽视了三角函数中的多对一的特性.

【例 9】 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$，则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最大值是（　　）.

解法 1 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{8-4\sqrt{3}\cos\alpha+4\sin\alpha}=\sqrt{8+8\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$，所以最大值为 4.

解法 2 （数形结合）设 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{a}$，则知 P 在 O 为圆心，2 为半径的圆周上(图 10). $\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$，则知点 Q 坐标为 $(\sqrt{3},-1)$，因为 $|PQ|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，观察图象知 $|PQ|$ 的最大值为 4.

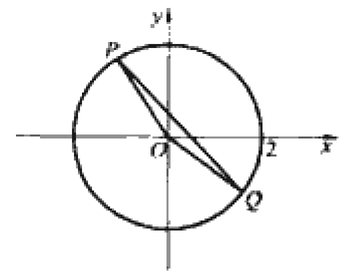


图 10

点评 理解向量的几何表示，借助数形结合的思想，可避开复杂的分析与计算，从而直观地发现结果，提高解题效率.

例题链接 1. 已知向量 $\overrightarrow{OB}=(2,0)$，$\overrightarrow{OC}=(2,2)$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$，则向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角范围为（　　）

A. $[0,\frac{\pi}{4}]$　　B. $[\frac{\pi}{4},\frac{5}{12}\pi]$

C. $[\frac{5}{12}\pi,\frac{\pi}{2}]$　　D. $[\frac{\pi}{12},\frac{5}{12}\pi]$

解析 如图 11，点 A 的轨迹是以 $C(2,2)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆. 过原点 O 作此圆的切线，切点分别为 M、N. 联 CM、CN. 因为 $|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{2}$，所以 $|\overrightarrow{CM}|=|\overrightarrow{CN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OC}|$. 知 $\angle COM=\angle CON=\frac{\pi}{6}$，但 $\angle COB=\frac{\pi}{4}$，所以 $\angle MOB=\frac{\pi}{12}$，$\angle NOB=\frac{5}{12}\pi$. 故选 D.

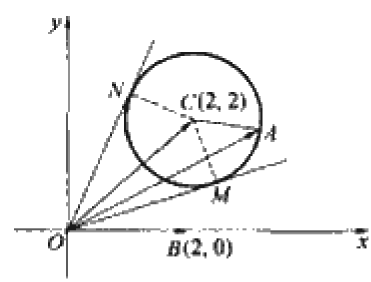


图 11

点评 借助图形，轻松获解.

2. 如图 12，小正六边形沿着大正六边形的边，按顺时针方向滚动. 小正六边形的边长是大正六边形边长的一半，如果小正六边形沿着大正六边形的边滚动一周后返回出发时的位置，在这个过程中向量 $\overrightarrow{OA}$ 围绕着点 O 旋转了 θ 角，其中 O 为小正六边形的中心，则 $\sin\frac{\theta}{6}+\cos\frac{\theta}{6}=$ ________.

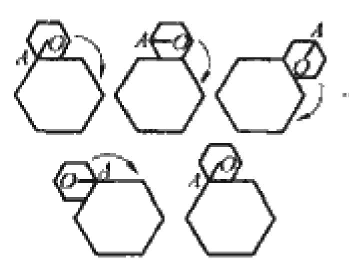


图 12

解析 从第一图的开始位置变化到第二图时，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 旋转了 $-\frac{\pi}{3}$（注意 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 是顺时针方向旋转），从第二图位置变化到第三图时，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 旋转了 $-\frac{2\pi}{3}$，则从第一图的位置变化到第三图位置时，正好小正六边形滚过大正六边形的一条边，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 旋转了 $-\pi$. 则小正六边形沿着大正六边形的边滚动一周后返回出发时的位置，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 共旋转了 -6π，即 $\theta=-6\pi$，因而 $\sin\frac{\theta}{6}+\cos\frac{\theta}{6}=\cos(-\pi)+\sin(-\pi)=-1$.

点评 本题主要考查考生的读图能力及其有关向量、三角的基本运算能力，向量的概念. 需仔细阅读题意，分析图形，把握图形与题意的联系，可从简单情形，特殊位置入手，找到变化规律来解决问题.

3. $\tan15^\circ+\cot15^\circ$ 的值为（　　）

A. 2　　B. $2+\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$

解法1 （常规解法）

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sin(45^\circ-30^\circ)}{\cos(45^\circ-30^\circ)}=\frac{\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ}=\frac{\cos 30^\circ-\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ+\sin 30^\circ}=2-\sqrt{3}$$

$$\cot 15^\circ=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

所以

$$\tan 15^\circ+\cot 15^\circ=4$$

故选 C.

解法2 （奇思妙解）如图13，构造15°角，易得 $\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}$，$\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$.

点评 此题的妙解之"妙"就在于以"形算"替代了"数算"，省力省时.

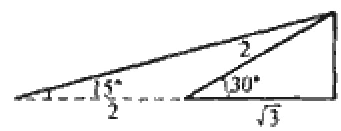


图 13

【例10】 设 $a>0$，且 a 为常数，解不等式 $\sqrt{x^2+1}-ax>1$.

解析 等式可化为 $\sqrt{x^2+1}>1+ax$，设 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的图象为 C_1，$y=1+ax$ 的图象为 C_2，由 $y=\sqrt{x^2+1}$ 得 $y^2-x^2=1(y\geqslant 1)$，所以 C_1 是等轴双曲线的上半支，C_2 是过点(0,1)，斜率为 a 的直线系. 当 $a\geqslant 1$ 时，由图14，原不等式解集为 $(-\infty,0)$；当 $0<a<1$ 时，由图14，原不等式解集为 $(-\infty,0)\cup\left(\frac{2a}{1-a^2},+\infty\right)$（当 $0<a<1$ 时，设 C_1 与 C_2 交于点 A，点 A 横坐标是方程 $\sqrt{x^2+1}=1+ax$ 的根，$x_A=\frac{2a}{1-a^2}$）.

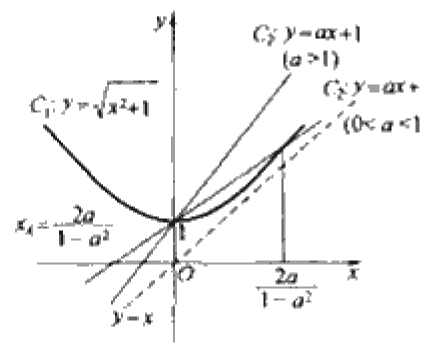


图 14

点评 将不等式（或变形后）两边分别看作两个函数，考察两个函数图象的相对位置关系，常可简化解题过程，且不易出错.

【例11】 从原点向圆 $x^2+y^2-12y+27=0$ 作两条切线，则该圆夹在两条切线间的劣弧长为（ ）

A.π B.2π C.4π D.6π

解析 将圆的方程配方得：$x^2+(y-6)^2=9$，圆心在(0,6)，半径为3，如图15所示，在图中 Rt△PAO 中，$OP=6=2PA$，从而得到 $\angle AOP=30^\circ$，即 $\angle AOB=60^\circ$. 可求 $\angle BPA=120^\circ$. ⊙P 的周长为 $2\pi\times 3=6\pi$，劣弧长为周长的 $\frac{1}{3}$，可求得劣弧长为 2π.

点评 以数形结合的思想解决此类题，抓图中直角三角形中边角关系.

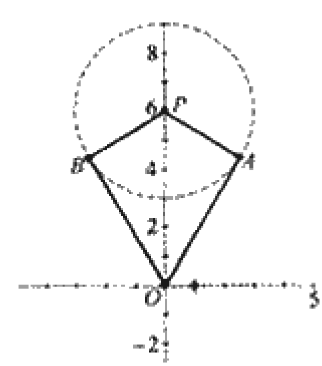


图 15

【例12】 直线 $y=x+3$ 与圆锥曲线 $-\frac{x|x|}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 的交点个数是（ ）

A.0 B.1 C.2 D.3

解析 如图16，当 $x\geqslant 0$ 时，已知曲线是双曲线 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$ 的一部分；当 $x<0$ 时，已知曲线是椭圆 $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$ 的一部分. 因为直线 $y=x+3$ 过顶点，所以直线与此曲线有3个交点，或联立方程组求解，故选 D.

【例 13】 点 $P(-3,1)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左准线上，过点 P 且方向为 $\boldsymbol{a}=(2,-5)$ 的光线，经直线 $y=-2$ 反射后通过椭圆的左焦点，则这个椭圆的离心率为（　　）

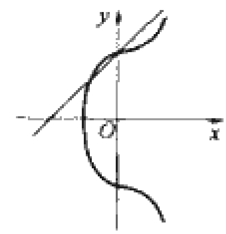


图 16

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

解析　本题考查了椭圆的定义、性质、向量与解析几何知识交汇综合运用，同时考查了理性思维，综合计算技能，技巧等. 如图 17，过点 $P(-3,1)$ 的方向向量 $\boldsymbol{a}=(2,-5)$，所以 $k_{PQ}=-\frac{5}{2}$，则 $l_{PQ}:y-1=-\frac{5}{2}(x+3)$，即 $l_{PQ}:5x+2y=-13$ 联立：$\begin{cases}5x+2y=-13\\ y=-2\end{cases}$，得 $Q(-\frac{9}{5},-2)$，由光线反射的对称性知：$k_{QF_1}=\frac{5}{2}$，所以 $l_{QF_1}:y+2=\frac{5}{2}(x+\frac{9}{5})$，即 $l_{QF_1}:5x-2y+5=0$. 令 $y=0$，得 $F_1(-1,0)$. 综上所述得：$c=1$，$\frac{a^2}{c}=3$，则 $a=\sqrt{3}$，所以椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

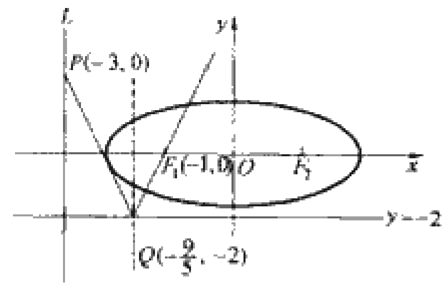


图 17

注　利用对称性解此题也较简单.

【例 14】 已知点 P 在圆 $A:x^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}$ 上移动，点 Q 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上移动，求 $|PQ|$ 的最大值与最小值.

解析　如图 18，设直线 QA 与圆 A 分别交于点 P_1、P_2，则当点 P 在圆 A 上移动时，必备 $|PQ|\leqslant|AP|+|AQ|=\frac{1}{2}+|AQ|$ 且 $|PQ|\geqslant|AQ|-|AP|=|AQ|-\frac{1}{2}$，因此 $|PQ|$ 的最值与 $|AQ|$ 的最值相关.

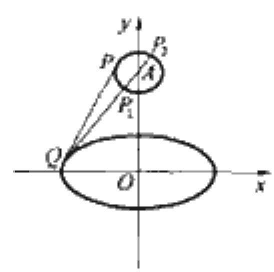


图 18

设 $Q(2\cos\theta,\sin\theta)$ 为椭圆上任一点，则 $|AQ|^2=(2\cos\theta)^2+(2-\sin\theta)^2=-3(\sin\theta+\frac{2}{3})^2+\frac{28}{3}$.

当 $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ 时，$|AQ|_{\max}=\sqrt{\frac{28}{3}}$，当 $\sin\theta=1$ 时，$|AQ|=1$.

所以 $|PQ|$ 最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}+\frac{1}{2}$，最小值为 $\frac{1}{2}$.

点评　利用数形结合，将求 $|PQ|$ 的最大值转化为求 $|AQ|$ 的最值是关键.

【例 15】 某中心接到其正东、正西、正北方向三个观测点的报告：正西、正北两个观测点同时听到了一声巨响，正东观测点听到的时间比其他两观测点晚 4 s. 已知各观测点到该中心的距离都是 1 020 m. 试确定该巨响发生的位置（假定当时声音传播的速度为 340 m/s，相关各点均在同一平面上）.

解法 1　以接报中心为原点 O，正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向，建立直角坐标系. 设 A、B、C 分别是西、东、北观测点（图 19），则 $A(-1\,020,0)$、$B(1\,020,0)$、$C(0,1\,020)$. 设 $P(x,y)$ 为巨响发生点，由 A、C 同时听到巨响声，得 $|PA|=|PC|$，故 P 在 AC 的垂直平分线 PO 上，PO 的方程为 $y=-x$，因点 B 比点 A 晚 4 s 听到爆炸声，故 $|PB|-|PA|=340\times4=1\,360$.

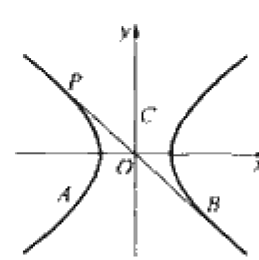


图 19

由双曲线定义知点 P 在以 A、B 为焦点的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，依题

意得 $a=680$，$c=1\,020$，所以

$$b^2=c^2-a^2=1\,020^2-680^2=5\times340^2$$

故双曲线方程为

$$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{5\times340^2}=1$$

用 $y=-x$ 代入上式，得 $x=\pm680\sqrt{5}$，因为 $|PB|>|PA|$，所以 $x=-680\sqrt{5}$，$y=680\sqrt{5}$，即 $P(-680\sqrt{5},680\sqrt{5})$，故 $PO=680\sqrt{10}$。

答：巨响发生在接报中心的西偏北 45° 距中心 $680\sqrt{10}$ m 处。

解法 2　以接报中心为原点 O，正东、正北方向为 x 轴、y 轴正向建立直角坐标系。

记 $\mu=1\,020$，则 $A(-\mu,0)$、$B(\mu,0)$、$C(0,\mu)$。设巨响发生在点 $P(x,y)$，由 A、C 同时听到巨响声，得 $|PA|=|PC|$，即

$$\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-\mu)^2}$$

所以

$$y=-x \qquad ①$$

由点 B 比点 A 晚 4 s 听到巨响声，设

$$v=|PB|-|PA|=340\times4=1360$$

即

$$\sqrt{(x-\mu)^2+y^2}-\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}=v \qquad ②$$

将式 ① 代入式 ② 并整理得

$$(16\mu^2-8v^2)x^2=4\mu^2v^2-v^4$$

用 $\mu=1\,020$，$v=1\,360$ 代入得 $x=\pm680\sqrt{5}$。因为 $|PB|>|PA|$，所以 $x=-680\sqrt{5}$，$y=680\sqrt{5}$。以下略。

【例 16】　如图 20，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面为直角三角形，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=CC_1=\sqrt{2}$，P 是 BC_1 上一动点，则 $CP+PA_1$ 的最小值是________。

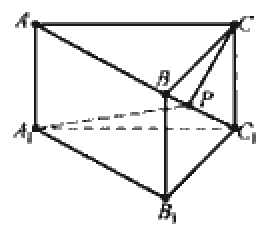


图 20

解析　联结 A_1B，沿 BC_1 将 $\triangle CBC_1$ 展开与 $\triangle A_1BC_1$ 在同一个平面内，如图 21 所示，联结 A_1C，则 A_1C 的长度就是所求的最小值。

通过计算可得 $\angle A_1C_1B=90°$，又 $\angle BC_1C=45°$，所以 $\angle A_1C_1C=135°$。由余弦定理可求得 $A_1C=5\sqrt{2}$。

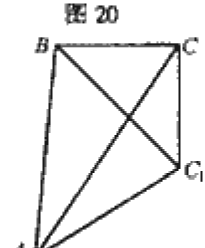
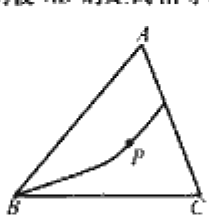


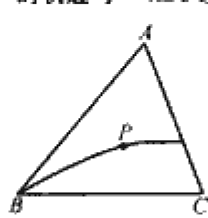
图 21

点评　将平面图形空间化也是立体几何的另一种问题形式，在立体几何中，许多问题都是空间图形进行平面化，努力将一个个空间图形，通过所学的几何知识，转化成平面图形，最后使用平面几何的若干知识解决。

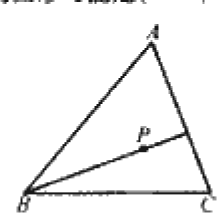
【例 17】　若三棱锥 $A-BCD$ 侧面 ABC 内一动点 P 到底面 BCD 的距离与到棱 AB 的距离相等，则动点 P 的轨迹与 $\triangle ABC$ 组成的图形可能是(　　)



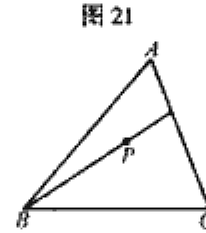
A.



B.



C.



D.

解析　此题将立体几何与解析几何巧妙结合，是对过去分离考核的创新.许多同学对此有茫然之感.但此题的解答很简单，利用普遍性与特殊性的关系，首先考虑特殊图形，当 $AC\perp$ 平面 BCD 时，问题化为点 P 到 AB 和 BC 距离相等的点的轨迹.显然，点 P 的轨迹是 $\angle ABC$ 的平分线.如图 22 所示.

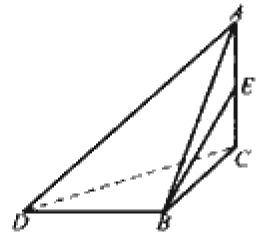


图 22

当 AC 不垂直平面 BCD 时，如图 23 所示.设 P 到平面 DBC 和到边 BC 的距离分别为 h、d_{BC}，设 $A-BC-D$ 的大小为 θ，则 $\frac{d_{AB}}{d_{BC}}=\frac{h}{d_{BC}}=\sin\theta\leqslant 1$，故选 D.

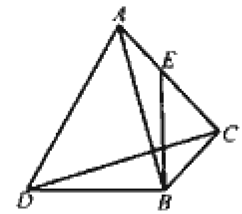


图 23

【例 18】　四棱锥的 8 条棱代表 8 种不同的化工产品，有公共点的两条棱代表的化工产品放在同一仓库是危险的，没有公共顶点的两条棱代表的化工产品放在同一仓库是安全的，现打算用编号为 ①、②、③、④ 的 4 个仓库存放这 8 种化工产品，那么安全存放的不同方法种数为(　　)

A.96　　B.48　　C.24　　D.0

解析　本题考查了排列组合综合运用问题，可以画出四棱锥标出 8 个数字帮助直观分析，注意分类要全面准确，抓住问题实质.由题意分析，如图 24 所示，先把标号为 1,2,3,4 号化工产品分别放入 ①②③④ 四个仓库内共有 $A_4^4=24$ 种放法；再把标号为 5,6,7,8 号化工产品对应按要求安全存放：

7 放入 ①，8 放入 ②，5 放入 ③，6 放入 ④；或者 6 放入 ①，7 放入 ②，8 放入 ③，5 放入 ④ 两种放法.

综上所述：共有 $A_4^4\times 2=48$ 种放法，故选 B.

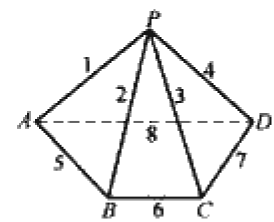


图 24

【例 19】　一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10 000 人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图(图 25).为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这 10 000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查，则在[2 500,3 000](元)月收入段应抽出_______人.

解析　由所给的直方图知：在[2 500,3 000)内的概率为 $(3\,000-2\,500)\times 0.000\,5=0.25$，所以 100 人中，月收入在[2 500,3 000)段内的人数为 $100\times 0.25=25$(人).

点评　考查直方图是对新课程的一个新的尝试，在原来的基础上考查的内容更广泛、更适用，更贴近生活.解题的关键是利用数形结合思想分析.

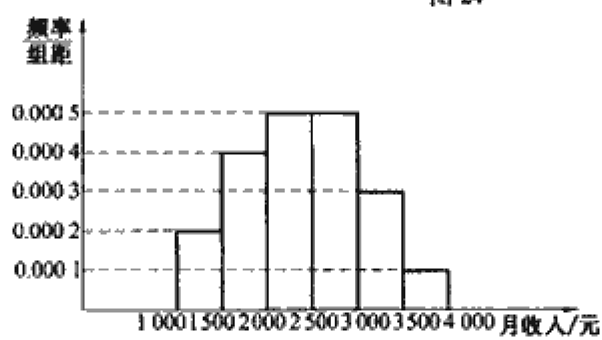


图 25

[redacted]

已知 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，点 C 在 $\angle AOC=30°$.设 $\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in\mathbf{R})$，则 $\frac{m}{n}$ 等于(　　)

A. $\frac{1}{3}$　　B.3　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

解析　已知 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{3}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，由已知得点 C 在 AB 上，且 $\angle AOC=30°$.设点 A 坐标为 $(1,0)$，点 B 的坐标为 $(0,\sqrt{3})$，则点 C 的坐标为 $(x,y)=\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}(m,n\in\mathbf{R})$，

所以 $m=\frac{3}{4}$，$n=\frac{1}{4}$，$\frac{m}{n}=3$，故选 B.

点评 本题属于向量问题，快速解答此类问题常常需画出正确的图形，然后观察分析得出.

[redacted]

(1) 数形结合的思想方法所涉及的主要内容有：

① 集合及其运算问题中，图形与符号、图形与文字的转译；

② 函数的表达形式之间的转译，充分利用图象研究函数特性是现行教材的基本指导思想；

③ 向量中相关问题的解决与应用；

④ 函数图象与方程、不等式的解集间的内在联系构成的推理判定意识；

⑤ 圆锥曲线及其相关元素的图形特征与方程及定义间的内在联系的应用意识；

⑥ 三角函数图象的特征及三角函数几何定义的应用意识；

⑦ 几何中的“形”中觅“数”.

(2) 数形结合思想解决的问题常有以下几种：

① 构建函数模型并结合其图象求参数的取值范围；

② 构建函数模型并结合其图象研究方程根的范围；

③ 构造函数模型并结合其图象研究量与量之间的大小关系；

④ 构造复数模型并结合其几何意义研究函数的最值问题和证明不等式；

⑤ 构建立体几何模型研究代数问题；

⑥ 构建解析几何中的斜率、截距、距离等模型研究最值问题；

⑦ 构造方程模型，求解的个数；

⑧ 研究图形的形状、位置关系、性质等.

(3) 数形结合思想是解答高考数学试题的一种常用方法与技巧，在运用数形结合思想分析问题和解决问题时，需做到以下四点：

① 要彻底明白一些概念和运算的几何意义以及曲线的代数特征；

② 要恰当设参，合理用参，建立关系，做好转化；

③ 要正确确定参数的取值范围，以防重复和遗漏；

④ 精心联想“数”与“形”，使一些较难解决的代数问题几何化，几何问题代数化，便于问题求解. 通过对图形的认识，数形的对比，使问题化难为易，化抽象为具体.

数形结合思想的应用主要是借助形的直观性来阐明数之间的联系，其次是借助于数的精确性来阐明形的某些属性. 数形结合的思想，其实质是将抽象的数学语言与直观的图象结合起来，关键是代数问题与图形之间的相互转化. 数形结合的主要方法有解析法、三角法、向量法、图象法等.

(三)分类与整合思想

[redacted]

在解题时,我们常常遇到这样一种情况,解到某一步之后,就不能再以统一的方法,统一的式子继续进行了,因为这时被研究的问题包含了多种情况,这就必须在条件所给出的总区域内,正确划分若干个子区域,然后分别在多个子区域内进行解题.在这其中体现的是由大化小、由整体化为部分、由一般化为特殊的解决问题的方法,其研究方向基本是"分",但分类解决问题之后,还必须把它们总合在一起,这种"合 — 分 — 合"的解决问题的过程,就是分类与整合的思想方法.

近年来高考数学试题往往是入手比较容易,而得满分比较难,缘由何在?这是因为高考试题的一个重要功能就是区分和选拔,让不同层次的学生得到不同的分数.其中,对"分类与整合"思想的考查正为这种命题思路提供了载体.

分类与整合的思想是以概念的划分,集合的分类为基础的思想方法,高考对分类与整合的思想的考查,有以下几个方面:

(1) 考查有没有分类意识,遇到应该分类的情况,是否想到要分类,什么样的问题需要分类?

(2) 如何分类,即要会科学地分类,分类要标准统一,不重不漏;

(3) 分类之后如何研究;

(4) 如何整合.

[redacted]

【例1】 已知$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$,则不等式$x+(x+2)\cdot f(x+2)\leq 5$的解集是________.

解析 此题属分段函数问题,需分类讨论.操作时,要对函数每一段的情况分别进行研究,从而使问题获解.解集为$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$.

【例2】 从数字1、2、3、4、5中,随机抽取3个数字(允许重复)组成一个三位数,其各位数字之和等于9的概率为(　　)

A. $\dfrac{13}{125}$　　B. $\dfrac{16}{125}$　　C. $\dfrac{18}{125}$　　D. $\dfrac{19}{125}$

解析 按一定的逻辑关系列举(分类),例如,可按没有3,有一个3,有三个3共计五种情况列举,得到19个不同的三位数,故选D.

【例3】 从6人中选4人分别到巴黎、伦敦、悉尼、莫斯科四个城市游览,要求每个城市有一人游览,每人只游览一个城市,且这6人中甲、乙两人不去巴黎游览,则不同的选择方案共有(　　)

A. 300种　　B. 240种　　C. 144种　　D. 96种

解析 分三类情况：(1)甲、乙两人中只有一人被选中，有 $C_4^1C_2^1\cdot 3\cdot A_3^3=144$(种)；(2)甲、乙两人均被选中，有 $C_4^2C_2^1A_3^1A_2^2=72$(种)；(3)甲、乙两人均未被选中，有 $C_4^3A_3^3=24$(种)．故共有240种，故选B.

【例4】 已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$P$在椭圆上，若$P$、$F_1$、$F_2$是一个直角三角形的三个顶点，则点$P$到$x$轴的距离为(　　)

A.$\frac{9}{5}$　　B.3　　C.$\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　D.$\frac{9}{4}$

解析 由P、F_1、F_2三点所确定的直角三角形，需分类讨论直角顶点的位置，故选D.

【例5】 设函数$f(x)=2^{|x+1|-|x-1|}$，求使$f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$的x取值范围.

解析 本小题主要考查指数函数的性质、不等式性质和解法，考查分类整合思想及分析问题的能力和计算能力.由于$y=2^x$是增函数，$f(x)\geqslant 2\sqrt{2}$等价于

$$|x+1|-|x-1|\geqslant\frac{3}{2} \quad ①$$

当$x\geqslant 1$时，$|x+1|-|x-1|=2$，所以式①恒成立；当$-1<x<1$时，$|x+1|-|x-1|=2x$，式①化$2x\geqslant\frac{3}{2}$，即$\frac{3}{4}\leqslant x<1$；当$x\leqslant -1$时，$|x+1|-|x-1|=-2$，式①无解.

综上的取值范围是$\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

点评 该题考查指数函数的性质和绝对值不等式的解法，当根据指数函数的单调性将不等式转化为绝对值不等式$|x+1|-|x-1|\geqslant\frac{3}{2}$后，最基本的想法就是分类求解，再整合作答.

【例6】 已知函数$f(x)=\frac{x^2}{ax+b}$(a、b为常数)，且方程$f(x)-x+12=0$有两个实根为$x_1=3$，$x_2=4$.

(Ⅰ)求函数$f(x)$的解析式；(Ⅱ)设$k>1$，解关于x的不等式$f(x)<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$.

解析 本题主要考查求函数的解析式及含参分式不等式的解法.

(Ⅰ)将$x_1=3$，$x_2=4$分别代入方程$\frac{x^2}{ax+b}-x+12=0$得$\begin{cases}\frac{9}{3a+b}=-9\\ \frac{16}{4a+b}=-8\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}$，所以$f(x)=\frac{x^2}{2-x}(x\neq 2)$.

(Ⅱ)不等式即为$\frac{x^2}{2-x}<\frac{(k+1)x-k}{2-x}$，可化为$\frac{x^2-(k+1)x+k}{2-x}<0$，即$(x-2)(x-1)(x-k)>0$.

① 当$1<k<2$时，解集为$x\in(1,k)\cup(2,+\infty)$；

② 当$k=2$时，不等式为$(x-2)^2(x-1)>0$，解集为$x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$；

③ 当$k>2$时，解集为$x\in(1,2)\cup(k,+\infty)$.

点评 解不等式的过程实质上就是转化的过程，分式不等式转化成整式不等式，解分式不等式一般情况下是移项、通分，然后转化成整式不等式.对于高次不等式，借助数轴法，则简单快捷，另外$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$，$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}$.

【例7】 已知函数$f(x)=x^2e^{ax}$，其中$a\leqslant 0$，e为自然对数的底数.

(Ⅰ)讨论函数$f(x)$的单调性；

(Ⅱ)求函数$f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值.

解析 (Ⅰ)$f'(x)=x(ax+2)e^{ax}$.

① 当$a=0$时，令$f'(x)=0$，得$x=0$.若$x>0$，则$f'(x)>0$，从而$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递

增；若 $x<0$，则 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

② 当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x(ax+2)=0$，故 $x=0$ 或 $x=-\frac{2}{a}$.

若 $x<0$，则 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；

若 $0<x<-\frac{2}{a}$，则 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $(0,-\frac{2}{a})$ 上单调递增；

若 $x>-\frac{2}{a}$，则 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(-\frac{2}{a},+\infty)$ 上单调递减.

（Ⅱ）① 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值是 $f(1)=1$；

② 当 $-2<a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值是 $f(1)=e^a$；

③ 当 $a\leqslant-2$ 时，$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值是 $f(-\frac{2}{a})=\frac{4}{a^2e^2}$.

点评　本题主要考查导数在单调性及最值上的应用，同时考查了分类讨论的数学思想. 对于（Ⅰ）关键在于明确参数 a 在允许范围内的取值对函数单调性的影响，从而按 $a<0$ 和 $a=0$ 分类讨论；（Ⅱ）中则依 $-\frac{2}{a}$ 与 1 的大小关系分类讨论.

【例 8】　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和 $S_n>0(n=1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）求 q 的取值范围；（Ⅱ）设 $b_n=a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}$，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，试比较 S_n 与 T_n 的大小.

解析　本小题主要考查等比数列的基本知识、考查分析问题能力和推理能力.

（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，$S_n>0$，可得 $a_1=S_1>0$，$q\neq0$；当 $q=1$ 时，$S_n=na_1>0$.

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，即 $\frac{1-q^n}{1-q}>0(n=1,2,3,\cdots)$，上式等价于不等式组

$$\begin{cases}1-q<0\\1-q^n<0\end{cases},n=1,2,3,\cdots \quad ①$$

或

$$\begin{cases}1-q>0\\1-q^n>0\end{cases},n=1,2,3,\cdots \quad ②$$

解式 ① 得 $q>1$；解 ②，由于 n 可为奇数、可为偶数，得 $-1<q<1$. 综上，q 的取值范围是 $(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

（Ⅱ）由 $b_n=a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}$，得 $b_n=a_n(q^2-\frac{3}{2}q)$，$T_n=(q^2-\frac{3}{2}q)S_n$，于是

$$T_n-S_n=S_n(q^2-\frac{3}{2}q-1)=S_n(q+\frac{1}{2})(q-2)$$

又因为 $S_n>0$ 且 $-1<q<0$ 或 $q>0$，所以当 $-1<q<-\frac{1}{2}$ 或 $q>2$ 时，$T_n-S_n>0$，即 $T_n>S_n$；当 $-\frac{1}{2}<q<2$ 或 $q\neq0$ 时，$T_n-S_n<0$，即 $T_n<S_n$；当 $q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=2$ 时，$T_n-S_n=0$，即 $T_n=S_n$.

点评　此题不仅要在 $q=1$ 和 $q\neq1$ 的不同情况下求 q 的取值范围，而且 S_n、T_n 的大小也依赖 q 的取值，对分类与整合的考查达到了较高的层次.

【例 9】　已知 $u_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n(n\in\mathbf{N}^*,a>0,b>0)$.

（Ⅰ）当 $a=b$ 时，求数列 $\{u_n\}$ 的前 n 项和 S_n；（Ⅱ）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}$.

解析　（Ⅰ）当 $a=b$ 时，$u_n=(n+1)a^n$，它的前 n 项和

$$S_n=2a+3a^2+4a^3+\cdots+(n+1)a^n \quad ①$$

式①两边同时乘以 a,得

$$aS_n = 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \cdots + (n+1)a^{n+1} \qquad ②$$

① - ②,得

$$(1-a)S_n = 2a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n - (n+1)a^{n+1}$$

若 $a \neq 1$,则

$$(1-a)S_n = \frac{a(1-a^n)}{1-a} - (n+1)a^{n+1} + a$$

得 $$S_n = \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2} + \frac{a-(n+1)a^{n+1}}{1-a} = \frac{(n+1)a^{n+2}-(n+2)a^{n+1}-a^2+2a}{(1-a)^2}$$

若 $a \neq 1$,则

$$S_n = 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+3)}{2}$$

(Ⅱ)当 $a = b$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n+1)a^n}{na^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{n} = a$$

当 $a \neq b$ 时,设 $q = \frac{b}{a}(q \neq 1)$,则

$$u_n = a^n(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = \frac{a^n(1-q^{n+1})}{q-1}$$

此时 $$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{a(1-q^n)}{1-q^{n-1}}$$

当 $q < 1$ 时,即 $a > b$ 时,知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}} = a\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q^{n-1}} = a$$

当 $q > 1$ 时,即 $a > b$ 时,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q^{n-1}} = a\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{q^n}-1}{\frac{1}{q^n}-q^{-1}} = aq = b$$

点评 本题考查等差数列和等比数列的前 n 项和公式、求数列的前 n 项和、求数列的极限及分类整合思想等,特别是第二问与极限相联系,是近几年数列考查的一个新内容.

【例 10】 已知 $a \in \mathbb{R}$,函数 $f(x) = x^2|x-a|$.

(Ⅰ)当 $a = 2$ 时,求使 $f(x) = x$ 成立的 x 的集合;

(Ⅱ)求函数 $y = f(x)$ 在区间[1,2]上的最小值.

解析 本题是一道函数与导数综合运用问题,第一问对 x 进行讨论,得出方程,进而求出 x 的值;第二问对 a 进行讨论,结合函数的一阶导数值判断函数在区间上的单调性,进而求出函数的最小值.

(Ⅰ)由题意,$f(x) = x^2|x-2|$.当 $x < 2$ 时,$f(x) = x^2(2-x) = x$,解得 $x = 0$ 或 $x = 1$.

当 $x \geqslant 2$ 时,$f(x) = x^2(x-2) = x$,解得 $x = 1+\sqrt{2}$.综上所述,所求解集为$\{0,1+\sqrt{2}\}$.

(Ⅱ)设此最小值为 m.

① 当 $a \leqslant 1$ 时,在区间[1,2]上,$f(x) = x^3 - ax^2$.

因为 $f'(x) = 3x^2 - 2ax = 3x(x - \frac{2}{3}a) > 0, x \in (1,2)$,则 $f(x)$ 是区间[1,2]上的增函数,所以 $m = f(1) = 1 - a$;

② 当 $1 < a \leqslant 2$ 时,在区间[1,2]上,$f(x) = x^2|x-a| \geqslant 0$,由 $f(a) = 0$ 知 $m = f(a) = 0$;

③ 当 $a > 2$ 时,在区间[1,2]上,$f(x) = ax^2 - x^3$,$f'(x) = 2ax - 3x^2 = 3x(\frac{2}{3}a - x)$.

若 $a \geqslant 3$，在区间 $(1,2)$ 内 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 为区间 $[1,2]$ 上的增函数，由此得 $m=f(1)=a-1$.

若 $2<a<3$，则 $1<\frac{2}{3}a<2$，当 $1<x<\frac{2}{3}a$ 时，$f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 为区间 $[1,\frac{2}{3}]$ 上的增函数，当 $\frac{2}{3}<x<2$ 时，从而 $f'(x)$ 为区间 $[\frac{2}{3}a,2]$ 上的减函数.

因此，当 $2<a<3$ 时，$m=f(1)=a-1$ 或 $m=f(2)=4(a-2)$；当 $2<a\leqslant\frac{7}{3}$ 时，$4(a-2)\leqslant a-1$，故 $m=4(a-2)$.

当 $\frac{7}{3}<a<3$ 时，$a-1<4(a-2)$，故 $m=a-1$.

综上所述，所求函数的最小值 $m=\begin{cases}1-a, & a\leqslant 1\\ 0, & 1<a\leqslant 2\\ 4(a-2), & 2<a\leqslant\frac{7}{3}\\ a-1, & a>\frac{7}{3}\end{cases}$.

点评 本题主要考查运用导数研究函数性质的方法，同时考查了分类讨论转化化归的数学思想，以及相关分析推理、计算等方面的能力.

【例 11】 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$.

（Ⅰ）求函数 $g(x)$ 的解析式；（Ⅱ）解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$；

（Ⅲ）若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，求实数 λ 的取值范围.

解析 本题主要考查函数图象的对称、二次函数的基本性质与不等式的应用等基础知识，以及综合运用所学知识分析和解决问题的能力.

（Ⅰ）设函数 $y=f(x)$ 的图象上任意一点 $Q(x_0,y_0)$ 关于原点的对称点为 $P(x,y)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_0+x}{2}=0\\ \dfrac{y_0+y}{2}=0\end{cases}，即\begin{cases}x_0=-x\\ y_0=-y\end{cases}$$

因为点 $Q(x_0,y_0)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图象上，所以 $-y=x^2-2x$，即 $y=-x^2+2x$，故 $g(x)=-x^2+2x$.

（Ⅱ）由 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$，可得 $2x^2-|x-1|\leqslant 0$. 当 $x\geqslant 1$ 时，$2x^2-x+1\leqslant 0$，此时不等式无解；当 $x<1$ 时，$2x^2+x-1\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. 因此，原不等式的解集为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

（Ⅲ）$h(x)=-(1+\lambda)x^2+2(1-\lambda)x+1$，当 $\lambda=-1$ 时，$h(x)=4x+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，所以 $\lambda=-1$；当 $\lambda\neq-1$ 时，对称轴的方程为 $x=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$. 当 $\lambda<-1$ 时，$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\leqslant-1$，解得 $\lambda<-1$；当 $\lambda>-1$ 时，$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\geqslant-1$，解得 $-1<\lambda\leqslant 0$. 综上，$\lambda\leqslant 0$.

【例 12】 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\frac{3}{2}x,\sin\frac{3}{2}x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\frac{x}{2},-\sin\frac{x}{2})$，且 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 求：

（Ⅰ）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

（Ⅱ）若 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\lambda|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最小值是 $-\frac{3}{2}$，求 λ 的值.

解析 先利用向量运算求出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，进而求出 $f(x)$ 的解析式，再根据二次函数在闭区间上的最值问题的解法进行分类讨论求得 λ 的值.

（Ⅰ）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\frac{x}{2}=\cos 2x$；

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2})^2+(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2})^2}=\sqrt{2+2\cos 2x}=2\sqrt{\cos^2 x}=2|\cos x|$，

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，故 $\cos x\geqslant 0$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\cos x$.

（Ⅱ）$f(x)=\cos 2x-4\lambda\cos x=2(\cos x-\lambda)^2-1-2\lambda^2$，因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，故 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$.

① 当 $\lambda<0$ 时，当且仅当 $\cos x=0$ 时，$f(x)_{\min}=-1$，与已知矛盾；

② 当 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时，当且仅当 $\cos x=\lambda$ 时，$f(x)_{\min}=-1-2\lambda^2$，由条件 $-1-2\lambda^2=-\frac{3}{2}$，得 $\lambda=\frac{1}{2}$；

③ 当 $\lambda>1$ 时，当且仅当 $\cos x=1$ 时，$f(x)_{\min}=1-4\lambda$，由条件 $1-4\lambda=-\frac{3}{2}$，得 $\lambda=\frac{5}{8}$，与 $\lambda>1$ 矛盾.

综上所述，满足题意的 $\lambda=\frac{1}{2}$.

点评　本题具有一定的综合性，要注意观察、揭示题中的隐含条件. 本题对分类整合的思想方法考查相当充分，具有较强的区分和选拔功能.

【例 13】　在平面直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$ 的长为 2，宽为 1，AB、AD 边分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，点 A 与坐标原点重合（图 1）. 将矩形折叠，使点 A 落在线段 DC 上.

（Ⅰ）若折痕所在直线的斜率为 k，试写出折痕所在直线的方程；

（Ⅱ）求折痕的长的最大值.

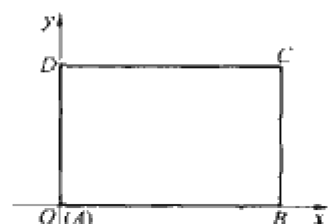


图 1

解析　（Ⅰ）① 当 $k=0$ 时，此时点 A 与点 D 重合，折痕所在的直线方程 $y=\frac{1}{2}$；② 当 $k\neq 0$ 时，设点 A 落在线段 DC 上的点 $A'(x_0,1)$ $(0\leqslant x_0\leqslant 2)$，则直线 OA' 的斜率 $k_{OA'}=\frac{1}{x_0}$，因为折痕所在直线垂直平分 OA'，所以 $k_{OA'}\cdot k=-1$，所以 $\frac{1}{x_0}\cdot k=-1$，所以 $x_0=-k$. 又因为折痕所在的直线与 OA' 的交点坐标（线段 OA' 的中点）为 $M(-\frac{k}{2},\frac{1}{2})$，所以折痕所在的直线方程 $y-\frac{1}{2}=k(x+\frac{k}{2})$，即 $y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}$，由 ①② 得折痕所在的直线方程为

$$y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2},\ -2\leqslant k\leqslant 0$$

（Ⅱ）折痕所在的直线与坐标轴的交点坐标为 $E\left(0,\frac{k^2+1}{2}\right)$、$F\left(-\frac{k^2+1}{2k},0\right)$.

由（Ⅰ）知，$k=-x_0$. 因为 $0\leqslant x_0\leqslant 2$，所以 $-2\leqslant k\leqslant 0$. 设折痕长度为 d，所在直线的倾斜角为 θ.

① 当 $k=0$ 时，此时点 A 与点 D 重合，折痕的长为 2；

② 当 $-2\leqslant k<2$ 时，设 $a=-\frac{k^2+1}{2k}$，$b=\frac{k^2+1}{2}$，$0<a\leqslant|AB|=2$ 时，l 与线段 AB 相交，此时 $-2\leqslant k\leqslant-2+\sqrt{3}$.

当 $a>|AB|=2$ 时，l 与线段 BC 相交，此时 $-2+\sqrt{3}<k<0$；

当 $0<b\leqslant 1$ 时，l 与线段 AD 相交，此时 $-1\leqslant k<0$；

当 $b>1$ 时，l 与线段 DC 相交，此时 $-2\leqslant k<-1$，所以将 k 所在的分为 3 个子区间：

a. 当 $-2\leqslant k<-1$ 时，折痕所在的直线 l 与线段 DC、AB 相交，折痕的长

$$d=\frac{1}{|\sin\theta|}=\frac{1}{\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{|k|}=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}$$

所以

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant d < \sqrt{2}$$

b. 当 $-1 \leqslant k \leqslant -2+\sqrt{3}$ 时，折痕所在的直线 l 与线段 AD、AB 相交，折痕的长

$$d=\sqrt{\left(-\frac{1+k^2}{2k}\right)^2+\left(\frac{1+k^2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{k^4}{4}+\frac{3k^2}{4}+\frac{1}{4k^2}+\frac{3}{4}}$$

令 $g'(x) \geqslant 0$，即 $k^3+\frac{3k}{2}-\frac{1}{2k^3} \geqslant 0$，即 $2k^6+3k^4-1 \leqslant 0$，即 $(k^2+1)^2(k^2-\frac{1}{2}) \leqslant 0$，因为 $-1 \leqslant k \leqslant -2+\sqrt{3}$，所以解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant k \leqslant -2+\sqrt{3}$. 令 $g'(x) \leqslant 0$，解得 $-1 \leqslant k \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$，故当 $-1 \leqslant k \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$g(x)$ 是减函数；当 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant k \leqslant -2+\sqrt{3}$ 时，$g(x)$ 是增函数，因为 $g(-1)=2$，$g(-2+\sqrt{3})=4(8-4\sqrt{3})$，所以 $g(-1)<g(-2+\sqrt{3})$，所以当 $k=-2+\sqrt{3}$ 时

$$g(-2+\sqrt{3})=4(8-4\sqrt{3})$$

$$d=\sqrt{g(-2+\sqrt{3})}=2\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

所以当 $-1 \leqslant k \leqslant -2+\sqrt{3}$ 时，$d \leqslant 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

c. 当 $-2+\sqrt{3}<k<0$ 时，折痕所在的直线 l 与线段 AD、BC 相交，折痕的长

$$d=\frac{2}{|\cos\theta|}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}=2\sqrt{1+k^2}$$

所以

$$2<d<2\sqrt{8-4\sqrt{3}}$$

即

$$2<d<2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

综上所述，当 $k=-2+\sqrt{3}$ 时，折痕的长有最大值 $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

点评　本题主要考查函数的导数、函数的单调性和极值、直线的方程等基础知识，以及分类与整合的数学思想方法，考查思维能力、运算能力、实践能力、创新意识. 虽然解答此题，抓住"对称"这一关键词、寻找对称点即可，但总体难度较大，特别是第(Ⅱ)问先抓极端求斜率范围等都是创新思维的体现.

[redacted]

设 a 为实数，函数 $f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值为 $g(a)$.（Ⅰ）设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求 t 的取值范围，并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $m(t)$；（Ⅱ）求 $g(a)$；（Ⅲ）试求满足 $g(a)=g(\frac{1}{a})$ 的所有实数 a.

解析　（Ⅰ）设 $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，要使有 t 意义，必须 $1+x \geqslant 0$ 且 $1-x \geqslant 0$，即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，所以

$$t^2=2+2\sqrt{1-x^2} \in [2,4],\quad t \geqslant 0 \qquad ①$$

t 的取值范围是 $[\sqrt{2},2]$. 由 ① 得 $\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}t^2-1$，所以

$$m(t)=a(\frac{1}{2}t^2-1)+t=\frac{1}{2}at^2+t-a,\ t \in [\sqrt{2},2]$$

（Ⅱ）由题意知 $g(a)$ 即为函数 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$，$t \in [\sqrt{2},2]$ 的最大值. 注意到直线 $t=-\frac{1}{a}$ 是抛物线 $m(t)=\frac{1}{2}at^2+t-a$ 的对称轴，分以下几种情况讨论：

① 当 $a>0$ 时，函数 $y=m(t)$，$t \in [\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向上的抛物线的一段，由 $t=-\frac{1}{a}<0$ 知

$m(t)$ 在$[\sqrt{2},2]$上单调递增,所以 $g(a)=m(2)=a+2$.

② 当 $a=0$ 时,$m(t)=t$,$t\in[\sqrt{2},2]$,所以 $g(a)=2$.

③ 当 $a<0$ 时,函数 $y=m(t)$,$t\in[\sqrt{2},2]$ 的图象是开口向下的抛物线的一段,若 $t=-\frac{1}{a}\in[0,\sqrt{2}]$,即 $a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $g(a)=m(\sqrt{2})=\sqrt{2}$;若 $t=-\frac{1}{a}\in(\sqrt{2},2]$,即 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$,则

$$g(a)=m\left(-\frac{1}{a}\right)=-a-\frac{1}{2a}$$

若 $t=-\frac{1}{a}\in(2,+\infty)$,即 $-\frac{1}{2}<a<0$,则 $g(a)=m(2)=a+2$.综上有

$$g(a)=\begin{cases}a+2, & a>-\frac{1}{2}\\ -a-\frac{1}{2a}, & -\frac{\sqrt{2}}{2}<a<-\frac{1}{2}\\ \sqrt{2}, & a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

(Ⅲ)① 当 $a<-2$,$\frac{1}{a}>-\frac{1}{2}$ 时,此时 $g(a)=\sqrt{2}$,$g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+2$.由 $2+\frac{1}{a}=\sqrt{2}$,解得 $a=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,与 $a<-2$ 矛盾.

② 当 $-2\leqslant a<-\sqrt{2}$,$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{a}\leqslant-\frac{1}{2}$ 时,此时 $g(a)=\sqrt{2}$,$g(\frac{1}{a})=-\frac{1}{a}-\frac{a}{2}$,$\sqrt{2}=-\frac{1}{a}-\frac{a}{2}$,解得 $a=-\sqrt{2}$,与 $a<-\sqrt{2}$ 矛盾.

③ 当 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{a}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,此时 $g(a)=\sqrt{2}=g\left(\frac{1}{a}\right)$,所以 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

④ 当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant-\frac{1}{2}$ 时,$-2\leqslant\frac{1}{a}<-\sqrt{2}$,此时 $g(a)=-a-\frac{1}{2a}$,$g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}-a-\frac{1}{2a}=\sqrt{2}$,解得 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,与 $a>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 矛盾.

⑤ 当 $-\frac{1}{2}<a<0$,$\frac{1}{a}<-2$ 时,此时 $g(a)=a+2$,$g\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{2}$,由 $a+2=\sqrt{2}$,解得 $a=\sqrt{2}-2$,与 $a>-\frac{1}{2}$ 矛盾.

⑥ 当 $a>0$,$\frac{1}{a}>0$ 时,此时 $g(a)=a+2$,$g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}+2$,由 $a+2=\frac{1}{a}+2$,解得 $a=\pm1$,由 $a>0$ 得 $a=1$.

综上可知,满足 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)$ 的所有实数 a 为 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=1$.

点评 本小题主要考查函数、方程等基本知识,考查分类讨论的数学思想方法和综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力.解答此类问题时容易出现对参数的分类不合理或者分类不全等错误.

[redacted]

(1) 分类的原因

分类讨论问题不仅是高考的重点和热点,也是高考的难点.解决这类题目的关键是找出分类的动机,即为什么分类.分类的对策如何,即怎样分类.一般地说,引起分类的原因大致可归纳为以下几种:

① 由数学概念引起的分类讨论:如绝对值的定义、不等式的定义、二次函数的定义、

直线与平面所成的角、直线的倾斜角、向量的共线等，这类问题应以所定义的概念来进行分类讨论，并且要注意概念所受的限制.

② 由数学运算要求引起的分类讨论：如除法运算中除式不为零、在实数集内偶次方根的被开方数为非负数、对数中真数与底数的要求、指数运算中底数的要求、不等式的两边同乘以一个正数还是负数、三角函数的定义域等.

③ 由数学的性质、定理、公式的限制引起的分类讨论：如有些数学性质、定理、公式在不同的条件下有不同的结论，或者在一定的限制条件下才成立. 例如，指数函数和对数函数的单调性、均值定理、等比数列的求和公式等.

④ 由图形位置的不确定性引起的分类讨论：当已知条件不能确定图形的位置时，在求解或证明的过程中，则需根据可能出现的图形位置进行分类讨论. 此类问题在立体几何和解析几何中较为常见.

⑤ 由参数的变化引起的分类讨论：某些含有参数的问题. 由于参数的取值不同会导致所得结果不同，或者由于对不同的参数值要运用不同的求解或证明方法，如含参数的方程或不等式、直线的点斜式或斜截式方程等，这时需要进行分类讨论.

⑥ 其他：根据实际问题具体分析进行分类讨论. 如排列、组合问题，应用问题等.

(2) 分类的原则

分类的对象是确定的，标准是统一的，不遗漏、不重复、分层次、不越级讨论，即要证明一个命题对于集合 P 成立，可将 P 分成若干个子集 $P_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，且满足 $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$（其中 $P_i \cap P_j = \varnothing, i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n$），然后分别证明命题对 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 都成立，则命题对 P 成立.

(3) 分类整合的一般步骤

① 明确讨论对象，确定对象的范围；② 确定统一的分类标准，进行合理分类，做到不重不漏；③ 逐段逐类讨论，获得阶段性结果；④ 归纳总结，得出结论.

(4) 分类整合的类型

① 问题中的变量或含有需讨论的参数的，要进行分类讨论；② 问题中的条件是分类给出的；③ 解题过程不能统一叙述，必须先分类后整合的；④ 有关几何问题中，几何元素的形状、位置的变化需要分类讨论的.

分类与整合既是一种逻辑方法，又是一种重要的数学思想，是一种数学解题策略，高考对分类与整合思想考查的一个重要目的是检测学生的理性思维. 用分类与整合的思想落实局部与局部之间的相互融合. 但对于何时需要分类讨论，则要视具体问题而定，并无死的规定，但可以在解题时不断地总结经验.

如果对于某个研究对象，若不对其分类就不能说清楚，则应分类讨论，另外，数学中的一些结论、公式、方法对于一般情形是正确的，但对某些特殊情形或说较为隐蔽的"个别"情况未必成立，这也是造成分类讨论的原因. 因此在解题时，应注意挖掘这些个别情形进行分类讨论. 常见的"个别"情形略举以下几例：

(1)"方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实数解"转化为"$\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$"时忽略了个别情形：当 $a = 0$ 时，方程有解不能转化为 $\Delta \geqslant 0$.

(2) 等比数列$\{a_1q^{n-1}\}$的前 n 项和公式$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$中有个别情形:当 $q = 1$ 时,公式不再成立,而是 $S_n = na_1$.

(3) 设直线方程时,一般可设直线的斜率为 k,但有个别情形:当直线与 x 轴垂直时,直线无斜率,应另行考虑.

(4) 若直线在两轴上的截距相等,常常设直线方程为$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1$,但有个别情形:当 $a = 0$ 时,再不能如此设,应另行考虑.

[redacted]

(1) 分类与整合的思想有"分"有"合",先"分"后"合",不仅是分类与整合思想解决数学问题的主要过程,也是分类与整合思想的本质属性.

(2) 分类讨论思想具有明显的逻辑特点,解决这一类问题需有一定的分析能力和分类技巧.但在重视分类讨论思想应用的基础上,应防止见参数就讨论,能整体解决的就不必分类讨论,树立辩证的解题观点使分类讨论用得更为合理.如何简化和避免分类讨论?常用策略:直接回避,变更主元,合理运算,数形结合等.

（四）化归与转化思想

[redacted]

所谓转化与化归思想，就是在研究和解决有关数学问题时采用某种手段，将问题通过变换使之转化归结为在已有知识范围内可以解决的一种方法．一般总是将复杂的问题通过变换转化为简单的问题，将较难的问题通过变换转化为容易求解的问题，将未解决的问题变换转化为已解决的问题．可以说数学解题就是转化问题，每一个数学问题无不是在不断地转化中获得解决的．即使是数形结合思想、函数方程思想、分类整合思想也都是转化与化归思想的表现形式．

（1）转化包括等价转化和非等价转化

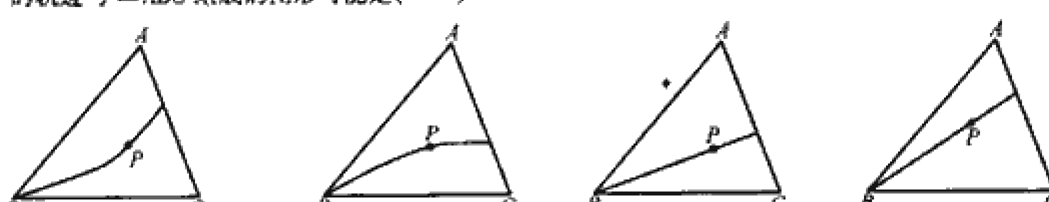
等价转化要求在转化过程中的前因与后果既是充分的，又是必要的，这样的转化能保证转化的结果仍为原问题所需要的结果；不等价转化的过程仅是充分的或仅是必要的，它不能保证转化后的结果就是原问题所需要的结果，还需要其他辅助手段帮助我们得到准确结果．即使是这样，非等价转化也能给我们带来思维的启迪，找到解决问题的突破口，是破解难点的重要思维方式之一．

（2）转化与化归的原则

将不熟悉和较难的问题转化为熟知的易解的或已经解决的问题；将抽象的问题转化为具体的直观的问题；将复杂的问题转化为简单的问题；将一般性的问题转化为直观的特殊的问题；将实际问题转化为数学问题，使问题便于解决．

[redacted]

【例 1】　若三棱锥 $A-BCD$ 侧面 ABC 内一动点 P 到底面 BCD 的距离与到棱 AB 的距离相等，则动点 P 的轨迹与 $\triangle ABC$ 组成的图形可能是（　　）



A.　　B.　　C.　　D.

解析　见“（二）数形结合思想”中的例17，利用普遍性与特殊性的关系转化，首先考虑特殊图形，然后考虑一般情形．

【例 2】　如图 1，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是侧面 BB_1C_1C 内一动点，若 P 到直线 BC 与直线 C_1D_1 的距离相等，则动点 P 的轨迹所在的曲线是（　　）

A. 直线　　B. 圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

点评 本小题是以空间几何的点线距为载体，考查圆锥曲线的定义。将 P 到直线 BC 与直线 C_1D_1 的距离相等，转化为 P 到 C_1 与 BC 的距离相等。因 C_1、BC 共面，由圆锥曲线的定义求解，故选 D.

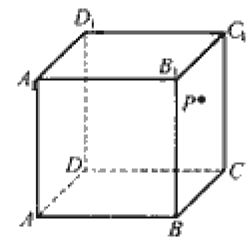


图 1

解决此类问题，关键要善于利用空间几何性质将问题转化到平面几何中，再去利用平面几何的相关性质就比较容易解决.

【例 3】 如图 2，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=4$，$AD=3$，$AA_1=2$，E、F 分别是线段 AB、BC 上的点，且 $EB=FB=1$.

（Ⅰ）求二面角 $C-DE-C_1$ 的正切值；

（Ⅱ）求直线 EC_1 与 FD_1 所成角的余弦值.

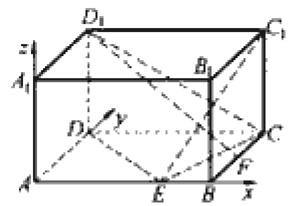


图 2

解析 （Ⅰ）以 A 为原点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AA_1}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正向建立空间直角坐标系，则有 $D(0,3,0)$、$D_1(0,3,2)$、$E(3,0,0)$、$F(4,1,0)$、$C_1(4,3,2)$.

于是，$\overrightarrow{DE}=(3,-3,0)$，$\overrightarrow{EC_1}=(1,3,2)$，$\overrightarrow{FD_1}=(-4,2,2)$.

设向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 与平面 C_1DE 垂直，则有

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DE}\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EC_1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-3y=0\\ x+3y+2z=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}z$$

所以 $\boldsymbol{n}=\left(-\frac{z}{2},-\frac{z}{2},z\right)=\frac{z}{2}(-1,-1,2)$，其中 $z>0$. 取 $\boldsymbol{n}_0=(-1,-1,2)$，则 $\boldsymbol{n}_0$ 是一个与平面 C_1DE 垂直的向量. 因为向量 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$ 与平面 CDE 垂直，所以 $\boldsymbol{n}_0$ 与 AA_1 所成的角 θ 为二面角 $C-DE-C_1$ 的平面角. 因为

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_0\cdot\overrightarrow{AA_1}}{|\boldsymbol{n}_0|\times|\overrightarrow{AA_1}|}=\frac{-1\times0-1\times0+2\times2}{\sqrt{1+1+4}\times\sqrt{0+0+4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

所以

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

（Ⅱ）设 EC_1 与 FD_1 所成角为 β，则

$$\cos\beta=\frac{\overrightarrow{EC_1}\cdot\overrightarrow{FD_1}}{|\overrightarrow{EC_1}||\overrightarrow{FD_1}|}=\frac{1\times(-4)+3\times2+2\times2}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\times\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$$

点评 通过建立空间直角坐标系，把空间问题转化为数值计算问题，其中第（Ⅰ）问把二面角求解转化为求其两个半平面的法向量的夹角问题，第（Ⅱ）问把求两条异面直线所成角的余弦值问题转化为直线的两个方向向量的夹角问题.

【例 4】 若动点 (x,y) 在曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 上变化，则 x^2+2y 的最大值为（ ）

A. $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4, & 0<b<4\\ 2b, & b\geqslant4\end{cases}$ B. $\begin{cases}\frac{b^2}{4}+4, & 0<b<2\\ 2b, & b\geqslant2\end{cases}$ C. $\frac{b^2}{4}+4$ D. $2b$

解析 此题可通过换元法建立目标函数，从而转化为含参的二次函数在闭区间上的最值问题，故选 A.

【例 5】 设随机变量 ξ 的概率分布为 $P(\xi=k)=\frac{a}{5^k}$，a 为常数，$k=1,2,\cdots$，则 $a=$ ______.

解析 利用概率分布的性质将其转化为无穷递缩等比数列和为 1，解所得方程得 $a=4$.

【例 6】 某突发事件，在不采取任何预防措施的情况下发生的概率为 0.3，一旦发生，将造成 400 万元的损失. 现有甲、乙两种相互独立的预防措施可供采用. 单独采用甲、乙预防措施所需的费用分别为 45 万元和 30 万元，采用相应预防措施后此突发事件不发生的概率分别为 0.9 和 0.85. 若预防方案允许

甲、乙两种预防措施单独采用、联合采用或不采用，请确定预防方案使总费用最少.

（总费用 = 采取预防措施的费用 + 发生突发事件损失的期望值.）

解析 ① 不采取预防措施时，总费用即损失期望值为 $400\times0.3=120$（万元）；

② 若单独采取措施甲，则预防措施费用为45万元，发生突发事件的概率为 $1-0.9=0.1$，损失期望值为 $400\times0.1=40$（万元），所以总费用为 $45+40=85$（万元）；

③ 若单独采取预防措施乙，则预防措施费用为30万元，发生突发事件的概率为 $1-0.85=0.15$，损失期望值为 $400\times0.15=60$（万元），所以总费用为 $30+60=90$（万元）；

④ 若联合采取甲、乙两种预防措施，则预防措施费用为 $45+30=75$（万元），发生突发事件的概率为 $(1-0.9)(1-0.85)=0.015$，损失期望值为 $400\times0.015=6$（万元），所以总费用为 $75+6=81$（万元）.

综合①、②、③、④，比较其总费用可知，应选择联合采取甲、乙两种预防措施，可使总费用最少.

点评 本题考查了实际问题和数学模型之间的转化能力及分类讨论的数学思想.

【例7】 如图3，B 地在 A 地的正东方向4 km处，C 地在 B 地的北偏东30°方向2 km处，河流的沿岸 PQ（曲线）上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远2 km.现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头，向 B、C 两地转运货物.经测算，从 M 到 B、M 到 C 修建公路的费用分别是 a 万元/km、$2a$ 万元/km，那么修建这两条公路的总费用最低是（　　）

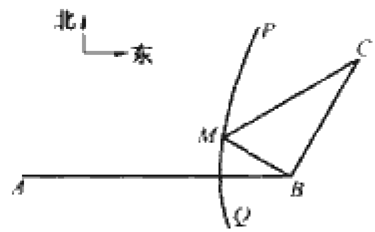


图3

A.$(2\sqrt{7}-2)a$ 万元　　B.$5a$ 万元

C.$(2\sqrt{7}+1)a$ 万元　　D.$(2\sqrt{3}+3)a$ 万元

点评 首先将实际问题转化为解析几何问题，然后利用双曲线的标准方程及第二定义转化为所熟悉的平面几何问题，故选B.

转化与化归思想在培养数学思维品质方面有十分重要的作用，特别在近几年的全国高考试题或各地的高考模拟试题中，各分支知识之间相互转化的试题出现的数量较大，常常将函数与不等式、向量与三角、向量与几何、函数与数列、导数与函数作为相互转化的素材，融向量、解析几何、函数、方程、不等式等知识于一体，有效地考查学生分析问题和解决问题的能力.像"给定抛物线 $C:y^2=4x$，F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.（Ⅰ）设 l 的斜率为1，求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角的大小；（Ⅱ）设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$，若 $\lambda\in[4,9]$，求 l 在 y 轴上截距的变化范围."就是这样一道体现转化与化归思想考查同学们综合素质的好题.

【例8】 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n^2+n}\right)a_n+\dfrac{1}{2^n}(n\geqslant1)$.

（Ⅰ）用数学归纳法证明：$a_n\geqslant2(n\geqslant2)$；

（Ⅱ）已知不等式 $\ln(1+x)<x$ 对 $x>0$ 成立，证明：$a_n<e^2(n\geqslant1)$，其中无理数 $e=2.718\,28\cdots$.

证明 （Ⅰ）① 当 $n=2$ 时，$a_2=2\geqslant2$，不等式成立.

② 假设当 $n=k(k\geqslant2)$ 时不等式成立，即 $a_k\geqslant2(k\geqslant2)$，那么

$$a_{k+1}=\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)a_k+\frac{1}{2^k}\geqslant2$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时不等式成立.根据①、②可知：$a_k\geqslant2$ 对所有 $n\geqslant2$ 成立.

（Ⅱ）**证法1** 由递推公式及（Ⅰ）的结论有

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2+n}\right)a_n+\frac{1}{2^n}\leqslant\left(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}\right)a_n,\ n\geqslant1$$

两边取对数并利用已知不等式得

$$\ln a_{n+1}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}\right)+\ln a_n\leqslant\ln a_n+\frac{1}{n^2+n}+\frac{1}{2^n}$$

故
$$\ln a_{n+1}-\ln a_n\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n},n\geqslant 1$$
上式从 1 到 $n-1$ 求和可得

$$\ln a_n-\ln a_1\leqslant\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$
$$1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{n}+1-\frac{1}{2^n}<2$$

即 $\ln a_n<2$，故 $a_n<e^2(n\geqslant 1)$.

证法 2 由数学归纳法易证 $2^n>n(n-1)$ 对 $n\geqslant 2$ 成立，故
$$a_{n+1}=(1+\frac{1}{n^2+n})a_n+\frac{1}{2^n}<(1+\frac{1}{n(n-1)})a_n+\frac{1}{n(n-1)},n\geqslant 2$$
令 $b_n=a_n+1(n\geqslant 2)$，则
$$b_{n+1}\leqslant(1+\frac{1}{n(n-1)})b_n,n\geqslant 2$$
取对数并利用已知不等式得
$$\ln b_{n+1}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n(n-1)}\right)+\ln b_n\leqslant\ln b_n+\frac{1}{n(n-1)},n\geqslant 2$$
上式从 2 到 n 求和得
$$\ln b_{n+1}-\ln b_2\leqslant\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}<1$$
因 $b_2=a_2+1=3$，故
$$\ln b_{n+1}<1+\ln 3,\quad b_{n+1}<e^{1+\ln 3}=3e,n\geqslant 2$$
故 $a_{n+1}<3e-1<e^2,n\geqslant 2$，又显然 $a_1<e^2,a_2<e^2$，故 $a_n<e^2$ 对一切 $n\geqslant 1$ 成立.

证法 3 先证 $\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{n^2+n}\cdot a_n$，当 $n=1$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$ 成立，因当 $n\geqslant 2$ 时 $a_n\geqslant 2$，所以要证 $\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{n^2+n}\cdot a_n$，只须证 $\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant\frac{1}{n^2+n}$，即证 $n^2+n\leqslant 2n+1$ 成立，然后用数学归纳法加以证明，后面的过程同证法 2.

点评 此题是数学归纳法、数列、不等式的综合，涉及对数函数、放缩法、数列求和等知识，较好地凸现了在数学学科各知识点的交汇处命题的基本思想，考查了化归与转化等数学思想方法，具有较强的综合性.

例题链接 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}+\frac{2}{3},n=1,2,3,\cdots$.

（Ⅰ）求首项 a_1 与通项 a_n；

（Ⅱ）设 $T_n=\frac{2^n}{S_n},n=1,2,3,\cdots$. 证明：$\sum_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$.

解析 （Ⅰ）【基本思路】由
$$S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times 2^{n+1}+\frac{2}{3},n=1,2,3,\cdots \qquad ①$$
得
$$a_1=S_1=\frac{4}{3}a_1-\frac{1}{3}\times 4+\frac{2}{3}$$
所以 $a_1=2$. 再由 ① 有
$$S_{n-1}=\frac{4}{3}a_{n-1}-\frac{1}{3}\times 2n+\frac{2}{3},n=2,3,4,\cdots \qquad ②$$
将 ① 和 ② 相减得

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{4}{3}(a_n - a_{n-1}) - \frac{1}{3}\times(2^{n+1} - 2^n) \quad n = 2,3,\cdots \qquad ③$$

整理得
$$a_n + 2^n = 4(a_{n-1} + 2^{n-1}), n = 2,3,\cdots$$

因而数列$\{a_n + 2^n\}$是首项为$a_1 + 2 = 4$,公比为4的等比数列,即$a_n + 2^n = 4\times 4^{n-1} = 4^n, n = 1,2,3,\cdots$,因而$a_n = 4^n - 2^n, n = 1,2,3,\cdots$.

【另类思维】

解法1　由上面基本思路中式③,得$a_n - 4a_{n-1} = 2^n$.两边除以2^n,得$\frac{a_n}{2^n} - 2\times\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 1$,有$\frac{a_n}{2^n} + 1 = 2\times\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + 2$,即$\frac{a_n}{2^n} + 1 = 2(\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + 1)$.又因为$\frac{a_1}{2} + 1 = 2$,所以数列$\left\{\frac{a_n}{2^n} + 1\right\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$\frac{a_n}{2^n} + 1 = 2^n$,即$a_n = (2^n)^2 - 2^n = 4^n - 2^n$,而当$n = 1$时,$a_1 = 2$也满足上式,所以数列$\{a_n\}$的通项$a_n = 4^n - 2^n$.

解法2　由上面基本思路中式③,得$a_n - 4a_{n-1} = 2^n$.两边除以4^n,得$\frac{a_n}{4^n} - \frac{a_{n-1}}{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)$,即

$$\frac{a_n}{4^n} - \frac{a_{n-1}}{4^{n-1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

所以当$n \geqslant 2$时
$$\frac{a_n}{4^n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{a_{n-1}}{4^{n-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

所以数列$\left\{\frac{a_n}{4^n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$是常数数列.又$\frac{a_1}{4} + \frac{1}{2} = 1$,所以

$$\frac{a_n}{4^n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1, \quad a_n = 4^n - 2^n$$

而当$n = 1$时,$a_1 = 2$也满足上式,所以数列$\{a_n\}$的通项$a_n = 4^n - 2^n$.

解法3　由已知$S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{2}{3}$,得$a_1 = S_1 = \frac{4}{3}a_1 - \frac{2^{1+1}}{3} + \frac{2}{3}$,所以$a_1 = S_1 = 2$,显然当$n > 1$时,有

$$S_n = \frac{4}{3}(S_n - S_{n-1}) - \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{2}{3}$$

即
$$S_n = 4S_{n-1} + 2^{n+1} - 2$$

不妨设
$$S_n + x2^n + y = 4(S_{n-1} + x2^{n-1} + y)$$

则$\begin{cases} -2x + 4x = 4 \\ 3y = -2 \end{cases}$,即$\begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$.所以$\left\{S_n + 2\cdot 2^n - \frac{2}{3}\right\}$是首项为$\frac{16}{3}$,公比为4的等比数列,所以

$$S_n = \frac{4}{3}\cdot 4^n - 2\cdot 2^n + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2^{n+1} - 1)(2^n - 1)$$

所以当$n > 1$时,$a_n = S_n - S_{n-1} = 4^n - 2^n$.又当$n = 1$时适合上式,所以$a_n = 4^n - 2^n, n = 1,2,3,\cdots$.

(Ⅱ)【基本思路】

$$S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3}\times 2^{n+1} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}(4^n - 2^n) - \frac{1}{3}\times 2^{n+1} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(2^{n+1} - 1)(2^n - 1)$$

$$T_n = \frac{2^n}{S_n} = \frac{3}{2}\times\frac{2^n}{(2^{n+1} - 1)(2^n - 1)} = \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}\right)$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}\right) < \frac{3}{2}$$

【另类思维】

先归纳后猜想再证明.当$n = 1$时,$T_1 = \frac{2^1}{a_1} = 1 < \frac{3}{2}$;当$n = 2$时,$T_1 + T_2 = 1 + \frac{2^2}{4^2 - 2} = \frac{9}{7} <$

$\frac{3}{2}$.猜想当 $n \geqslant 3$ 时的结论:$\sum_{i=1}^{n} T_i \leqslant \frac{3}{2} - \frac{3}{2^{n+2}-2}$.下面用数学归纳法证明:

① 当 $n = 3$ 时,$T_1 + T_2 + T_3 = \frac{9}{7} + \frac{4}{35} = \frac{7}{5}$,$\frac{3}{2} - \frac{3}{2^{3+2}-2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{30} = \frac{7}{5}$.由于 $\frac{7}{5} \leqslant \frac{7}{5}$,所以当 $n = 3$ 时猜想成立.

② 假设当 $n = k(n \geqslant 3)$ 时猜想成立,即 $\sum_{i=1}^{k} T_i \leqslant \frac{3}{2} - \frac{3}{2^{k+2}-2}$,则当 $n = k+1$ 时

$$\sum_{i=1}^{k+1} T_i = \sum_{i=1}^{k} T_i + T_{k+1} \leqslant \frac{3}{2} - \frac{3}{2^{k+2}-2} + \frac{2^{k+1}}{S_{k+1}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2^{k+2}-2} + \frac{3 \times 2^{k+1}}{4(4^{k+1} - 2^{k+1}) - 2^{k+2} + 2} =$$

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{2^{k+2}-2} + \frac{3 \times 2^{k+1}}{4^{k+2} - 3 \times 2^{k+2} + 2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2^{k+2}-2} + \frac{\frac{3}{2} \times 2^{k+2}}{(2^{k+2}-1)(2^{k+2}-2)} =$$

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{2^{k+2}-2} + \frac{\frac{3}{2} \times 2^{k+2}}{2^{k+2}-2} - \frac{\frac{3}{2} \times 2^{k+2}}{2^{k+2}-1} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2}[(2^{k+2}-1)+1]}{2^{k+2}-1} =$$

$$\frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{2^{k+2}-1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2^{(k+1)+2}-2}$$

故当 $n = k+1$ 时猜想也成立.由 ①、② 知当 $n \geqslant 3$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n} T_i \leqslant \frac{3}{2} - \frac{3}{2^{n+2}-2}$$

由于 $\frac{3}{2^{n+2}-2} > 0$,所以对任何正整数 n,都有 $\sum_{i=1}^{n} T_i < \frac{3}{2}$ 成立.

点评 本题是求有关递推数列通项的问题,解法 1、解法 2、解法 3 的关键在转化;(Ⅱ)的"另类思维"也是先归纳猜想再证明.

注 数列是高中数学的重要内容之一,蕴含着丰富的数学思想方法,尤其是递推数列问题极具逻辑性,是考查逻辑推理、化归转化能力的良好素材之一,也是新高考的热点题型.递推数列有三种基本解题策略:(1) 化归为等差或等比数列求解;(2) 利用叠加或叠乘进行转化;(3) 利用归纳法求解(结合数学有关知识,挖掘隐含条件、归纳猜想).

特别强调一下:对由递推关系式所确定的数列通项公式问题,只须注意"转化与化归"数学思想方法的灵活使用,将其转化(变形、构造)成等差或等比数列问题,即可化陌生为熟悉,顺利求解.处理的基本策略是:

(1) 已知相邻两项的递推关系 $a_{n+1} = f(a_n)$ 求数列的通项,常根据递推关系进行逐次迭代,且在迭代过程中始终保留原有形式,以有利于发现规律.

(2) 对形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 或 $a_{n+1} = pa_n + q$(p,q 为非零常数)的递推数列,可先求出差项数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$,再通过此数列求和即得 $\{a_n\}$ 的通项公式,值得一提的是,此模型问题是近几年高考常考常新的热门话题.

(3) 对已知递推关系 $S_n = f(a_n)$ 求通项问题,基本思路为由 $a_n = S_n - S_{n-1}(n \geqslant 2)$ 消掉 S_n,得 $a_n = g(a_{n-1})$,然后再依此递推,求得 a_n.

(4) 根据所给递推式的结构,化归为奇、偶数项数列讨论.

【例9】 如图4,在平面斜坐标系 xOy 中,$\angle xOy = 60°$,平面上任一点 P 关于斜坐标系的斜坐标是这样定义的:若 $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$(其中 e_1、e_2 分别为与 x 轴、y 轴同方向的单位向量),则点 P 的斜坐标为 (x, y).

(Ⅰ) 若点 P 的斜坐标为 $(2, -2)$,求 P 到 O 的距离 $|OP|$;

(Ⅱ) 求以 O 为圆心,1 为半径的圆在斜坐标系 xOy 中的方程.

解析 （Ⅰ）因为点 P 的斜坐标为 $(2,-2)$，所以 $\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，所以 $|\overrightarrow{OP}|^2=(2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)^2=8-8\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=8-8\times\cos 60^\circ=4$，所以 $|\overrightarrow{OP}|=2$，即 $|OP|=2$.

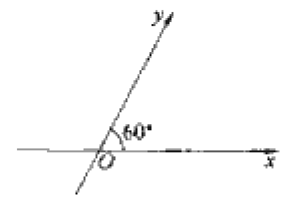


图 4

（Ⅱ）设圆上动点 M 的斜坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，由题设有 $|OM|=1$，所以 $|\overrightarrow{OM}|=1$.

所以 $(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)=1$，所以 $x^2+y^2+2xy\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1$，所以 $x^2+y^2+xy=1$，故所求方程为 $x^2+y^2+xy=1$.

点评 此题考查了向量的运算、坐标的定义和解析几何中轨迹方程的求法，题目较新颖，从不同的角度考查了基本知识的应用，体现了在"知识的交汇点"命题的高考趋向．同时也考查了考生的阅读理解能力、知识的迁移和化归能力．关键要弄清斜坐标系中的坐标基底的定义，并能将向量运算与实数运算有机结合．

【例 10】 已知 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\sin 2\alpha-2\cos\alpha)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=\left(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\right)\boldsymbol{a}+(\cos\alpha)\boldsymbol{b}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，若 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$.

（Ⅰ）求 $\cos\alpha$ 的值；（Ⅱ）已知 $\cos(\alpha+x)=\frac{4}{5}$，$-\pi<x<-\frac{\pi}{4}$，求 $\sin x$ 的值．

解析 （Ⅰ）由已知得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2=4$，$|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{b}^2=1$，又 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}$，所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=0$，即

$$[\boldsymbol{a}+(\sin 2\alpha-2\cos\alpha)\boldsymbol{b}]\cdot[(\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha)\boldsymbol{a}+(\cos\alpha)\boldsymbol{b}]=0$$

所以

$$\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cdot\boldsymbol{a}^2+(\cos\alpha)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}(\sin^2 2\alpha)(\sin 2\alpha-2\cos\alpha)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+$$
$$\cos\alpha\cdot(\sin 2\alpha-2\cos\alpha)\boldsymbol{b}^2=0$$

所以
$$\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$$

因为
$$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

所以
$$\sin 2\alpha+2\cos\alpha\neq 0,\quad \sin 2\alpha-\cos\alpha=0$$

由
$$\sin 2\alpha-\cos\alpha=0$$

得
$$2\sin\alpha\cos\alpha=\cos\alpha$$

又 $\cos\alpha\neq 0$，所以 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$．令 $\beta=\frac{\pi}{6}+x$，则 $x=\beta-\frac{\pi}{6}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$.

因为 $-\pi<x<-\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{5\pi}{6}<\frac{\pi}{6}+x<-\frac{\pi}{12}$，即 $-\frac{5\pi}{6}<\beta<-\frac{\pi}{12}$，因为 $\cos\beta=\frac{4}{5}>0$，所以 $\sin\beta=-\frac{3}{5}$，所以

$$\sin x=\sin(\beta-\frac{\pi}{6})=\sin\beta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\beta\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$$

点评 本题的特点是将平面向量与三角函数相结合，体现了知识的交汇性．从考查的知识内容来看，考查了向量数量积的运算及性质、向量垂直的充要条件、两角差的正弦公式、二倍角的正弦公式及同角三角函数公式；从考查的数学思想方法来看，考查了函数与方程的思想，化归与转化的思想及换元法．本题第（Ⅰ）问的关键是利用向量数量积的运算及向量模的性质、向量垂直的充要条件，将已知转化为关于 $\cos\alpha$ 的关系式，从而求出 $\cos\alpha$ 的值，体现了方程的思想．第（Ⅱ）问通过分析角的差异，类比例 2 的方法进行求解，仍集中体现了化归与转化的思想．解决此类问题的关键是合理转化，先将向量表示转化为

关于三角函数的等式，把问题转化为常规的三角函数求值问题，然后再按常规思路求解.

已知$\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$，$\tan\alpha + \cot\alpha = -\frac{10}{3}$.

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 的值；

（Ⅱ）求$\dfrac{5\sin^2\frac{\alpha}{2} + 8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 11\cos^2\frac{\alpha}{2} - 8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$的值.

解析 （Ⅰ）由 $\tan\alpha + \cot\alpha = -\frac{10}{3}$，得 $3\tan^2\alpha + 10\tan\alpha + 3 = 0$，即 $\tan\alpha = -3$ 或 $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$，又 $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$，所以 $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$ 为所求.

（Ⅱ）$\dfrac{5\sin^2\frac{\alpha}{2} + 8\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 11\cos^2\frac{\alpha}{2} - 8}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{5\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2} + 4\sin\alpha + 11\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2} - 8}{-\sqrt{2}\cos\alpha} =$

$$\frac{5 - 5\cos\alpha + 8\sin\alpha + 11 + 11\cos\alpha - 16}{-2\sqrt{2}\cos\alpha} = \frac{8\sin\alpha + 6\cos\alpha}{-2\sqrt{2}\cos\alpha} = \frac{8\tan\alpha + 6}{-2\sqrt{2}} = -\frac{5\sqrt{2}}{6}$$

点评 本题主要考查三角函数的化简和求值，充分体现了化归与转化的思想：异名函数化同名函数，分式方程化整式方程，三角式化为 $\tan\alpha$ 的表达式，三角公式高次降为低次等. 同时渗透有方程思想（求 $\tan\alpha$ 的值）.

（1）转化与化归的基本类型

① 正与反、一般与特殊的转化，即正难则反，特殊化原则.

② 常量与变量的转化，即在处理多元问题时，选取其中的常量（或参数）当"主元"，其他的变量看作常量.

③ 数与形的转化，即利用对数量关系的讨论来研究图形性质，也可利用图形直观提供思路，直接地反映函数或方程中的变量之间的关系.

④ 数学各分支之间的转化，如利用向量方法解立体几何问题，用解析几何方法处理平面几何、代数、三角问题等.

⑤ 相等与不等之间的转化，如利用均值不等式、判别式等.

⑥ 实际问题与数学模型的转化.

除此之外，还有主与次、整与零、一般与特殊、动与静、陌生与熟悉等方面的转化.

（2）常见的转化方法

转化与化归思想方法用在研究、解释数学问题时思维受阻或寻求简单方法或从一种状况转化为另一种情形，也就是转化到另一种情境，使问题得到解释，这种转化是解决问题的有效策略，同时也是成功的思维方式. 那么选择哪些途径可以实现这个转化过程呢？常见的转化方法有：

① 直接转化法：把原问题直接转化为基本定理、基本公式或基本图形问题.

② 换元法：运用"换元"把超越式转化为有理式或使整式降幂等，把较复杂的函数、方

程、不等式问题转化为易于解决的基本问题.

③ 数形结合法:研究原问题中数量关系(解析式)与空间形式(图形)关系,通过互相变换,获得转化途径.

④ 参数法:引进参数,使原问题的变换具有灵活性,易于转化.

⑤ 构造法:"构造"一个合适的数学模型,把问题变为易于解决的问题.

⑥ 坐标法:以坐标系为工具,用计算方法解决几何问题,是转化方法的一个重要途径.

⑦ 类比法:运用类比推理,猜测问题的结论,易于确定转化途径.

⑧ 特殊化方法:把原问题的形式向特殊化形式转化,并证明特殊化后的结论适合原问题.

⑨ 一般化方法:若原问题是某个一般化形式问题的特殊形式且又较难解决,可将问题通过一般化的途径进行转化.

⑩ 等价问题法:把原问题转化为一个易于解决的等价命题,达到转化目的.

⑪ 加强命题法:在证明不等式时,原命题难以得证,往往把命题的结论加强,即把命题的结论加强为原命题的充分条件,反而能将原命题转化为一个较易证明的命题(加强命题法是非等价转化方法).

⑫ 补集法:如果正面解决原问题有困难,可把原问题结果看作集合 A,而把包含该问题的整体问题的结果类比为全集 U,通过解决全集 U 及补集 $\complement_U A$ 获得原问题的解决.

值得注意的是,以上所列的一些方法是相互交叉的,不能截然分割.

化归与转化的思想是数学学科有别于其他学科而特有的一种数学思想方法,其核心是把生题转化为熟题.

我们知道,解题的过程就是一个缩小已知与求解的差异的过程,是求解系统趋近于目标系统的过程,是不知向熟知转化的过程,所以每解一道题,无论是难还是易,都离不开化归(例如:对于空间问题,常转化为平面问题;对于多元问题,常转化为少元问题;对于高次函数,高次方程问题,常转化为低次问题,特别是熟悉的一次,二次问题;对于复杂的式子,通过换元转化为简单的式子等).

高考中,对化归思想的考查,总是结合对演绎证明、运算推理、模式构建等理性思维能力的考查进行,因此可以这么说高考中的每一道试题,都在考查化归意识和转化能力.

（五）特殊与一般思想

[redacted]

由特殊到一般，再由一般到特殊反复认识的过程是人们认识世界的基本过程之一，对数学而言，这种由特殊到一般，再由一般到特殊的研究数学问题的基本认识过程，就是数学研究的特殊与一般的思想.

由于特殊与一般思想的运用水平，能反映考生的数学素养和一般能力，所以考查特殊与一般的思想在高考中占有重要的位置.在高考中，会有意设计一些能集中体现特殊与一般的思想的试题，常见类型：

(1)"归纳 → 猜想"型；

(2)"类比 → 猜想"型(例如：平面 → 立体)；

(3)"抽象函数"型；

(4)"定点、定值"型；

(5)"特殊化方法解选择题"型.

[redacted]

【例1】 设集合 $A=\{x\mid |4x-1|\geq 9, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x}{x+3}\geq 0, x\in\mathbf{R}\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(-3,-2]$　　　　B. $(-3,-2]\cup\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$

C. $(-\infty,-3]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$　　　　D. $(-\infty,-3)\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

解析　本题可以直接通过解不等式得到答案，也可以通过特殊化方法和估算求解，首先由集合 B 可知，$x\neq -3$，因而排除 C，再由 $x=-2\notin B$，又可排除 A、B，故选 D.

【例2】 设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集，且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是（　　）

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　　　　B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$　　　　D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$

解析　本题是一道抽象集合问题，直接求解有困难，但可以用特殊化策略解决问题. 可以构造特例，例如设 $S_1=\{1,2\}$，$S_2=\{2,3\}$，$S_3=\{2,4\}$，则 $I=\{1,2,3,4\}$，$\complement_I S_1=\{3,4\}$，$\complement_I S_2=\{1,4\}$，$\complement_I S_3=\{1,3\}$，经简单的计算，就可以排除 A、B、D. 而由选择题的四选一的要求，故选 C.

【例3】 设函数 $f(x)=\sin 3x+|\sin 3x|$，则 $f(x)$ 为（　　）

A. 周期函数，最小正周期为 $\dfrac{\pi}{3}$　　　　B. 周期函数，最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{3}$

C. 周期函数，最小正周期为 2π　　　　D. 非周期函数

解析　本题考查三角函数的周期，首先应将 $f(x)$ 化简，尽可能地化成形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$\omega\neq$

0) 然后再判断.

$$f(x)=\begin{cases}2\sin 3x, & \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi \\ 0, & \frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi < x < \frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\end{cases}, k\in \mathbf{Z}$$

因此 $f(x)$ 为周期函数,且最小正周期为$\frac{2\pi}{3}$.故选 B.

本题也可利用特殊化思想,根据三角函数周期定义进行检验,将 A、B、C、D 中的周期都代入,验证后,可得答案 B.

【例 4】　如图 1,在体积为 1 的三棱锥 $A-BCD$ 侧棱 AB、AC、AD 上分别取点 E、F、G,使 $AE:EB=AF:FC=AG:GD=2:1$,记 O 为三平面 BCD、CDE、DBF 的交点,则三棱锥 $O-BCD$ 的体积等于(　　)

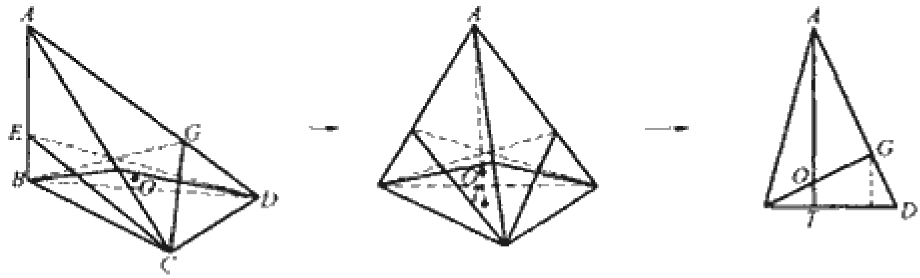


图 1

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{7}$　　D. $\frac{1}{4}$

解析　此题对空间想象力和思维的深刻度及灵活性方面作了较好的考查.解法多样,体现了特殊与一般的数学思想和空间问题平面化的处理方法,转化如图所示,故选 C.

【例 5】　如图 2,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=BC=\sqrt{2}$,$BB_1=2$,$\angle ABC=90°$,E、F 分别为 AA_1、C_1B_1 的中点,沿棱柱的表面从 E 到 F 两点的最短路径的长度为________.

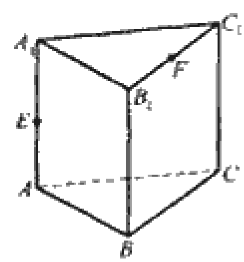


图 2

解析　分别沿 BB_1、A_1C_1 和 A_1B_1 将 E、F 展开到同一平面内,则易得

$$EF=\sqrt{\frac{9}{2}+1}=\frac{\sqrt{22}}{2},\quad EF=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

或

$$EF=\sqrt{2+\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4}}=\frac{\sqrt{14+4\sqrt{2}}}{2}$$

比较可得,最小值为$\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

点评　将平面图形空间化也是立体几何的另一种问题形式,在立体几何中,许多问题都是空间图形进行平面化,努力将一个个空间图形,通过所学的几何知识,转化成平面图形,最后使用平面几何的若干知识解决,而本题却反其道而行之,所以在做法上就不能和上述的方法相同,但在本质上有许多相通之处,在这类题目中,尽量找出两者图形过程中的联系之处,哪些量变,哪些量没有变,然后解决起来,就会顺手得多.

【例 6】　已知 n 次多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,如果在一种算法中,计算 $x_0^k(k=2,3,4,\cdots,n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法,计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 9 次运算(6 次乘法,3 次加法),那么计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要________次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法:$P_0(x)=a_0$,$P_{k+1}(x)=xP_k(x)+a_{k+1}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.利用该算法,计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要 6 次运算,计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要________次运算.

解析 该题是一道开放性试题，考查同学们运用数学知识解决实际问题的能力，题中给出了一个求特殊的多项式的值的算法的运算次数的示范，要求归纳出求一般的多项式的值的运算的次数，这是对特殊与一般的思想和归纳抽象能力的考查．本题亦属信息题，做此类题需要认真分析题目本身所给的信息．

第一种算法：计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要 $n+(n-1)+\cdots+1+n$ 次运算，即 $\frac{n(n+3)}{2}$ 次运算；

第二种算法：计算 $P_n(x_0)$ 的值可以采用递推的方法．设计算 $P_n(x_0)$ 的值的次数为 b_n，则 $b_n=b_{n-1}+2$，由 $\{b_n\}$ 是等差数列及 $b_1=2$ 可得 $b_n=2n$．

由题意知道 x_0^k 的值需要 $k-1$ 次运算，即进行 $k-1$ 次 x_0 的乘法运算可得到 x_0^k 的结果，对于 $P_3(x_0)=a_0x_0^3+a_1x_0^2+a_2x_0+a_3$ 这里 $a_0x_0^3=a_0\times x_0\times x_0\times x_0$ 进行了3次运算，$a_1x_0^2=a_1\times x_0\times x_0$ 进行了2次运算，a_2x_0 进行1次运算，最后 $a_0x_0^3$，$a_1x_0^2$，a_2x_0，a_3 之间的加法运算进行了3次，这样 $P_3(x_0)$ 总共进行了 $3+2+1+3=9$ 次运算．

对于 $P_n(x_0)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n$ 总共进行了 $n+n-1+n-2+\cdots+1=\frac{(n+1)n}{2}$ 次，乘法运算及 n 次加法运算所总共进行了 $\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n(n+3)}{2}$ 次．

由改进算法可知：$P_n(x_0)=x_0P_{n-1}(x_0)+a_n$，$P_{n-1}(x_0)=x_0P_{n-2}(x_0)+a_{n-1}\cdots$．

$P_1(x_0)=P_0(x_0)+a_1$，$P_0(x_0)=a_0$，运算次数从后往前算和为 $2+2+\cdots+2=2n$ 次．

【例7】 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且 $8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0(n\geqslant1)$．记 $b_n=\dfrac{1}{a_n-\frac{1}{2}}(n\geqslant1)$．

（Ⅰ）求 b_1、b_2、b_3、b_4 的值；

（Ⅱ）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

解析 此题是数列内等比数列、数列通项公式及数列求和等基本知识的综合，隐含着特殊与一般的数学思想．

解法1 （Ⅰ）$a_1=1$，故 $b_1=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$；$a_2=\frac{7}{8}$，故 $b_2=\dfrac{1}{\frac{7}{8}-\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}$；

$a_3=\frac{3}{4}$，故 $b_3=\dfrac{1}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=4$；$a_4=\frac{13}{20}$，故 $b_4=\frac{20}{3}$．

（Ⅱ）因

$$\left(b_1-\frac{4}{3}\right)\left(b_3-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{8}{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^2,\left(b_2-\frac{4}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2,\left(b_1-\frac{4}{3}\right)\left(b_3-\frac{4}{3}\right)=\left(b_2-\frac{4}{3}\right)^2$$

故猜想 $\{b_n-\frac{4}{3}\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$，公比 $q=2$ 的等比数列．因 $a_n\neq2$（否则将 $a_n=2$ 代入递推公式会导致矛盾），故 $a_{n+1}=\dfrac{5+2a_n}{16-8a_n}(n\geqslant1)$．因

$$b_{n+1}-\frac{4}{3}=\frac{1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}=\frac{16-8a_n}{6a_n-3}-\frac{4}{3}=\frac{20-16a_n}{6a_n-3}$$

$$2\left(b_n-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{a_n-\frac{1}{2}}-\frac{8}{3}=\frac{20-16a_n}{6a_n-3}=b_{n+1}-\frac{4}{3},b_1-\frac{4}{3}\neq0$$

故 $\left\{b_n-\frac{4}{3}\right\}$ 是公比为 $q=2$ 的等比数列．因 $b_1-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$，故

$$b_n-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\cdot2^n,b_n=\frac{1}{3}\cdot2^n+\frac{4}{3},n\geqslant1$$

由 $b_n=\dfrac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$，得 $a_nb_n=\dfrac{1}{2}b_n+1$，故

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\frac{1}{2}(b_1+b_2+\cdots+b_n)+n=\frac{\frac{1}{3}(1-2^n)}{1-2}+\frac{5}{3}n=\frac{1}{3}(2^n+5n-1)$$

解法 2　（Ⅰ）同解法 1.

（Ⅱ）$b_2-b_1=\dfrac{2}{3}$，$b_3-b_2=\dfrac{4}{3}$，$b_4-b_3=\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{8}{3}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$.

猜想 $\{b_{n+1}-b_n\}$ 是首项为 $\dfrac{2}{3}$，公比 $q=2$ 的等比数列，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}\cdot 2^n$. 又因 $a_n\neq 2$，故 $a_{n+1}=\dfrac{5+2a_n}{16-8a_n}(n\geqslant 1)$，因此

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}-\frac{1}{a_n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{5+2a_n}{16-8a_n}-\frac{1}{2}}-\frac{2}{2a_n-1}=\frac{16-8a_n}{6a_n-3}-\frac{6}{6a_n-3}=\frac{10-8a_n}{6a_n-3}$$

$$b_{n+2}-b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+2}-\frac{1}{2}}-\frac{1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}=\frac{16-8a_{n+1}}{6a_{n+1}-3}-\frac{16-8a_n}{6a_n-3}=$$

$$\frac{36-24a_n}{6a_n-3}-\frac{16-8a_n}{6a_n-3}=\frac{20-16a_n}{6a_n-3}=2(b_{n+1}-b_n)$$

因 $b_2-b_1=\dfrac{2}{3}\neq 0$，$\{b_{n+1}-b_n\}$ 是公比 $q=2$ 的等比数列，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}\cdot 2^n$，从而

$$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1=$$

$$\frac{1}{3}(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^1)+2=\frac{1}{3}(2^n-2)+2=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{4}{3},n\geqslant 1$$

由 $b_n=\dfrac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$，得 $a_nb_n=\dfrac{1}{2}b_n+1$，故

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\frac{1}{2}(b_1+b_2+\cdots+b_n)+n=\frac{\frac{1}{3}(1-2^n)}{1-2}+\frac{5}{3}n=\frac{1}{3}(2^n+5n-1)$$

【例 8】　已知数列 $\{a_n\}$（n 为正整数）的首项为 a_1，公比为 q 的等比数列.

（Ⅰ）求和：$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2$；$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结果，归纳概括出关于正整数 n 的一个结论，并加以证明.

解析　本题由（Ⅰ）的结论，通过大胆猜测，归纳猜想出一般性的结论：

（Ⅰ）
$$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2=a_1-2a_1q+a_1q^2=a_1(1-q)^2$$

$$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3=a_1-3a_1q+3a_1q^2-a_1q^3=a_1(1-q)^3$$

（Ⅱ）归纳概括的结论为：若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公比为 q 的等比数列，则

$$a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^na_{n+1}C_n^n=a_1(1-q)^n\text{（证明略）}$$

点评　本题主要考查探索能力、类比归纳能力与论证能力，突出了创新能力的考查；通过抓住问题的实质，探讨具有共同的属性，由特殊型命题直接归纳概括出一般型命题，渗透了特殊与一般的数学思想.

【例 9】　$\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 $m=$ ______.

解法 1　如图 3，作 $OD\perp BC$ 于 D，延长 BO 交圆 O 于 M，联结 CM，则 $MC=2DO$，又 $MC\parallel AH$，联结 AM，CH 并延长交 AB 于 G，则 $CG\perp AB$，又 $AM\perp AB$，所以 $AM\parallel GC$，所以四边形 $AMCH$ 是平行四边

形，所以 $AH = MC = 2DO$，$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$，而 $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$，故 $m = 1$.

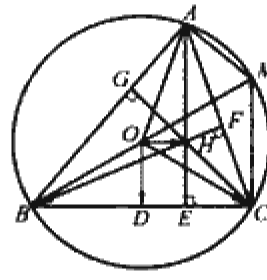


图 3

解法 2 将 $\triangle ABC$ 特殊化为直角三角形，如图 4 所示．其中 O 为三角形的外心，即斜边的中点；H 为三角形的垂心，即直角的顶点 C．在关系式 $\overrightarrow{OH} = m(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 中，显然有 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = 0$，$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC}$．由此解得 $m = 1$.

解法 3 依平面几何性质：三角形任一顶点到垂心的距离等于外心到对边距离的两倍，于是有 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}$，而 $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$，故 $m = 1$.

点评 解题方法的选择，依赖于所掌握的数学思想的深浅．本题求解中，解法 1："数形结合"思想；解法 2："特殊一般"思想；解法 3："化归转化"思想．

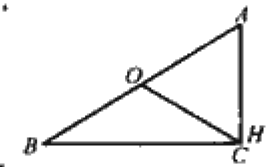


图 4

[redacted]

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且方程 $x^2 - a_n x - a_n = 0$ 有一根为 $S_n - 1$，$n = 1,2,3,\cdots$．(Ⅰ) 求 a_1、a_2；(Ⅱ) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式．

解析 (Ⅰ) 当 $n = 1$ 时，$x^2 - a_1 x - a_1 = 0$ 有一根为 $S_1 - 1 = a_1 - 1$，于是 $(a_1 - 1)^2 - a_1(a_1 - 1) - a_1 = 0$，解得 $a_1 = \frac{1}{2}$；当 $n = 2$ 时，$x^2 - a_2 x - a_2 = 0$ 有一根为 $S_2 - 1 = a_2 - \frac{1}{2}$，于是 $(a_2 - \frac{1}{2})^2 - a_2(a_2 - \frac{1}{2}) - a_2 = 0$，解得 $a_2 = \frac{1}{6}$.

(Ⅱ) 由题设 $(S_n - 1)^2 - a_n(S_n - 1) - a_n = 0$，即 $S_n^2 - 2S_n + 1 - a_n S_n = 0$．当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1}$，代入上式得

$$S_{n-1}S_n - 2S_n + 1 = 0 \qquad ①$$

由 (Ⅰ) 知 $S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$，$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

由 ① 可得 $S_3 = \frac{3}{4}$．由此猜想 $S_n = \frac{n}{n+1}$，$n = 1,2,3,\cdots$．下面用数学归纳法证明这个结论．

a. 当 $n = 1$ 时已知结论成立．

b. 假设当 $n = k$ 时结论成立，即 $S_k = \frac{k}{k+1}$；当 $n = k + 1$ 时，由 ① 得 $S_{k+1} = \frac{1}{2 - S_k}$，即 $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$，故当 $n = k + 1$ 时结论也成立．

综上，由 a、b 可知 $S_n = \frac{n}{n+1}$ 对所有正整数 n 都成立．

于是当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$，又当 $n = 1$ 时，$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}$ 也满足上式，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$，$n = 1,2,3,\cdots$.

点评 本题主要考查数列的基本概念和性质，在得到式 ① 后，利用 $a_n = S_n - S_{n-1}(n \geqslant 2)$ 将其转化为关于第 n 项 a_n 和 S_n 的递推关系，先通过"归纳 — 猜想 — 证明"求出 S_n 的表达式，再由 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求通项 a_n．先考虑 $n = 1$ 这种特殊情景，再研究一般情景，体现了特殊与一般的数学思想．其中，也蕴含了有限与无限的数学思想．

（六）有限与无限思想

[redacted]

数学研究的对象可以是特殊的或一般的，可以是具体的或抽象的，可以是静止的或运动的，可以是有限的或无限的，它们之间是矛盾的对立统一．考试中心对考试大纲的说明中指出："对有限的研究往往先于对无限的研究，对有限个研究对象的研究往往有章可循，并积累了一定的经验，而对无限个研究对象的研究，却往往不知如何下手，显得经验不足，于是将对无限的研究化成对有限的研究，就成了解决无限问题的必经之路．反之，当积累了解决无限问题的经验之后，可以将有限问题转化成无限问题来解决，这种无限化有限，有限化无限的解决数学问题的方法就是有限与无限的思想．"

"高考中对有限与无限的思想的考查才刚刚起步，并且往往是在考查其他数学思想和方法的过程中同时考查有限与无限的思想．例如，在使用由特殊到一般的归纳思想时，含有有限与无限的思想；在使用数学归纳法证明时，解决的是无限的问题，体现的是有限与无限的思想等．"随着高中课程的改革，对新增内容的考查在逐步深入，必将加强对有限与无限思想的考查，设计出重点体现有限与无限的新颖试题．

客观世界是有限与无限的统一体，我们既可以通过有限来把握无限，也可以借助无限来确定有限，数学归纳法、数列极限、函数极限等都是由有限把握无限的极好例证．

2005年始，高考加强了对数学归纳法的考查，当年除文科之外的16套试卷中，全国Ⅰ卷，辽宁卷，浙江卷，福建卷，江西卷，湖北卷，重庆卷共有7道数学归纳法的试题，极值和导数问题也是体现有限与无限的思想的一个重要侧面．

[redacted]

【例1】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{4}{5}-\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{4}{5^2}-\frac{6}{7^2}\right)+\cdots+\left(\frac{4}{5^n}-\frac{6}{7^n}\right)}{\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{5}{6^2}-\frac{4}{5^2}\right)+\cdots+\left(\frac{5}{6^n}-\frac{4}{5^n}\right)}=$ ______．

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{4}{5}-\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{4}{5^2}-\frac{6}{7^2}\right)+\cdots+\left(\frac{4}{5^n}-\frac{6}{7^n}\right)}{\left(\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{5}{6^2}-\frac{4}{5^2}\right)+\cdots+\left(\frac{5}{6^n}-\frac{4}{5^n}\right)}=$

$$\dfrac{\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\cdots+\frac{4}{5^n}\right)-\left(\frac{6}{7}+\frac{6}{7^2}+\cdots+\frac{6}{7^n}\right)}{\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{6^2}+\cdots+\frac{5}{6^n}\right)-\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{5^2}+\cdots+\frac{4}{5^n}\right)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\frac{4}{5}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{5}}-\dfrac{\frac{6}{7}\left[1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{7}}}{\dfrac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{6}}-\dfrac{\frac{4}{5}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{5}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{7}\right)^n}{\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{5}{7}\right)^n}{\left(\frac{5}{6}\right)^n-1}=-1$$

点评 本题考查了等比数列的求和公式以及数列极限的基本类型.这道选择题,虽然简单,但其中体现的数学思想不容忽视.求极限的问题,无论是求函数的极限,还是求数列的极限,无论是 $x\to 0$,还是 $n\to\infty$,所体现的都是有限与无限的思想.

【例2】 求函数 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2$ 在[0,2]上的最大值和最小值.

解析 本小题从求函数的导数,利用导数判断函数的单调性,求函数极值的角度考查有限与无限的思想.可以体味一下极值概念的有限与无限的辩证关系.高考试题常从概念和方法出发,考查其中蕴含的数学思想和方法.

$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x$,令$\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}x=0$,化简为 $x^2+x-2=0$,解得 $x_1=-2$(舍去),$x_2=1$.

当 $0\leqslant x<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调增加;当 $1<x\leqslant 2$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减少.所以 $f(1)=\ln 2-\frac{1}{4}$ 为函数 $f(x)$ 的极大值.又因为 $f(0)=0$,$f(2)=\ln 3-1>0$,$f(1)>f(2)$,所以 $f(0)=0$ 为函数 $f(x)$ 在[0,2]上的最小值,$f(1)=\ln 2-\frac{1}{4}$ 为函数 $f(x)$ 在[0,2]上的最大值.

【例3】 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a$,$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$.我们知道当 a 取不同的值时,得到不同的数列,如当 $a=1$ 时,得到无穷数列 $1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\cdots$;当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,得到有穷数列 $-\frac{1}{2},-1,0$.

(Ⅰ)求当 a 为何值时 $a_4=0$;

(Ⅱ)设数列$\{b_n\}$满足 $b_1=-1$,$b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,求证:$a$ 取数列$\{b_n\}$中的任一个数,都可以得到一个有穷数列$\{a_n\}$;

(Ⅲ)若$\frac{3}{2}<a_n<2(n\geqslant 4)$,求 a 的取值范围.

解析 这是一道立意新颖性,视角独特并能体现有限与无限的思想的典型试题.对于题设的递推关系,由于所给出的初始条件不同,得到的数列也不同,并在题干中举出了具体的例子,第(Ⅱ)问则是可以通过有限次试验,得到对无限个 b_n 都可以得到一个有穷数列$\{a_n\}$的猜想,再用数学归纳法进行证明,第(Ⅲ)问又是把对无限个 n 都成立的结果,通过有限次分析求得解决.

(Ⅰ)**解法1** 因为 $a_1=a$,$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$,所以 $a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$,$a_3=1+\frac{1}{a_2}=\frac{2a+1}{a+1}$,$a_4=1+\frac{1}{a_3}=\frac{3a+2}{2a+1}$.故当 $a=-\frac{2}{3}$ 时 $a_4=0$.

解法2 因为 $a_4=0$,所以 $1+\frac{1}{a_3}=0$,所以 $a_3=-1$.因为 $a_3=1+\frac{1}{a_2}$,所以 $a_2=-\frac{1}{2}$.因为 $a_2=1+\frac{1}{a}$,所以 $a=-\frac{2}{3}$.故当 $a=-\frac{2}{3}$ 时,$a_4=0$.

(Ⅱ)**解法1**　因为 $b_1=-1,b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}$,所以 $b_n=\frac{1}{b_{n+1}}+1$. a 取数列$\{b_n\}$中的任一个数不妨设 $a=b_n$.

因为 $a=b_n$,所以 $a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{b_n}=b_{n-1}$,所以 $a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{b_{n-1}}=b_{n-2}$.

……

所以 $a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}=1+\frac{1}{b_2}=b_1=-1$,所以 $a_{n+1}=0$.

故 a 取数列$\{b_n\}$中的任一个数,都可以得到一个有穷数列$\{a_n\}$.

解法2　因为 $b_1=-1,b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1},b_n=\frac{1}{b_{n+1}}+1$. 当 $a=b_1$ 时,$a_2=1+\frac{1}{b_1}=0$;当 $a=b_2$ 时,$a_2=1+\frac{1}{b_1}=b_1=-1$,所以 $a_3=0$;当 $a=b_3$ 时,$a_2=1+\frac{1}{b_3}=b_2$,所以 $a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{b_2}=b_1=-1$,所以 $a_4=0$.

一般地,当 $a=b_n$ 时,$a_{n+1}=0$,可得一个含有 $n+1$ 项的有穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$.

下面用数学归纳法证明.

① 当 $n=1$ 时,$a=b_1$,显然 $a_2=1+\frac{1}{b_1}=0$,可得一个含有2项的有穷数列 a_1、a_2.

② 假设当 $n=k$ 时,$a=b_k$,得到一个含有 $k+1$ 项的有穷数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$,其中 $a_{k+1}=0$,则 $n=k+1$ 时,$a=b_{k+1}$,所以 $a_2=1+\frac{1}{b_{k+1}}=b_k$,由假设可知,得到一个含有 $k+1$ 项的有穷数列 a_2,$a_3,\cdots,a_{k+2}$,其中 $a_{k+2}=0$.

所以,当 $n=k+1$ 时,可以得到一个含有 $k+2$ 项的有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{k+2}$,其中 $a_{k+2}=2$,由①,②知,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,命题都成立.

(Ⅲ)要使 $\frac{3}{2}<a_n<2(n\geqslant4)$,即 $\frac{3}{2}<1+\frac{1}{a_{n-1}}<2$,所以 $1<a_{n-1}<2$.

所以要使 $\frac{3}{2}<a_n<2(n\geqslant4)$,当且仅当它的前一项 a_{n-1} 满足 $1<a_{n-1}<2$.

由于 $\left(\frac{3}{2},2\right)\subseteq(1,2)$,所以只须当 $a_4\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ 时,都有 $a_n\in\left(\frac{3}{2},2\right)(n\geqslant5)$.

由 $a_4=\frac{3a+2}{2a+1}$,得 $\frac{3}{2}<\frac{3a+2}{2a+1}<2$,解此不等式得 $a>0$.

这种综合考查极限的试题交汇的方式较多,均蕴含着有限无限思想.如:

1. 设常数 $a>0$,$\left(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 $\frac{3}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a+a^2+\cdots+a^n)=$ ________.

解析　$T_{r+1}=C_4^r a^{4-r}x^{8-2r}x^{-\frac{1}{2}r}$,由 $x^{8-2r}x^{-\frac{1}{2}r}=x^3$,得 $r=2$.由 $C_4^r a^{4-r}=\frac{3}{2}$ 知 $a=\frac{1}{2}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}(a+a^2+\cdots+a^n)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

点评　本题考查二项式定理和无穷等比数列的极限.

2. 设函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}$,点 A_0 表示坐标原点,点 $A_n(n,f(n))(n\in\mathbf{N}^*)$,若向量 $\vec{a_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$,$\theta_n$ 是 $\vec{a_n}$ 与 $\vec{i}$ 的夹角(其中 $\vec{i}=(1,0)$),设 $S_n=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\cdots+\tan\theta_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ ________.

解析　因为 $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=[n\cdot f(n)]-[(n-1)\cdot f(n-1)]=\left(1,\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $a_n=$

$\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\left(n,\frac{1}{n+1}\right)$，根据三角函数的定义先求出 $\cos\theta_n$、$\sin\theta_n$ 的值，再由

$$\tan\theta_n=\frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n}=\frac{1}{n(n+1)}$$

所以
$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

点评 本题交汇考查平面向量、三角函数和极限的相关知识. 也可把 $\tan\theta_n$ 看作是点 $A_n(n,f(n))$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 与 x 轴夹角的正切值，也为直线 A_0A_n 的斜率，即 $\tan\theta_n=\frac{f(n)}{n}$，继而求出 S_n，得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

【例 4】 某城市规划今年年末汽车保有量为 30 万辆，预计此后每年报废上一年末汽车保有量的 6%，并且每年新增汽车数量相同，为保护城市环境，要求该城市汽车保有量不超过 60 万辆，那么每年新增汽车数量不应超过多少辆?

解析 该题考查"从保护城市环境出发，计算城市新增汽车数量"，体现了关于方法的知识是世界上最宝贵的知识，"让数学走进生活"的新课程理念，还考查了有限与无限的数学思想.

设今年年末汽车保有量为 a_1 万辆，$a_1=30$，以后各年的汽车保有量为 $a_2,a_3,\cdots$(单位:万辆).

设每年新增汽车 x 万辆，则 $a_{n+1}=0.94a_n+x(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_{n+1}-\frac{x}{0.06}=0.94\left(a_n-\frac{x}{0.06}\right)$. $\left\{a_n-\frac{x}{0.06}\right\}$是以 $a_1-\frac{x}{0.06}$ 为首项，0.94 为公比的等差数列. $a_n-\frac{x}{0.06}=\left(30-\frac{x}{0.06}\right)\cdot0.94^{n-1}$.

(1) 当 $30-\frac{x}{0.06}>0$，即 $x<1.8$ 时，$\{a_n\}$为减数列，所以 $a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_1=30$.

又当 $30-\frac{x}{0.06}=0$ 时，$x=1.8$，$a_n=30$，所以此时汽车保有量不超过 30 万辆.

(2) 当 $30-\frac{x}{0.06}<0$，即 $x>1.8$ 时，$\{a_n\}$ 为增数列，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{x}{0.06}\leqslant60$，则 $x\leqslant3.6$.
所以此时汽车保有量不超过 60 万辆. 由以上，每年新增汽车数量不应超过 3.6 万辆.

[redacted]

已知公比为 $q(0<q<1)$ 的无穷等比数列$\{a_n\}$各项的和为 9，无穷等比数列$\{a_n^2\}$各项的和为$\frac{81}{5}$.

(Ⅰ) 求数列$\{a_n\}$的首项 a_1 和公比 q;

(Ⅱ) 对给定的 $k(k=1,2,3,\cdots,n)$，设 $T^{(k)}$ 是首项为 a_k，公差为 $2a_k-1$ 的等差数列，求数列 $T^{(2)}$ 的前 10 项之和;

(Ⅲ) 设 b_i 为数列 $T^{(i)}$ 的第 i 项，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，求 S_n，并求正整数 $m(m>1)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^m}$ 存在且不等于零(无穷等比数列各项的和即当 $n\to\infty$ 时该无穷等比数列前 n 项和的极限).

解析 (Ⅰ) 依题意可知

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{1-q}=9\\[2mm]\dfrac{a_1^2}{1-q^2}=\dfrac{81}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=3\\[2mm]q=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，$a_n=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，所以数列 $T^{(2)}$ 的首项为 $t_1=a_2=2$，公差 $d=2a_2-1=3$，$S_{10}=10\times2+\frac{1}{2}\times10\times9\times3=155$，即数列 $T^{(2)}$ 的前 10 项之和为 155.

(Ⅲ) $b_i = a_i + (i-1)(2a_i - 1) = (2i-1)a_i - (i-1) = 3(2i-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} - (i-1)$

$$S_n = 45 - (18n+27)\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n(n-1)}{2}, \frac{S_n}{n^m} = \frac{45}{n^m} - \frac{18n+27}{n^m}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n(n-1)}{2n^m}$$

当 $m = 2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^m} = -\frac{1}{2}$；当 $m > 2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^m} = 0$，所以 $m = 2$.

点评 本题是一道数列综合应用题，注意求解过程中的化归和转化、有限与无限思想.

（七）或然与必然思想

[redacted]

概率研究的是随机现象，研究的过程是在“偶然”中寻找“必然”，然后再用“必然”的规律去解决“偶然”的问题，这其中所体现的数学思想就是或然与必然的思想.

随着新教材的实施，高考中对概率内容的考查已经放在了重要的位置，通过对等可能事件的概率，互斥事件有一个发生的概率，相互独立事件同时发生的概率，n 次独立重复试验发生了 k 次的概率以及随机事件的分布列与数学期望等重点内容的考查，在考查基本概念和基本方法的同时，考查在解决实际问题中能否运用或然与必然的辩证关系，从而体现或然与必然的思想.

面对随机现象的不确定性（或然性），人们更想掌握其中的规律性（必然性），近几年，高考突出了对概率内容的考查，是符合实际需要的.

[redacted]

【例 1】 从 1，2，…，9 这 9 个数中，随机抽取 3 个不同的数，则这 3 个数的和为偶数的概率是（　　）

A. $\frac{5}{9}$　　B. $\frac{4}{9}$　　C. $\frac{11}{21}$　　D. $\frac{10}{21}$

解析　本题是一个求解等可能事件的概率问题，可直接分析计算得出概率，所以 $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_4^3+C_5^2C_4^1}{C_9^3}=\frac{44}{84}=\frac{11}{21}$，故选 C. 这里 $P(A)=\frac{11}{21}$ 的本质属性是指这个事件 A 发生的可能性是 $\frac{11}{21}$，是这个试验重复多次后，事件 A 发生频率的稳定值的近似值，是或然事件规律性的标志，体现了或然与必然之间的辩证关系.

【例 2】 从装有 3 个红球，2 个白球的袋中随机取出 2 个球，设其中有 ξ 个红球，则随机变量 ξ 的概率分布如表 1 所示.

表 1

ξ	0	1	2
P			

解析　本题是求随机变量分布列的问题，其中所求概率又是等可能事件的概率问题，所以 $P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$；$P(\xi=1)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$；$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$. 所得结果如表 2 所示.

表 2

ξ	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

点评　对离散随机变量的研究，我们不仅要关心某一次随机试验中到底取什么值的问题，而更要关心的是随机变量在取某一个值或某一批值时可能性的大小．只有如此，我们方能确切地掌握随机变量的取值规律，从而帮助我们解决相应的问题．这样就使我们对"或然"与"必然"的研究又深入一步，从"分布"与"期望"两个方面获取随机变量的规律，在"或然"中寻找"必然"．

【例 3】　某会议室用 5 盏灯照明，每盏灯各使用灯泡 1 只，且型号相同．假定每盏灯能否正常照明只与灯泡的寿命有关，该型号的灯泡寿命为 1 年以上的概率为 p_1，寿命为 2 年以上的概率为 p_2．从使用之日起每满 1 年进行一次灯泡更换工作，只更换已坏的灯泡，平时不换．

（Ⅰ）在第一次灯泡更换工作中，求不需要换灯泡的概率和更换 2 只灯泡的概率；

（Ⅱ）在第二次灯泡更换工作中，对其中的某一盏灯来说，求该盏灯需要更换灯泡的概率；

（Ⅲ）当 $p_1=0.8$，$p_2=0.3$ 时，求在第二次灯泡更换工作，至少需要更换 4 只灯泡的概率（结果保留两个有效数字）．

解析　（Ⅰ）在第一次更换灯泡工作中，不需要换灯泡的概率为 p_1^5，需要更换 2 只灯泡的概率为 $C_5^2p_1^3(1-p_1)^2$；

（Ⅱ）对该盏灯来说，在第二次灯泡更换工作中，有 4 种可能的情况：

① 第一、二次都需要更换，其概率为 $(1-p_1)^2$；② 第一次更换，而第二次不需要更换，其概率为 $(1-p_1)p_1$；③ 第一、二次都不需要更换，其概率为 p_2；④ 第一次未更换而第二次需要更换，其概率为 p_1-p_2．该盏灯第二次需要更换灯泡的情形为上面的 ① 和 ④，故所求的概率为 $p=(1-p_1)^2+(p_1-p_2)$．

（Ⅲ）至少换 4 只灯泡包括换 5 只和换 4 只有两种情况，换 5 只的概率为 p^5（其中 p 为（Ⅱ）中所求，下同），换 4 只的概率为 $C_5^1p^4(1-p)$，故至少换 4 只灯泡的概率为 $p_3=p^5+C_5^1p^4(1-p)$．又当 $p_1=0.8$，$p_2=0.3$ 时，$p=0.2^2+0.8-0.3=0.54$，所以 $p_3=0.54^5+5\times0.54^4\times0.46=0.24$，即满 2 年至少需要换 4 只灯泡的概率为 0.24．

[redacted]

现有甲、乙两个项目，对甲项目每投资 10 万元，一年后利润 1.2 万元、1.18 万元、1.17 万元的概率分别为 $\frac{1}{6}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$；已知乙项目的利润与产品价格的调整有关，在每次调整中，价格下降的概率都是 $p(0<p<1)$，设乙项目产品价格在一年内进行 2 次独立的调整，记乙项目产品价格在一年内的下降次数为 ξ，对乙项目每投资 10 万元，ξ 取 0、1、2 时，一年后相应利润是 1.3 万元、1.25 万元、0.2 万元，随机变量 ξ_1、ξ_2 分别表示对甲、乙两项目各投资 10 万元一年后的利润．

（Ⅰ）求 ξ_1、ξ_2 的概率分布和数学期望 $E\xi_1$、$E\xi_2$；

（Ⅱ）当 $E\xi_1<E\xi_2$ 时，求 p 的取值范围．

解析　（Ⅰ）ξ_1 的概率分布如表 3 所示．

表 3

ξ_1	1.2	1.18	1.17
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$E\xi_1 = 1.2 \times \frac{1}{6} + 1.18 \times \frac{1}{2} + 1.17 \times \frac{1}{3} = 1.18$$

由题设得 $\xi \sim B(2,p)$，即 ξ 的概率分布为表 4.

表 4

ξ	0	1	2
P	$p(1-p)$	$2p(1-p)$	p^2

故 ξ_2 的概率分布为表 5.

表 5

ξ_2	1.3	1.25	0.2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

所以 ξ_2 的数学期望为

$$E\xi_2 = 1.3 \times (1-p)^2 + 1.25 \times 2p(1-p) + 0.2 \times p^2 = -p^2 - 0.1p + 1.3$$

也可这样求 $E\xi_2$. 设 A_i 表示事件"第 i 次调整，价格下降"($i = 1,2$)，则

$$P(\xi = 1) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = 2p(1-p)$$

$$P(\xi = 2) = P(A_1)P(A_2) = p^2$$

以下略.

(Ⅱ) 由 $E\xi_1 < E\xi_2$，得 $-p^2 - 0.1p + 1.3 > 1.18$，整理得 $(p+0.4)(p-0.3) < 0$，解得 $-0.4 < p < 0.3$，因为 $0 < p < 1$，所以，当 $E\xi_1 < E\xi_2$ 时，p 的取值范围是 $0 < p < 0.3$.

点评 本题既考查了离散性随机变量的分布列和数学期望，同时又是高考试卷上第一次尝试构建的一道以 ξ 为参数和二次函数交汇考查的综合题，或然与必然的思想更是充分体现其中.

[redacted]

数学思想方法是数学知识的精髓，是知识转化为能力的催化剂，因此在数学学习中，我们应当有意识地挖掘和提炼数学知识本身所蕴涵着的丰富的数学思想和方法，并能恰当地运用它们解决问题，逐步学会：

① 用函数与方程思想建立知识与知识之间的相互联系；

② 用数形结合的思想体现数与形之间的相互印证；

③ 用分类与整合的思想落实局部与局部之间的相互融合；

④ 用化归与转化的思想完成问题与问题之间的相互转化；

⑤ 用特殊与一般的思想发展具体与抽象的辩证思维；

⑥ 用运动与变换的思想学习动静结合的解析内涵；

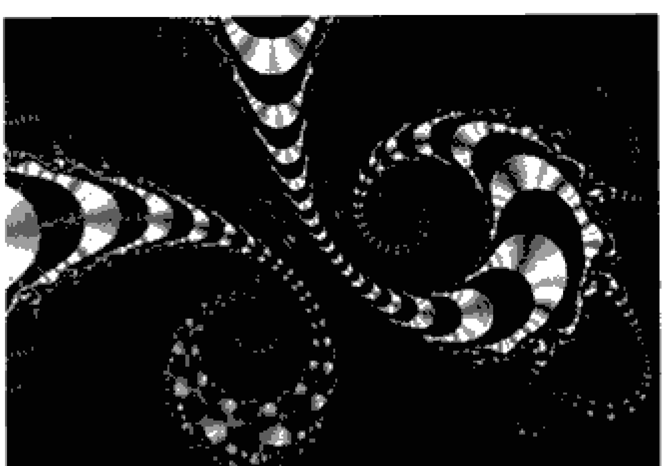
⑦ 用有限与无限的思想实现量变向质变的伟大跨越；

⑧ 用或然与必然的思想揭示随机现象内部所蕴涵的规律.

同时，在常规教学中，我们应该有意识地训练学生的逻辑推理、演绎证明、运算求解、直觉猜想、归纳抽象等思维方式，提高学生的理性思维能力；在高考复习时，要让学生充分认识数学思想在提高解题能力的重要性，有意识地在复习中渗透数学思想，提升数学思想. 特别是在解答问题前的分析中，更要引导学生琢磨问题指向、锁定解题目标、灵活应用数学思想方法，进行有目的、合乎情理的变形. 只有如此，我们的教与学才凸现出常思常新.

第二编

命题研究



●高考出题，在很多人的心中是件"神秘的事"．由于保密，故有人称高考出题是"暗箱操作"．其实，高考出题是非常透明的"阳光工程"．考什么？怎么考？在《考试大纲》及其"说明"中讲得十分明白．只是我们有时只注意到了要考查的内容细节，而忽略了考查的主题思想……

●近几年高考数学"亮点"试题不少，除本书中所涉及相关内容之外，还有像2007年全国高考湖南卷理科15题，将杨辉三角中的奇数换成1、偶数换成0作素材，考查考生的归纳推理能力；上海卷理科21题，定义新的"椭圆"概念，考查椭圆的基础知识、两点间的距离、二次函数的最值求法，另外此题将一个基本图形经过"嫁接"，创造出一个新图形，向考生展示了数学的奇异与美妙，使考生获得了精神享受，设计真是别出心裁，值得回味……限于篇幅，在此不再一一赘述．

●"亮点"试题的命题特点：继续在考查基础知识的同时，注重对数学思想和方法的考查，突出以能力立意、融知识、能力与素质于一体，全面检测考生的数学素养，对知识的考查侧重于理解和应用，而不是简单的重视，特别注重知识的综合性和灵活性应用．这些考题仍然是课本例题习题、复习资料、模拟试题中比较少见的新颖题目，命题的落脚点还是知识之间的交汇、渗透与整合(常见的题型是新信息迁移题或常规考点适当包装题或常规考点的组合联袂题或能力立意题(知识虽新鲜，能力不超纲)等等)．

●"亮点"试题还是主要侧重如下几方面的能力立意：阅读审题、估算判断、数形结合、自主探究能力、逻辑推理能力等．

●"亮点"试题虽然比较新颖，但是就其解决问题所用到的知识和方法来说，仍然没有超出考生所熟悉的范围．所以，应该说这样的题目大多考生应对起来还是比较顺利的．

●"亮点"试题仍然紧扣课本，万变不离其宗．所以在平时的教学中我们还是应该立足于课本，狠抓对基本概念和基础知识的理解与掌握，引导学生自觉培养并形成良好的思维素质和学习习惯至关重要．

(一)2006年全国高考数学试题“亮点”品评

2006年全国各地高考数学试题紧扣考试大纲，注重对考生能力的考查，试卷结构稳定，知识覆盖面广，重点突出，稳中有新，稳中求变．试题科学、规范，重点考查了中学数学的通性通法，同时还加强了对数学核心能力的考查，应用型题目比例适当．此外，试卷中新增数学内容和传统内容有机结合，考查进一步深化．试卷贴近中学教学的实际，平和清新，题目难、中、易比例恰当，难度合理，有利于高校选拔优秀学生，也有利于稳定中学数学教学，对中学数学教学发挥了积极的导向作用．具体呈现以下几大特点：

(1)注重对知识和思想方法的考查，包括：①注重教材在命题中的作用；②注重对主干知识的考查；③注重对数学思想方法的考查；④注重在“知识网络交汇点”命题；⑤注重对新增内容的考查，且有所深化．

(2)深化能力立意，重视创新意识，包括：①考查考生学习新的数学知识的能力；②考查考生在新情境中解决问题的能力；③考查考生探究问题的能力；④突出考查考生的数学思维能力．

(3)加强应用意识，重视数学与现实问题的联系．

(4)试卷设计充分考虑文、理科考生的学习差异，加大区分度．

2006年全国各地高考数学试卷中，考查学生的学习潜能、创新意识和探究精神的“亮点”试题不少，本文着重对此精选数例，按试题所涉及的数学背景知识进行分类解析品评，期望通过新高考命题的新变化推动中学数学教学改革和课程改革，引导中学数学教学向全面培养学生数学素养和能力的方向发展．

1．以“集合”为背景

【例1】（全国卷Ⅰ，理科12题）设集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$，选择 I 的两个非空子集 A 和 B，要使 B 中最小的数大于 A 中最大的数，则不同的选择方法共有（　　）

A．50种　　B．49种　　C．48种　　D．47种

解析　按集合 B 进行分类计算，故选B．

点评　本题交汇考查了集合与排列组合的有关问题，对学生的创新学习能力进行了考核，考查学生面对新颖的信息、情境和设问时能否选择有效的方法和手段收集信息，综合与灵活地应用所学的数学知识、思想和方法，进行独立地思考、探索和研究，提出解决问题的思路，创造性地解决问题．本题充分体现出考查学生的动手能力和运用所学知识解决实际问题的能力．

【例2】（湖北卷，理科8题）有限集合 S 中元素的个数记作 $\mathrm{card}(S)$，设 A，B 都为有限集合，给出下列命题：

①$A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$；

②$A\subseteq B$ 的必要条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；

③$A\not\subseteq B$ 的充分条件是 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；

④$A=B$ 的充要条件是 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$．

其中真命题的序号是(　　)

A.③④　　B.①②　　C.①④　　D.②③

解析　此题选 B.① 由 $card(A\cup B)=card(A)+card(B)$ 知 $card(A\cup B)=card(A)+card(B)\Leftrightarrow card(A\cap B)=0\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.② 由 $A\subseteq B$ 的定义知 $card(A)\leqslant card(B)$,但 $card(A)\leqslant card(B)$ 不能说明 $A\subseteq B$,A、B 中的元素不一定相同.③ 设 $A=\{a,b\}$,$B=\{a,b,c\}$,不能说明 $A\nsubseteq B$.④$A=B\Rightarrow card(A)=card(B)$,但 $card(A)=card(B)$ 不能推出 $A=B$.如 $A=\{a,b\}$,$B=\{c,d\}$.

点评　本题考查交集、并集及集合中元素的个数的有关知识,利用教材中阅读材料的有关内容考查逻辑推理能力,平时不重视阅读教材的考生解题时感觉吃力.

【例3】　(四川卷,理科16题)非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足:(1)对任意的 a、$b\in G$,都有 $a\oplus b\in G$.(2)存在 $c\in G$,使得对一切 $a\in G$,都有 $a\oplus c=c\oplus a=a$,则称 G 关于运算 $\oplus$ 为"融洽集".现给出下列集合和运算:

①$G=\{$非负整数$\}$,$\oplus$ 为整数的加法.

②$G=\{$偶数$\}$,$\oplus$ 为整数的乘法.

③$G=\{$平面向量$\}$,$\oplus$ 为平面向量的加法.

④$G=\{$二次三项式$\}$,$\oplus$ 为多项式的加法.

⑤$G=\{$虚数$\}$,$\oplus$ 为复数的乘法.

其中 G 关于运算 $\oplus$ 为"融洽集"的是______(写出所有"融洽集"的序号).

解析　根据"融洽集"的定义,只有①③才符合.

点评　本题是以高等数学群论为背景而编拟的一道判断填空题,它考查考生在新情景下对新知识的接受理解能力、抽象概括能力,是一道颇有新意的试题,同时也考查了考生继续学习的数学潜质.

2.以"函数、不等式"为背景

【例4】　(北京卷,理科5题)已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1\\ \log_a x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数,那么 a 的取值范围是(　　)

A.$(0,1)$　　B.$(0,\frac{1}{3})$　　C.$\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$　　D.$\left[\frac{1}{7},1\right)$

解析　依题意,有 $0<a<1$,$f(1)=0$,且 $3a-1<0$,解得 $0<a<\frac{1}{3}$,又因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数,所以当 $x<1$ 时,$(3a-1)x+4a>0$,即 $(3a-1)\times 1+4a\geqslant 0$,所以 $a\geqslant\frac{1}{7}$,故 $a\in\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$,故选 C.

点评　此题把两种函数融为一体,将所学知识很好地融合在一起,从比较新颖的角度考查函数单调性的概念,并且不怪,考生下手比较容易.

【例5】　(浙江卷,理科10题)函数 $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ 满足 $f(f(x))=f(x)$,则这样的函数个数共有(　　)

A.1个　　B.4个　　C.8个　　D.10个

解析　根据映射一对一、多对一的性质,以及 $f(f(x))=f(x)$ 的条件,可列举出10个符合要求的函数,故选 D.

点评　此题看似简单,但由于设问的角度新颖、涵盖面丰富,解答时对映射的性质、函数的定义、复合函数概念、函数方程要有一个深刻的理解,要不厌其烦地枚举验证,该题充分考查了思维的条理性、深刻性和缜密性.

【例6】　(浙江卷,理科12、文科10题)对 $a,b\in\mathbf{R}$,记 $\max\{a,b\}=\begin{cases}a, & a\geqslant b\\ b, & a<b\end{cases}$.

函数 $f(x)=\max\{|x+1|,|x-2|\}(x\in\mathbf{R})$ 的最小值是________.

解析 $f(x)=\max\{|x+1|,|x-2|\}=\begin{cases}|x+1|,|x+1|\geqslant|x-2|\\|x-2|,|x+1|<|x-2|\end{cases}=$

$$\begin{cases}|x+1|,x\geqslant\frac{1}{2}\\|x-2|,x<\frac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}x+1,x\geqslant\frac{1}{2}\\2-x,x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

显然此函数最小值为 $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

点评 此题是一道自定义的信息迁移题,其本质是一个大家较为熟悉的分段函数的最值问题,但由于该题表述方法的改变,从而显得新颖脱俗.

【例7】 (湖南卷,理科8题)设函数 $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$,集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$,$P=\{x\mid f'(x)>0\}$,若 $M\not\subseteq P$,则实数 a 的取值范围是( )

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

解析 由 $f'(x)=\frac{-a+1}{(x-1)^2}>0$ 得 $a>1$,所以由 $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$,得满足 $M\not\subseteq P$ 的条件,故选 C.

点评 该题把集合、导数、不等式结合起来,并考查分类与整合的数学思想,对考生的思维品质要求较高.

【例8】 (北京卷,理科8题)图1为某三岔路口交通环岛的简化模型,在某高峰时段,单位时间进出路口 A、B、C 的机动车辆数如图1所示,图中 x_1、x_2、x_3 分别表示该时段单位时间通过路段 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$ 的机动车辆数(假设:单位时间内,在上述路段中,同一路段上驶入与驶出的车辆数相等),则( )

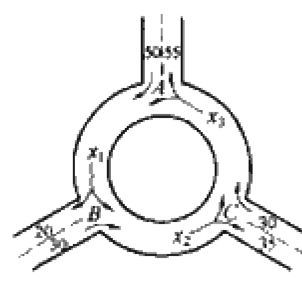


图1

A. $x_1>x_2>x_3$　　B. $x_1>x_3>x_2$

C. $x_2>x_3>x_1$　　D. $x_3>x_2>x_1$

解析 依题意,有 $x_1=50+x_3-55=x_3-5$,所以 $x_1<x_3$,同理,$x_2=30+x_1-20=x_1+10$,所以 $x_1<x_2$,同理,$x_3=30+x_2-35=x_2-5$,所以 $x_3<x_2$,故选 C.

点评 这样的题看起来非常麻烦,但比较新颖,也比较贴近学生的生活,使学生感到比较亲近,也考查了学生的能力.分析这道题的时候把题中所给的一些量固定住,就极易解出.比如说 A 当一个起点,变中求静来解决,B 到 C 这样就是60,60从 C 流走35,所以流在点 A 就是55,比较起来,在这里面应该 x_2 最大,x_3 其次,最小的是 x_1,故选 C.

【例9】 (陕西卷,理科12题)为确保信息安全,信息需加密传输,发送方由明文→密文(加密),接收方由密文→明文(解密).已知加密规则为:明文 a、b、c、d 对应密文 $a+2b$、$2b+c$、$2c+3d$、$4d$.例如,明文1、2、3、4对应密文5、7、18、16.当接收方收到密文14、9、23、28时,则解密得到的明文为( )

A. 4、6、1、7　　B. 7、6、1、4　　C. 6、4、1、7　　D. 1、6、4、7

点评 此题考查算法、算律以及映射思想在方程组中的应用,是一道体现新课程改革的亮点题,信息密码在现实生活当中无处不在,解答的办法也是极其基本的,只要列出 a、b、c、d 的4元线性方程组就能读出明文了,故选 C.

【例10】 (重庆卷,理科9题)如图2,单位圆中弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 x,$f(x)$ 表示弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与弦 AB 所围成的弓形面积的2倍,则函数 $y=f(x)$ 的图象是( )

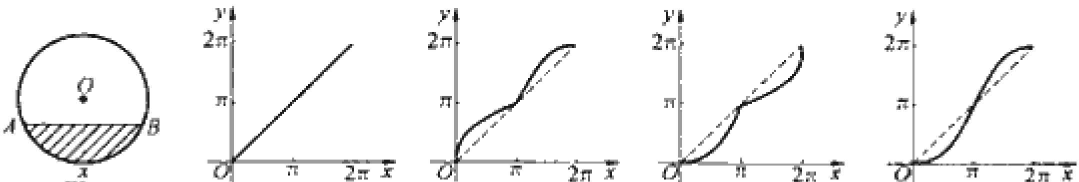


图 2　　A.　　B.　　C.　　D.

解析　由题意知 $f(x) = x - \sin x, 0 < x < 2\pi$，当 $0 < x < \pi$ 时，$f(x) < x$；$\pi < x < 2\pi$ 时，$f(x) > x$. 故选 D.

点评　本题主要考查实际问题中的函数思想的运用能力.

【例 11】（湖北卷，文科 15 题）半径为 r 的圆的面积 $S(r) = \pi r^2$，周长 $C(r) = 2\pi r$，若将 r 看作 $(0, +\infty)$ 上的变量，则

$$(\pi r^2)' = 2\pi r \qquad ①$$

式①可以用语言叙述为：圆的面积函数的导数等于圆的周长函数. 对于半径为 R 的球，若将 R 看作 $(0, +\infty)$ 上的变量，请你写出类似于①的式子：________________ ②

式②可以用语言叙述为：________________________________.

解析　易得两空分别填 $(\frac{4}{3}\pi R^3)' = 4\pi R^2$，球的体积函数的导数等于球的表面积函数.

点评　本题从圆的面积与其周长之间的导数关系引申到球的体积和其表面积之间的导数关系，融图形语言、符号语言和文字语言于一体，立意新颖别致，考查考生用类比思维去探索发现、归纳演绎的数学素养. 同时一题二空也是本题的创新之处，考查学生的类比迁移能力.

【例 12】（广东卷，18 题）设函数 $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ 分别在 x_1、x_2 处取得极小值、极大值. xOy 平面上点 A、B 的坐标分别为 $(x_1, f(x_1))$、$(x_2, f(x_2))$，该平面上动点 P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 4$，点 Q 是点 P 关于直线 $y = 2(x - 4)$ 的对称点. 求：（Ⅰ）点 A、B 的坐标；（Ⅱ）动点 Q 的轨迹方程.

解析　（Ⅰ）令 $f'(x) = (-x^3 + 3x + 2)' = -3x^2 + 3 = 0$，解得 $x = 1$ 或 $x = -1$.

当 $x < -1$ 时，$f'(x) < 0$，当 $-1 < x < 1$ 时，$f'(x) > 0$，当 $x > 1$ 时，$f'(x) < 0$. 所以，函数在 $x = -1$ 处取得极小值，在 $x = 1$ 取得极大值，故 $x_1 = -1, x_2 = 1, f(-1) = 0, f(1) = 4$. 所以，点 A、B 的坐标为 $A(-1, 0)$、$B(1, 4)$.

（Ⅱ）设 $P(m, n)$，$Q(x, y)$，$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-1 - m, -n) \cdot (1 - m, 4 - n) = m^2 - 1 + n^2 - 4n = 4$，$k_{PQ} = -\frac{1}{2}$，所以 $\frac{y - n}{x - m} = -\frac{1}{2}$，又 PQ 的中点在 $y = 2(x - 4)$ 上，所以 $\frac{y + m}{2} = 2\left(\frac{x + n}{2} - 4\right)$，消去 m、n 得 $(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

点评　此题以函数的导数和极值为中介，利用向量构建动点的轨迹，凭借对称建立相关点之间的联系，是一个典型的轨迹问题. 该题有机融合了函数、导数、向量及解析几何知识，将这几块内容糅合得非常和谐，且蕴含着对数学思想方法和考生思维素质的考查，可以有效检测考生的创新意识及对中学数学知识中所蕴涵的数学思想和方法的掌握程度.

【例 13】（湖南卷，文科 19 题）已知函数 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 1 - \frac{3}{a}$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若曲线 $y = f(x)$ 上两点 A、B 处的切线都与 y 轴垂直，且线段 AB 与 x 轴有公共点，求实数 a 的取值范围.

解析　（Ⅰ）由题设知 $a \neq 0$，$f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3ax(x - \frac{2}{a})$.

令 $f'(x) = 0$，得 $x_1 = 0$，$x_2 = \frac{2}{a}$.

① 当 $a > 0$ 时：

若 $x \in (-\infty, 0)$，则 $f'(x) > 0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是增函数；

若 $x \in (0,\frac{2}{a})$,则 $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{2}{a})$ 上是减函数;

若 $x \in (\frac{2}{a},+\infty)$,则 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2}{a},+\infty)$ 上是增函数.

② 当 $a<0$ 时:

若 $x \in (-\infty,\frac{2}{a})$,则 $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\frac{2}{a})$ 上是减函数;

若 $x \in (\frac{2}{a},0)$,则 $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(\frac{2}{a},0)$ 上是增函数;

若 $x \in (0,+\infty)$,则 $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)的讨论及题设知,曲线 $y=f(x)$ 上的两点 A、B 的纵坐标均为函数的极值,且函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$,$x=\frac{2}{a}$ 处分别是取得极值 $f(0)=1-\frac{3}{a}$,$f\left(\frac{2}{a}\right)=-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1$.

因为线段 AB 与 x 轴有公共点,所以 $f(0)\cdot f\left(\frac{2}{a}\right)\leqslant 0$. 即

$$\left(-\frac{4}{a^2}-\frac{3}{a}+1\right)\left(1-\frac{3}{a}\right)\leqslant 0$$

所以

$$\frac{(a+1)(a-3)(a-4)}{a^3}\leqslant 0$$

故 $a(a+1)(a-3)(a-4)\leqslant 0$,且 $a\neq 0$,解得 $-1\leqslant a<0$ 或 $3\leqslant a\leqslant 4$.

即所求实数 a 的取值范围是 $[-1,0)\cup[3,4]$.

点评 该题给出的是含参数的三次函数,符合文科考生的学习要求,但其中第(Ⅱ)问打破常规,不是直接给出 A、B 两点的纵坐标均为函数的极值,而是以几何语言叙述的形式来呈现,创设了新颖的情境.

【例 14】 (湖南卷,理科 20 题) 对 1 个单位质量的含污物体进行清洗,清洗前其清洁度(含污物体的清洁度定义为:$1-\frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量(含污物)}}$)为 0.8,要求洗完后的清洁度是 0.99. 有两种方案可供选择,方案甲:一次清洗;方案乙:分两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响,其质量变为 $a(1\leqslant a\leqslant 3)$. 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是 $\frac{x+0.8}{x+1}(x>a-1)$,用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\frac{y+ac}{y+a}$,其中 $c(0.8<c<0.99)$ 是该物体初次清洗后的清洁度.

(Ⅰ) 分别求出方案甲以及 $c=0.95$ 时方案乙的用水量,并比较哪一种方案用水量较少;

(Ⅱ) 若采用方案乙,当 a 为某定值时,如何安排初次与第二次清洗的用水量,使总用水量最少? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

解析 (Ⅰ) 设方案甲与方案乙的用水量分别为 x 与 z,由题设有 $\frac{x+0.8}{x+1}=0.99$,解得 $x=19$.

由 $c=0.95$ 得方案乙初次用水量为 3,第二次用水量 y 满足方程:

$\frac{y+0.95a}{y+a}=0.99$,解得 $y=4a$,故 $z=4a+3$. 即两种方案的用水量分别为 19 与 $4a+3$.

因为当 $1\leqslant a\leqslant 3$ 时,$x-z=4(4-a)>0$,即 $x>z$,故方案乙的用水量较少.

(Ⅱ) 设初次与第二次清洗的用水量分别为 x 与 y,类似(Ⅰ)得

$$x=\frac{5c-4}{5(1-c)},\ y=a(99-100c) \qquad ①$$

于是

$$x+y=\frac{5c-4}{5(1-c)}+a(99-100c)=\frac{1}{5(1-c)}+100a(1-c)-a-1$$

当 a 为定值时

$$x+y\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{5(1-c)}\times 100a(1-c)}-a-1=-a+4\sqrt{5a}-1$$

当且仅当$\frac{1}{5(1-c)}=100a(1-c)$时等号成立.此时$c=1+\frac{1}{10\sqrt{5a}}$(不合题意,舍去)或$c=1-\frac{1}{10\sqrt{5a}}\in(0.8,0.99)$.

将$c=1-\frac{1}{10\sqrt{5a}}$代入式①得$x=2\sqrt{5a}-1>a-1,y=2\sqrt{5a}-a$.

故$c=1-\frac{1}{10\sqrt{5a}}$时总用水量最少,此时第一次与第二次用水量分别为$2\sqrt{5a}-1$与$2\sqrt{5a}-a$,最少总用水量是$T(a)=-a+4\sqrt{5a}-1$.

当$1\leqslant a\leqslant 3$时,$T'(a)=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{a}}-1>0$,故$T(a)$是增函数(也可以用二次函数的单调性判断).这说明随着a值的增加,最少总用水量增加.

点评　该题取材于与人们日常生活密切相关的各种清洗问题,为贴近中学数学教学实际,设计此题时进行了模型的理想化、通俗化处理,考查的内容主要涉及函数、不等式及导数等知识,期望通过该试题揭示节约用水的两种有效途径,同时渗透着德育教育(教育考生要合理利用资源).

【例 15】（全国卷Ⅰ,理科 21 题）已知函数$f(x)=\frac{1+x}{1-x}e^{-ax}$.

（Ⅰ）设$a>0$,讨论$y=f(x)$的单调性;

（Ⅱ）若对任意$x\in(0,1)$恒有$f(x)>1$,求a的取值范围.

解析　（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$f'(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)(e^{-ax})+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'(e^{-ax})=-a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)e^{-ax}+\frac{2}{(1-x)^2}e^{-ax}=$$

$$\frac{e^{-ax}}{(1-x)^2}\times[ax^2+(2-a)]$$

因为$\frac{e^{-ax}}{(1-x)^2}>0$(其中$x\neq 1$)恒成立,所以$f'(x)>0\Leftrightarrow ax^2+(2-a)>0$.

(1) 当$0<a<2$时,$f'(x)>0$在$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$上恒成立,所以$f(x)$在$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$上为增函数;

(2) 当$a=2$时,$f'(x)>0$在$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$上恒成立,所以$f(x)$在$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$上为增函数;

(3) 当$a>2$时,$ax^2+(2-a)>0$的解为$(-\infty,-t)\cup(t,1)\cup(1,+\infty)$(其中$t=\sqrt{1-\frac{2}{a}}$).

所以$f(x)$在各区间内的增减性如表 1.

表 1

区间	$(-\infty,-t)$	$(-t,t)$	$(t,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$的符号	+	-	+	+
$f(x)$的单调性	增函数	减函数	增函数	增函数

（Ⅱ）显然$f(0)=1$.

(1) 当$0<a\leqslant 2$时,$f(x)$在区间$[0,1)$上是增函数,所以对任意$x\in(0,1)$都有$f(x)>f(0)$;

(2) 当$a>2$时,$f(t)$是$f(x)$在区间$[0,1)$上的最小值,即$f(t)<f(0)$,这与题目要求矛盾;

(3) 若$a<0$,$f(x)$在区间$[0,1)$上是增函数,所以对任意$x\in(0,1)$都有$f(x)>f(0)$.

综合(1)、(2)、(3),a的取值范围为$(-\infty,2]$.

点评　该题是一道函数综合题,针对a的不同范围求函数的单调区间,是函数思想、分类与整合思想的重要体现.

【例16】（全国卷Ⅰ，文科22题）设 a 为实数，函数 $f(x)=x^3-ax^2+(a^2-1)x$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 都是增函数，求 a 的取值范围.

解析 $f'(x)=3x^2-2ax+(a^2-1)$，其判别式 $\Delta=4a^2-12a^2+12=12-8a^2$.

① 若 $\Delta=12-8a^2=0$，即 $a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，当 $x\in(-\infty,\frac{a}{3})$ 或 $x\in(\frac{a}{3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为增函数，所以 $a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

② 若 $\Delta=12-8a^2<0$，恒有 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为增函数，所以 $a^2>\frac{3}{2}$，即 $a\in(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2})\cup(\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$.

③ 若 $\Delta=12-8a^2>0$，即 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\frac{a-\sqrt{3-2a^2}}{3}$，$x_2=\frac{a+\sqrt{3-2a^2}}{3}$.

当 $x\in(-\infty,x_1)$ 或 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数；当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数.

依题意 $x_1\geqslant 0$ 且 $x_2\leqslant 1$. 由 $x_1\geqslant 0$ 得 $a\geqslant\sqrt{3-2a^2}$，解得 $1\leqslant a<\frac{\sqrt{6}}{2}$.

由 $x_2\leqslant 1$ 得 $\sqrt{3-2a^2}\leqslant 3-a$，解得 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<a<\frac{\sqrt{6}}{2}$，从而 $a\in[1,\frac{\sqrt{6}}{2})$.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty)\cup[1,\frac{\sqrt{6}}{2})$，即 $a\in(-\infty,-\frac{\sqrt{6}}{2}]\cup[1,\infty)$.

点评 此题是三次函数与导数结合综合性比较高的题目，主要考查函数的单调性质以及导函数的概念和运用，综合考查利用所学知识分析问题解决问题的能力以及运算能力，是一道区分度很强的考题，体现了压轴题的特点.

【例17】（广东卷，20题）A 是定义在 $[2,4]$ 上且满足如下条件的函数 $\varphi(x)$ 组成的集合：① 对任意的 $x\in[1,2]$，都有 $\varphi(2x)\in(1,2)$；② 存在常数 $L(0<L<1)$，使得对任意的 x_1、$x_2\in[1,2]$，都有 $|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$.

（Ⅰ）设 $\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x}$，$x\in[2,4]$，证明：$\varphi(x)\in A$；

（Ⅱ）设 $\varphi(x)\in A$，如果存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $x_0=\varphi(2x_0)$，那么这样的 x_0 是唯一的；

（Ⅲ）设 $\varphi(x)\in A$，任取 $x_1\in(1,2)$，令 $x_{n+1}=\varphi(2x_n)$，$n=1,2,\cdots$. 证明：给定正整数 k，对任意的正整数 p，成立不等式 $|x_{k+p}-x_k|\leqslant\frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$.

解析 （Ⅰ）对任意 $x\in[1,2]$，$\varphi(2x)=\sqrt[3]{1+2x}$，$x\in[1,2]$，$\sqrt[3]{3}\leqslant\varphi(2x)\leqslant\sqrt[3]{5}$，$1<\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{5}<2$，所以 $\varphi(2x)\in(1,2)$. 对任意的 x_1，$x_2\in[1,2]$，有

$$|\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|=|x_1-x_2|\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}}$$

$$3<\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}$$

所以
$$0<\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}}<\frac{2}{3}$$

令
$$\frac{2}{\sqrt[3]{(1+2x_1)^2}+\sqrt[3]{(1+2x_1)(1+x_2)}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}}=L$$

$$0<L<1,\ |\varphi(2x_1)-\varphi(2x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$$

所以
$$\varphi(x)\in A$$

（Ⅱ）反证法：设存在两个 x_0、$x'_0\in(1,2)$，$x_0\neq x'_0$ 使得 $x_0=\varphi(2x_0)$，$x'_0=\varphi(2x'_0)$，则由 $|\varphi(2x_0)-$

$\varphi(2x'_0)|\leqslant L|x_0-x'_0|$，得 $|x_0-x'_0|\leqslant L|x_0-x'_0|$，所以 $L\geqslant 1$，矛盾，故结论成立.

（Ⅲ）
$$|x_3-x_2|=|\varphi(2x_2)-\varphi(2x_1)|\leqslant L|x_2-x_1|$$

所以
$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant L^{n-1}|x_2-x_1|$$

$$|x_{k+p}-x_k|=|(x_{k+p}-x_{k+p-1})+(x_{k+p-1}-x_{k+p-2})+\cdots+(x_{k+1}-x_k)|\leqslant \frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|\leqslant$$
$$|x_{k+p}-x_{k+p-1}|+|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}|+\cdots+|x_{k-1}-x_k|\leqslant$$
$$L^{k+p-2}|x_2-x_1|+L^{k+p-3}|x_2-x_1|+\cdots+$$
$$L^{k-1}|x_2-x_1|\leqslant\frac{L^{k-1}}{1-L}|x_2-x_1|$$

点评　这道题从数学学科的整体高度和思维价值的高度来设计问题，对数学基础知识和基本能力的考查达到了必要的深度.该题具有明显的高等数学背景，属于压缩映像不动点问题，此类问题历来是考生最惧怕的问题，对代数推理能力的要求较高，是命题组老师精心设计的一道试题，也是未来高考命题的一种走向，旨在考查考生进一步学习的潜能.

3. 以"数列"为背景

【例 18】（北京卷，理科 20 题）在数列 $\{a_n\}$ 中，若 a_1、a_2 是正整数，且 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，$n=3,4,5,\cdots$，则称 $\{a_n\}$ 为"绝对差数列".

（Ⅰ）举出一个前 5 项不为零的"绝对差数列"（只要求写出前 10 项）；

（Ⅱ）若"绝对差数列" $\{a_n\}$ 中，$a_{20}=3$，$a_{21}=0$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，$n=1,2,3,\cdots$，分别判断当 $n\to\infty$ 时，a_n 与 b_n 的极限是否存在，如果存在，求出其极限值；

（Ⅲ）证明：任何"绝对差数列"中总含有无穷多个为零的项.

解析　（Ⅰ）$a_1=3,a_2=1,a_3=2,a_4=1,a_5=1,a_6=0,a_7=1,a_8=1,a_9=0,a_{10}=1$（答案不唯一）.

（Ⅱ）因为在绝对差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_{20}=3$，$a_{21}=0$，所以自第 20 项开始，该数列是 $a_{20}=3$，$a_{21}=0$，$a_{22}=3$，$a_{22}=3$，$a_{24}=0$，$a_{25}=3$，$a_{26}=3$，$a_{27}=0$，$\cdots$.

即自第 20 项开始，每三个相邻的项周期地取值 3，0，3. 所以当 $n\to\infty$ 时，a_n 的极限不存在. 当 $n\geqslant 20$ 时，$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=6$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$.

（Ⅲ）根据定义，数列 $\{a_n\}$ 必在有限项后出现零项. 证明如下.

假设 $\{a_n\}$ 中没有零项，由于 $a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$，所以对于任意的 n，都有 $a_n\geqslant 1$，从而

当 $a_{n-1}>a_{n-2}$ 时，$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\leqslant a_{n-1}-1\ (n\geqslant 3)$；

当 $a_{n-1}<a_{n-2}$ 时，$a_n=a_{n-2}-a_{n-1}\leqslant a_{n-2}-1\ (n\geqslant 3)$.

即 a_n 的值要么比 a_{n-1} 至少小 1，要么比 a_{n-2} 至少小 1.

令 $C_n=\begin{cases}a_{2n-1}(a_{2n-1}>a_{2n})\\a_{2n}(a_{2n-1}<a_{2n})\end{cases}$，$n=1,2,3,\cdots$，则 $0<C_n\leqslant C_{n-1}-1\ (n=2,3,4,\cdots)$.

由于 C_1 是确定的正整数，这样减少下去，必然存在某项 $C_k<0$，这与 $C_n>0\ (n=1,2,3,\cdots)$ 矛盾. 从而 $\{a_n\}$ 必有零项. 若第一次出现的零项为第 n 项，记 $a_{n-1}=A\ (A\neq 0)$，则自第 n 项开始，每三个相邻的项周期地取值 0，A，A，即 $\begin{cases}a_{n+3k}=0\\a_{n+3k+1}=A\\a_{n+3k+2}=A\end{cases}$，$k=0,1,2,3,\cdots$，所以绝对差数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个为零的项.

点评　本题虽然也是一道新题，但是用的是学生常见的数列做依托，这样的题目都是比较新颖的. 这道题先给出"绝对差数列"，从特殊的绝对差数列过渡到第二问，若绝对差数列满足 $a_{20}=3$，$a_{21}=0$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，a_n 与 b_n 的极限是否存在，第三问又把问题推到高峰. 同时此题也关注了学生能否进行研究性学习，既考查了学生探究能力、实践能力和应用新知识的能力，又对学生理性思

维和创新意识进行了综合考查，起到了选拔的作用.

4. 以"三角函数"为背景

【例 19】（全国卷 1，理科 16 题）设函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$. 若 $f(x)+f'(x)$ 是奇函数，则 $\varphi=$ ________.

解析 $$f'(x)=-\sin(\sqrt{3}x+\varphi)(\sqrt{3}x+\varphi)'=-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)$$

$$h(x)=f(x)+f'(x)=2\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos(\sqrt{3}x+\varphi)-\sin\frac{\pi}{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)\right]=2\cos\left(\sqrt{3}x+\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$$

要使 $h(x)$ 为奇函数，需且仅需 $\varphi+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

又 $0<\varphi<\pi$，所以 k 只能取 0，从而 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

点评 此题结合导数、函数的奇偶性考查了函数的基本性质，令人耳目一新.

【例 20】（湖南卷，理科 16 题）如图 3，D 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点，$AB=AD$，记 $\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$.

（Ⅰ）证明：$\sin\alpha+\cos 2\beta=0$；（Ⅱ）若 $AC=\sqrt{3}DC$，求 β 的值.

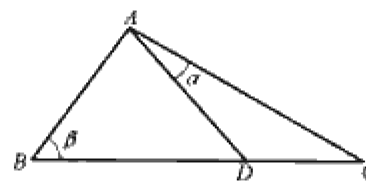


图 3

解析 （Ⅰ）如图 3，因为 $\alpha=\frac{\pi}{2}-(\pi-2\beta)=2\beta-\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\alpha=\sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\beta$，即 $\sin\alpha+\cos 2\beta=0$.

（Ⅱ）在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理得

$$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)}\Rightarrow\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}DC}{\sin\beta}$$

所以

$$\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha$$

由（Ⅰ）得 $\sin\alpha=-\cos 2\beta$，所以

$$\sin\beta=-\sqrt{3}\cos 2\beta=-\sqrt{3}(1-2\sin^2\beta)$$

即

$$2\sqrt{3}\sin^2\beta-\sin\beta-\sqrt{3}=0$$

解得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\beta=\frac{\pi}{3}$.

点评 本题虽是考查三角函数的相关问题，但在形式和解决问题的途径上有所创新；第（Ⅱ）问虽然是计算问题，但主要考查的是如何选择正确的思维方向以及根据公式合理变形的能力.

【例 21】（湖南卷，理科 19 题）已知函数 $f(x)=x-\sin x$，数列 $\{a_n\}$ 满足：$0<a_1<1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$n=1,2,3,\cdots$. 证明：（Ⅰ）$0<a_{n+1}<a_n<1$；（Ⅱ）$a_{n+1}<\frac{1}{6}a_n^3$.

证明 （Ⅰ）先用数学归纳法证明 $0<a_n<1$，$n=1,2,3,\cdots$.

① 当 $n=1$ 时，由已知显然结论成立.

② 假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $0<a_k<1$. 因为 $0<x<1$ 时 $f'(x)=1-\cos x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数. 又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，从而 $f(0)<f(a_k)<f(1)$，即 $0<a_{k+1}<1-\sin 1<1$. 故 $n=k+1$ 时，结论成立. 由①②可知，$0<a_n<1$ 对一切正整数都成立. 又因为 $0<a_n<1$ 时，$a_{n+1}-a_n=a_n-\sin a_n-a_n=-\sin a_n<0$，所以 $a_{n+1}<a_n$，综上所述 $0<a_{n+1}<a_n<1$.

（Ⅱ）设函数 $g(x)=\sin x-x+\frac{1}{6}x^3$，$0<x<1$. 由（Ⅰ）知，当 $0<x<1$ 时，$\sin x<x$，从而

$$g'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}=-2\sin^2\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}>-2\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{2}=0$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数. 又 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(0)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)>0$

成立，于是 $g(a_n) > 0$，即 $\sin a_n - a_n + \frac{1}{6}a_n^3 > 0$，故 $a_{n+1} < \frac{1}{6}a_n^3$.

点评　此题给出的函数是一次函数与三角函数的结合，且比较自然地与数列、不等式、导数相融合，对考生在知识方面及思维方面的不断转化提出了较高要求，有较强的综合性和一定的思维深度．该题在"知识网络交汇点"命题，所涉及的知识点较多，内涵丰富，重点考查考生的推理论证能力，其中第(Ⅰ)问需要运用数学归纳法和已给函数的性质来证明，而第(Ⅱ)问则必须构造新的函数才能完成证明，对考生的思维能力要求更高．

5. 以"立体几何"为背景

【例22】（江苏卷，理科18题）请您设计一个帐篷．它下部的形状是高为1 m的正六棱柱，上部的形状是侧棱长为3 m的正六棱锥（图4）．试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时，帐篷的体积最大？

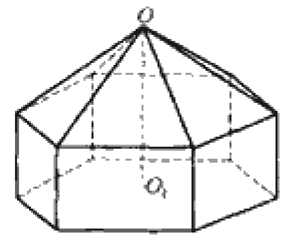


图 4

解析　设 OO_1 为 x m，则 $1 < x < 4$．由题设可得正六棱锥底面边长为

$$\sqrt{3^2-(x-1)^2}=\sqrt{8+2x-x^2}$$

故底面正六边形的面积为

$$6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{8+2x-x^2})^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot(8+2x-x^2)$$

帐篷的体积为

$$V(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(8+2x-x^2)\left[\frac{1}{3}(x-1)+1\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}(16+12x-x^3)$$

求导得 $V'(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(12-3x^2)$．令 $V'(x)=0$，解得 $x=-2$（不合题意，舍去），$x=2$．当 $1<x<2$ 时，$V'(x)>0$，$V(x)$ 为增函数；当 $2<x<4$ 时，$V'(x)<0$，$V(x)$ 为减函数．所以当 $x=2$ 时，$V(x)$ 最大．

答：当 OO_1 为2 m时，帐篷的体积最大，最大体积为 $16\sqrt{3}$ m³．

点评　本题主要考查利用导数研究函数的最值的基础知识，以及运用数学知识解决实际问题的能力，关于帐篷体积的最大值就是要先将体积表达式求解出来，然后用导数知识加以解决．

【例23】（湖南卷，理科、文科18题）已知两个正四棱锥 $P-ABCD$（图5）与 $Q-ABCD$（图7）的高分别为1和2，$AB=4$．

（Ⅰ）证明：$PQ\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求异面直线 AQ 与 PB 所成的角；

（Ⅲ）求点 P 到平面 QAD 的距离．

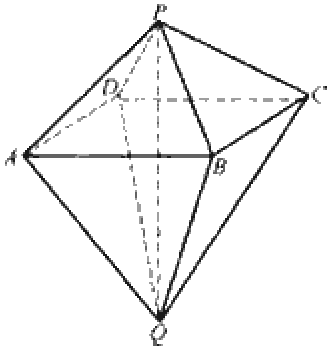


图 5

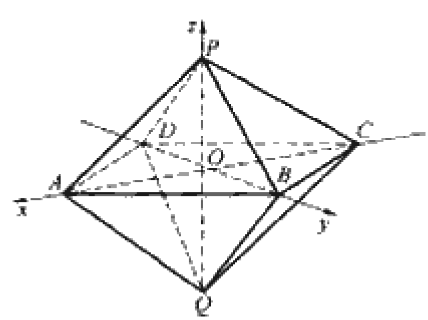


图 6

解法1　（Ⅰ）联结 AC、BD，设 $AC\cap BD=O$．由 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 都是正四棱锥，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$QO\perp$ 平面 $ABCD$．从而 P、O、Q 三点在一条直线上，所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$．

（Ⅱ）由题设知，$ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$．由（Ⅰ），$PQ\perp$ 平面 $ABCD$，故可分别以直线 CA、DB、QP 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系（图 6），由题设条件，相关各点的坐标分别是 $P(0,0,1)$、$A(2\sqrt{2},0,0)$、$Q(0,0,-2)$、$B(0,2\sqrt{2},0)$．所以 $\overrightarrow{AQ}=(-2\sqrt{2},0,-2)$，$\overrightarrow{PB}=(0,2\sqrt{2},-1)$，于是

$$\cos\langle\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AQ}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

从而异面直线 AQ 与 PB 所成的角是 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$．

（Ⅲ）由（Ⅱ），点 D 的坐标是 $(0,-2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AD}=(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PQ}=(0,0,-3)$，设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 QAD 的一个法向量．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sqrt{2}x+z=0\\ x+y=0\end{cases}$．

取 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-\sqrt{2})$．所以点 P 到平面 QAD 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

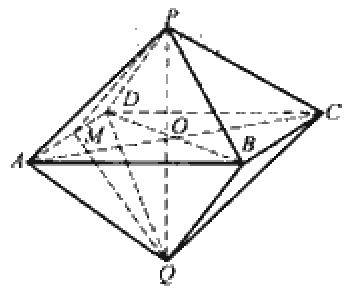


图 7

解法 2　（Ⅰ）取 AD 的中点 M，联结 PM、QM（图 7）．因为 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 都是正四棱锥，所以 $AD\perp PM$，$AD\perp QM$，从而 $AD\perp$ 平面 PQM．又 $PQ\subset$ 平面 PQM，所以 $PQ\perp AD$．同理 $PQ\perp AB$，所以 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$．

（Ⅱ）联结 AC、BD，设 $AC\cap BD=O$，由 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$ 及正四棱锥的性质可知 O 在 PQ 上，从而 P、A、Q、C 四点共面．取 OC 的中点 N，联结 PN．

因为 $\frac{PO}{OQ}=\frac{1}{2}$，$\frac{NO}{OA}=\frac{NO}{OC}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{PO}{OQ}=\frac{NO}{OA}$，从而 $AQ\,/\!/\,PN$．$\angle BPN$（或其补角）是异面直线 AQ 与 PB 所成的角．联结 BN，因为

$$PB=\sqrt{OB^2+OP^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1}=3$$

$$PN=\sqrt{ON^2+OP^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$$

$$BN=\sqrt{OB^2+ON^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{10}$$

所以

$$\cos\angle BPN=\frac{PB^2+PN^2-BN^2}{2PB\cdot PN}=\frac{9+3-10}{2\times3\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

从而异面直线 AQ 与 PB 所成的角是 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$．

（Ⅲ）由（Ⅰ）知，$AD\perp$ 平面 PQM，所以平面 $PQM\perp$ 平面 QAD．过 P 作 $PH\perp QM$ 于 H，则 $PH\perp$ 平面 QAD，所以 PH 的长为点 P 到平面 QAD 的距离．联结 OM，则 $OM=\frac{1}{2}AB=2=OQ$，所以 $\angle MQP=45^\circ$．又 $PQ=PO+QO=3$，于是 $PH=PQ\sin45^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

即点 P 到平面 QAD 的距离是 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

点评　这道立体几何题是以两个共底面的正四棱锥"叠"在一起的组合图形为载体，形式新颖，另外，该题的第（Ⅰ）问考查了利用正棱锥的概念和性质等基础知识来证明直线与平面垂直．要求考生熟悉、理解教材中的定义，对高考备考师生只顾陷入"题海"是一种警示．

6．以"解析几何"为背景

【例 24】（全国卷 1，20 题）在平面直角坐标系 xOy 中，有一个以 $F_1(0,-\sqrt{3})$ 和 $F_2(0,\sqrt{3})$ 为焦点、

离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$的椭圆. 设椭圆在第一象限的部分为曲线 C, 动点 P 在 C 上, C 在点 P 处的切线与 x、y 轴的交点分别为 A、B, 且向量$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. 求:

(Ⅰ)点 M 的轨迹方程;(Ⅱ)$|\overrightarrow{OM}|$的最小值.

解析　(Ⅰ)椭圆方程可写为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$, 式中 $a>b>0$, 且$\begin{cases}a^2-b^2=3\\ \frac{\sqrt{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$, 得 $a^2=4$, $b^2=1$, 所以曲线 C 的方程为$x^2+\frac{y^2}{4}=1(x>0,y>0)$, $y=2\sqrt{1-x^2}(0<x<1)$, $y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$.

设 $P(x_0,y_0)$, 因 P 在 C 上, 有 $0<x_0<1$, $y_0=2\sqrt{1-x_0^2}$, $y'|_{x=x_0}=-\frac{4x_0}{y_0}$, 得切线 AB 的方程为 $y=-\frac{4x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$. 设 $A(x,0)$ 和 $B(0,y)$, 由切线方程得 $x=\frac{1}{x_0}$, $y=\frac{4}{y_0}$.

由$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$得 M 的坐标为 (x,y), 由 x_0、y_0 满足 C 的方程, 得点 M 的轨迹方程为

$$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1, x>1, y>2$$

(Ⅱ)因为

$$|\overrightarrow{OM}|^2=x^2+y^2, y^2=\frac{4}{1-\frac{1}{x^2}}=4+\frac{4}{x^2-1}$$

所以

$$|\overrightarrow{OM}|^2=x^2-1+\frac{4}{x^2-1}+5\geqslant 4+5=9$$

且当 $x^2-1=\frac{4}{x^2-1}$, 即 $x=\sqrt{3}>1$ 时, 上式取等号. 故 $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值为 3.

点评　本题主要考查直线与椭圆的位置关系. 具体考查椭圆的基础知识, 求轨迹方程的方法, 向量加法及几何意义, 函数最值等内容. 此题较往年更有新意, 它体现了单题的综合性, 重视数学知识的多元联系, 在平面向量、函数、导数、圆锥曲线、曲线的切线、不等式等知识的交汇处设计试题, 体现了知识的横向联系, 多角度、多层次考查了考生的综合能力, 可使不同层次的考生得以区分, 是历年来此类问题最成功的题目之一.

7. 以"排列、组合及二项式定理"为背景

【例 25】　(湖北卷, 理科 15 题)将杨辉三角中的每一个数 C_n^r 都换成分数$\frac{1}{(n+1)C_n^r}$, 就得到一个如图 8 所示的分数三角形, 称为莱布尼茨三角形. 从莱布尼茨三角形可看出$\frac{1}{(n+1)C_n^r}+\frac{1}{(n+1)C_n^x}=\frac{1}{nC_{n-1}^r}$, 其中 $x=$ ______.

令 $a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\cdots+\frac{1}{nC_{n-1}^2}+\frac{1}{(n+1)C_n^2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ______.

$$\frac{1}{1}$$
$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{20}\quad\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{6}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{60}\quad\frac{1}{30}\quad\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{7}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{140}\quad\frac{1}{105}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{7}$$
$$\cdots$$

图 8

解析　本题考查考生的类比归纳及推理能力, 第一问对比杨辉三角的性质通过观察、类比、归纳可知莱布尼茨三角形中每一行中的任一数都等于其"脚下"两数的和, 故此时 $x=r+1$, 第二问实质上是求莱布尼茨三角形中从第三行起每一行的倒数第三项的和, 即

$$a_n=\frac{1}{3C_2^0}+\frac{1}{4C_3^1}+\frac{1}{5C_4^2}+\cdots+\frac{1}{nC_{n-1}^{n-3}}+\frac{1}{(n+1)C_n^{n-2}}$$

根据第一问所推出的结论只须在原式基础上增加一项$\frac{1}{(n+1)C_n^{n-1}}$，则由每一行中的任一数都等于其"脚下"两数的和，结合给出的数表可逐次向上求和为$\frac{1}{2}$，故 $a_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)C_n^{n-1}}$，从而

$$x=r+1,\lim_{x\to\infty}a_n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)C_n^{n-1}}\right]=\frac{1}{2}$$

也可用特殊值法：令 $n=3$，归纳出 $x=r+1$，再用裂项求和求极限求出$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$的值.

点评 本题的莱布尼茨三角形，取材于教材第三册（选修Ⅱ）（人教版）的研究性课题"杨辉三角"，考查观察推理能力和合情猜测意识，融合了新课标、新理念，同时一题二空也是本题的创新之处.

8. 以"概率、概率统计"为背景

【例 26】（湖北卷，理科 19 题）在某校举行的数学竞赛中，全体参赛学生的竞赛成绩近似服从正态分布 $N(70,100)$（表 2）. 已知成绩在 90 分以上（含 90 分）的学生有 12 名.

（Ⅰ）试问此次参赛的学生总数约为多少人？

（Ⅱ）若该校计划奖励竞赛成绩排在前 50 名的学生，试问设奖的分数线约为多少分？

表 2 可共查阅的（部分）标准正态分布表 $\Phi(x_0)=P(x<x_0)$

x_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.2	0.884 9	0.886 9	0.888	0.890 7	0.892 5	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9	0.911 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1	0.926 5	0.927 8	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 2	0.976 7
2.0	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7

解析 （Ⅰ）设参赛学生的分数为 ξ，因为 $\xi\sim N(70,100)$，由条件知

$$P(\xi\geqslant 90)=1-P(\xi<90)=1-F(90)=1-\Phi\left(\frac{90-70}{10}\right)=1-\Phi(2)=1-0.977\,2=0.022\,8$$

这说明成绩在 90 分以上（含 90 分）的学生人数约占全体参赛人数的 2.28%，因此，参赛总人数约为 $\frac{12}{0.0228}\approx 526$（人）.

（Ⅱ）假定设奖的分数线为 x 分，则

$$P(\xi\geqslant x)=1-P(\xi<x)=1-F(x)=1-\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=\frac{50}{526}=0.095\,1$$

即 $\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=0.9049$，查表得$\frac{x-70}{10}\approx 1.31$，解得 $x=83.1$.

故设奖得分数线约为 83 分.

点评 本题选用了考生比较熟悉的数学竞赛作为命题情境，主要考查正态分布、对立事件的概念和标准正态分布表的查阅，考查运用概率统计知识解决实际问题的能力."正态分布"这个知识点在平时的训练中充其量以小题的形式出现，各级各类模拟卷中也"冷待"了这个知识点，绝大多数考生不会动笔，这类试题在日常教学中很少受到老师青睐，总复习时也极少训练，所以学生答题时犹如老虎吃天无从下手，有的考生干脆放弃了这道 10 分题，令人感到十分可惜. 此种现象对当前数学教学来说确实值得深刻反思.

这种题型在高考中首次作为解答题出现，是比较新颖的．它改变了过去以随机变量的分布列、数学期望和方差为背景的模式，选用高中数学教材第三册（选修Ⅰ）（人教社 2001 年版）第一章的小结与复习中一道参考例题为原型改编设计而成．这道题所涉及的统计问题虽属于大学阶段高等数学的内容，但在 2001 年全国各地的新课改教材中就已经出现，只不过因其属于"非主干知识"，2004 年、2005 年的全国部分地区高考试题中只出现过分值不高的小题（从 1995 年开始，全国高考试卷中就开始出现了考查学生解决实际问题能力的应用大题，近几年更是出现概率、统计等高等数学中的知识为背景的应用问题．但这些知识并没有超出教学大纲和全国高考考试大纲），直到 2006 年湖北卷将"正态分布"等概率统计知识以大题形式出现在高考试卷上虽然令广大师生始料不及，但命题者将这种实用性很强的知识引入高考，其"学以致用"的导向是正确的，应该理解和接受．以往高考试卷上的此类应用题都是确定性的，而 2006 年湖北卷是随机性的，与实际结合更紧密．概率、统计、极值等大学高等数学的内容"下放"到高中并进入教学大纲、高考考试大纲，也是近年来的新现象，这种"下放"是现代社会知识更新的体现，也是一种国际化趋势，它对高中数学教学提出了更高要求．

(二)2007年全国高考数学试题“亮点”品评

纵观2007年全国高考各地文、理科数学试卷，有以下五大“亮点”：

常规问题——推陈出新

应用题型——悄悄变脸

信息迁移——新旧融合

探索能力——动静交叉

思维能力——学科综合

2007年全国高考数学全国卷和各独立命题的省市卷虽然平淡、平稳，但考查考生的学习潜能、创新意识和探究精神的“亮点”（主要指面貌比较新，即在设文的方式上、在情景的设置上等有一定的新意）试题不少，本文着重对此精选数例，同2006年一样，笔者仍然按照试题所涉及的数学背景知识进行分类解析品评，还是期望通过2007年高考命题的新变化推动中学数学教学（特别是高考复习课教学）改革和课程改革，引导中学数学教学向全面培养学生数学素养和能力的方向发展.

1. 以“集合”为背景

【例1】 设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，$S_1,S_2,\cdots,S_k$ 都是 M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$（$i\neq j$，i、$j\in\{1,2,3,\cdots,k\}$），都有 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$（$\min\{x,y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者），则 k 的最大值是（　　）.

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

解析　这道题目给出定义的一种运算，因此理解这种运算是首要工作.

解法1　因为 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，依题意含两个元素的子集应从 M 中选4个元素，有 $C_6^4=15$ 个，又 $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$，$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$，$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$，故需要排除4个，则 k 的最大值是11. 故选B.

解法2　本题是信息给予题. 解决本题的关键是对“$\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$（$\min\{x,y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者）”这句话的理解. 首先，从6个不同元素中取出2个不同元素的组合共有 $C_6^2=15$ 种. 条件 $\min\left\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\right\}\neq\min\left\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\right\}$ 表示对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$，若 $\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}$（不妨设 $a_i<b_i$，$a_j<b_j$），则 S_i 和 S_j 只能算1种. 这样，在 $\{1,2\}$、$\{2,4\}$、$\{3,6\}$ 中；在 $(1,3)$、$\{2,6\}$ 中；在 $\{2,3\}$、$\{4,6\}$ 中：

1与2，2与4，3与6，与信息相矛盾；1与3，2与6，与信息相矛盾；2与3，4与6，与信息相矛盾.

这三类中各保一个，其他排除，故排除4个，所以 k 的最大值为 $15-(2+1+1)=11$，故选B.

点评　本题是定义型的信息迁移题，是排列组合与集合知识（集合的特征：确定性、互异性、无序性）的综合运用，首先要理解题意，问题才会变得简单，不重不漏是解题之关键. 这类问题的立足点源于教材的基础知识、基本技能的认知水平，通过即时学习、即时理解和掌握新知识，命题的落脚点在于体现能力的迁移，把数学的学习能力、探究能力、应用能力和创造能力有机地结合在一起，从而检测考生进一步学习的潜能，应该说此题区分度是较为明显的.

【例2】 设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$，在 S 上定义运算$\oplus$为：$A_i\oplus A_j=A_k$，其中 k 为 $i+j$ 被4除的余数，$i、j=0,1,2,3$，则满足关系式$(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为（　　）

A.4　　　　B.3　　　　C.2　　　　D.1

解析 因为$(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$，$x\oplus x=A_k$，所以 $A,k\oplus A_2=A_0$，$k=2$，即 $x\oplus x=A_2$，所以 $x=A_1$ 或 A_3。故选C. 也可采用检验法，将 A_0、A_1、A_2、A_3 代入所给等式$(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$，进行逐个试验.

点评 本题有着高等数学里《近世代数》的深刻背景，设计新颖，主要考查考生对知识的迁移能力，能够很好地考查学生的知识水平和理解能力，此题融入了新教学大纲的理念，汲取了新课程中的新思想.

【例3】 中学数学中存在许多关系，比如"相等关系"、"平行关系"等. 如果集合 A 中元素之间的一个关系"～"满足以下三个条件：

(1) 自反性：对于任意 $a\in A$，都有 $a\sim a$；

(2) 对称性：对于 $a,b\in A$，若 $a\sim b$，则有 $b\sim a$；

(3) 传递性：对于 $a、b、c\in A$，若 $a\sim b$，$b\sim c$，则有 $a\sim c$.

则称"～"是集合 A 的一个等价关系. 例如"数的相等"是等价关系，而"直线的平行"不是等价关系（自反性不成立）. 请你再列出三个等价关系：________.

解析 此类题属新情境问题，答案不唯一. 本题的参考答案是：向量相等、集合相等、角度相等、图形全等、图形相似、命题充要条件等.

点评 此题特别之处是以高等数学《近世代数》中的"等价关系"的概念为背景，分析中学数学中的各种关系，从而考查考生的阅读理解能力，解答此题要求考生具有较强的联想类比能力. 题设中提到了"相等关系"、"平行关系"（也是命题者的有意提示），这就需要考生以此为思维起点，展开充分的联想，由"相等关系"想到："复数相等"、"向量相等"、"集合相等"、"角度相等"、"图形相等（即全等）"、"图形相似"、"命题相等（即充要条件）"等；由"平行关系"想到"非零向量的平行"、"平面平行"等. 只须对这些关系一一分析，不难得出正确答案.

【例4】 已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant 2)$，其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$，由 A 中的元素构成两个相应的集合：

$$S=\{(a,b)\mid a\in A,b\in A,a+b\in A\},T=\{(a,b)\mid a\in A,b\in A,a-b\in A\}$$

其中(a,b)是有序数对，集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n.

若对于任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P.

（Ⅰ）检验集合$\{0,1,2,3\}$与$\{-1,2,3\}$是否具有性质 P 并对其中具有性质 P 的集合，写出相应的集合 S 和 T；

（Ⅱ）对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leqslant\dfrac{k(k-1)}{2}$；

（Ⅲ）判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论.

解析 （Ⅰ）集合$\{0,1,2,3\}$不具有性质 P，集合$\{-1,2,3\}$具有性质 P，其相应的集合 S 和 T 是 $S=\{(-1,3),(3,-1)\}$，$T=\{(2,-1),(2,3)\}$.

（Ⅱ）首先，由 A 中元素构成的有序数对$\{a_i,a_j\}$共有 k^2 个.

因为 $0\notin A$，所以$(a_i,a_i)\notin T(i=1,2,\cdots,k)$；

又因为当 $a\in A$ 时，$-a\notin A$ 时，$-a\notin A$，所以当$(a_i,a_j)\in T$ 时，$(a_j,a_i)\notin T(i,j=1,2,\cdots,k)$.

从而，集合 T 中元素的个数最多为$\dfrac{1}{2}(k^2-k)=\dfrac{k(k-1)}{2}$，即 $n\leqslant\dfrac{k(k-1)}{2}$.

（Ⅲ）$m=n$，证明如下：

① 对于$(a,b)\in S$，根据定义，$a\in A$，$b\in A$，且 $a+b\in A$，从而$(a+b,b)\in T$.

如果(a,b)与(c,d)是S的不同元素,那么$a=c$与$b=d$中至少有一个不成立,从而$a+b=c+d$与$b=d$中也至少有一个不成立,故$(a+b,b)$与$(c+d,d)$也是T的不同元素.

可见,S中元素的个数不多于T中元素的个数,即$m\leqslant n$.

② 对于$(a,b)\in T$,根据定义,$a\in A,b\in A$,且$a-b\in A$,从而$(a-b,b)\in S$.如果(a,b)与(c,d)是T的不同元素,那么$a=c$与$b=d$中至少有一个不成立,从而$a-b=c-d$与$b=d$中至少有一个不成立,故$(a-b,b)$与$(c-d,d)$也是S的不同元素.

可见,T中元素的个数不多于S中元素的个数,即$n\leqslant m$,由①②可知,$m=n$.

点评 此题是一道信息迁移题(属新定义型),交汇考查了代数中的集合、不等式与解析几何中的点集等知识,考查了考生将数学概念迁移到不同情景下的探究能力.这类题目的特点是命题者通过文字或图表等给出中学数学内容中没有遇到过的新知识,这些新知识可以是新概念、新定义、新定理和新规则、新情境等,并且这类题的解题信息有可能不直接给出,它要求解题者要通过观察、阅读、归纳、探索进行迁移,即读懂新概念,理解新情境,获取有用的新信息,然后运用这些有用的信息进一步演算和推理,从而考查考生在新的信息和情境下,独立获取和运用新信息的能力、综合运用数学知识解决问题的能力和探索能力.信息迁移题,由于信息呈现的方式不同,又可分为定义信息型、图表信息型、图象图形信息型等.

2. 以"函数"为背景

【例5】 对于函数①$f(x)=\lg(|x-2|+1)$,②$f(x)=(x-2)^2$,③$f(x)=\cos(x+2)$,判断如下三个命题的真假:

命题甲:$f(x+2)$是偶函数;命题乙:$f(x)$在$(-\infty,2)$上是减函数,在$(2,+\infty)$上是增函数;命题丙:$f(x+2)-f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

能使命题甲、乙、丙均为真的所有函数的序号是( )

A.①③ B.①② C.③ D.②

解析 一一验证,即可作出正确判断,故选D.

点评 本题虽是常规,但在平平淡淡中全面考查了二次函数、对数函数、三角函数等重要的基本初等函数,综合考查了这些函数的定义域、单调性、奇偶性等性质.

【例6】 $f(x)$、$g(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的函数,$h(x)=f(x)+g(x)$,则"$f(x)$、$g(x)$均为偶函数"是"$h(x)$为偶函数"的( )

A.充要条件 B.充分而不必要的条件 C.必要而不充分的条件 D.既不充分也不必要的条件

解析 若$f(x)$、$g(x)$均为偶函数,则$f(-x)=f(x)$,$g(-x)=g(x)$,易知$h(-x)=h(x)$,所以$h(x)$为偶函数;反之不然,例如令$f(x)=x$,$g(x)=x^2-x$,则$h(x)=x^2$为偶函数,但$f(x)$、$g(x)$都不是偶函数,故选B.

点评 本题将命题之间的关系(充分、必要条件)和函数的奇偶性结合起来加以考查,相对难度增加.但是由前者($f(x)$、$g(x)$均为偶函数)推出后者($h(x)$为偶函数)较易,反之命题不真,只须举一个反例即可.对于本题而言,满足条件的反例较多.解答此题启示有二:一是举一反例便可说明命题不真,无需详细证明;二是同学们在高考复习时要掌握一些寻找反例的方法.

【例7】 图1是某汽车维修公司的维修点环形分布图.公司在年初分配给A、B、C、D四个维修点某种配件各50件.在使用前发现需将A、B、C、D四个维修点的这批配件分别调整为40、45、54、61件,但调整只能在相邻维修点之间进行,那么要完成上述调整,最少的调动件次(n件配件从一个维修点调整到相邻维修点的调动件次为n)为( )

A.15 B.16 C.17 D.18

解析 欲使调动量最小,必须把握两点:一是使调动的次数最少,二是使"中转量"最小,所以有

$A\xrightarrow{10次}D$，$B\xrightarrow{5次}C\xrightarrow{1次}D$，调动次数最少共 16 次，故选 C.

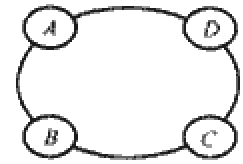


图 1

点评　这是一道探究型创新题(策略性开放题)，属于物流配送问题，主要考查合理利用合情推理去分析与判断实际生活中的资料优化型问题的求解策略，解答时没有现成可套用的公式，考生只能现学现用，在现场进行探索，如果发现了该题的实质(函数的最值问题)，就可通过对图形的探究，运用合情的推理进行简单的运算轻易获解.

【例 8】　某企业准备投产一批特殊型号的产品，已知该种产品的成本 C 与产量 q 的函数关系式为 $C=\frac{q^3}{3}-3q^2+20q+10(q>0)$. 该种产品的市场前景无法确定，有三种可能出现的情况，各种情形发生的概率及产品价格 p 与产量 q 的函数关系式如表 1 所示.

表 1

市场情形	概率	价格 p 与产量 q 的函数关系式
好	0.4	$p=164-3q$
中	0.4	$p=101-3q$
差	0.2	$p=70-4q$

设 L_1、L_2、L_3 分别表示市场情形好、中、差时的利润，随机变量 ξ_q 表示当产量为 q 而市场前景无法确定的利润.

(Ⅰ) 分别求利润 L_1、L_2、L_3 与产量 q 的函数关系式；

(Ⅱ) 当产量 q 确定时，求期望 $E\xi_q$；

(Ⅲ) 试问产量 q 取何值时，$E\xi_q$ 取得最大值.

解析　(Ⅰ) 由题意可得

$$L_1=(164-3q)\cdot q-\left(\frac{q^3}{3}-3q^2+20q+10\right)=-\frac{q^3}{3}+144q-10,q>0$$

同理可得　$$L_2=-\frac{q^3}{3}+81q-10(q>0),\quad L_3=-\frac{q^3}{3}+50q-10,q>0$$

(Ⅱ) 由期望定义可知

$$E\xi_q=0.4L_1+0.4L_2+0.2L_3=0.4\times\left(-\frac{q^3}{3}+144q-10\right)+$$
$$0.4\times\left(-\frac{q^3}{3}+81q-10\right)+0.2\times\left(-\frac{q^3}{3}+50q-10\right)=-\frac{q^3}{3}+100q-10$$

(Ⅲ) 由(Ⅱ)可知 $E\xi$ 是产量 q 的函数，设 $f(q)=E\xi_q=-\frac{q^3}{3}+100q-10(q>0)$，得 $f'(q)=-q^2+100$. 令 $f'(q)=0$ 解得 $q=10$，$q=-10$(舍去).

由题意及问题的实际意义(或当 $0<q<10$ 时，$f'(q)>0$；当 $q>10$ 时，$f(q)<0$)可知，当 $q=10$ 时，$f(q)$ 取得最大值，即 $E\xi_q$ 最大时的产量 q 为 10.

点评　本题从实际应用中抽象出一个函数模型，进而将函数、概率、数学期望、导数等众多数学基础知识交汇起来考查，难得一见.

【例 9】　已知 a 是实数，函数 $f(x)=2ax^2-2x-3-a$，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点，求实数 a 的取值范围.

解法 1　函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点，即方程 $f(x)=ax^2+2x-3-a=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解，当 $a=0$ 时，不符合题意，所以 $a\neq0$.

方程 $f(x)=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解 $\Leftrightarrow f(-1)\cdot f(1)\leqslant 0$ 或 $\begin{cases} af(-1)\geqslant 0 \\ af(1)\geqslant 0 \\ \Delta = 4+8a(3+a)\geqslant 0 \\ -\dfrac{1}{a}\in[-1,1] \end{cases}\Leftrightarrow 1\leqslant a\leqslant 5$ 或 $a\leqslant \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$ 或 $a\geqslant 5\Leftrightarrow a\leqslant \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$ 或 $a\geqslant 1$. 所以实数 a 的取值范围是 $a\leqslant \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$ 或 $a\geqslant 1$.

解法 2 当 $a=0$ 时,不符合题意,所以 $a\neq 0$. 又 $f(x)=2ax^2+2x-3-a=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解 $\Leftrightarrow (2x^2-1)a=3-2x$ 在 $[-1,1]$ 上有解 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}$ 在 $[-1,1]$ 上有解,问题转化为求函数 $y=\dfrac{2x^2-1}{3-2x}$ 在 $[-1,1]$ 上的值域;设 $t=3-2x$, $x\in[-1,1]$,则

$$2x=3-t,\ t\in[1,5],\ y=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t-3)^2-2}{t}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{7}{t}-6\right)$$

设 $g(t)=t+\dfrac{7}{t}$, $g'(t)=\dfrac{t^2-7}{t^2}$, $t\in[1,\sqrt{7})$ 时, $g'(t)<0$, 此函数 $g(t)$ 单调递减, $t\in(\sqrt{7},5]$ 时, $g'(t)>0$, 此函数 $g(t)$ 单调递增,所以 y 的取值范围是 $[\sqrt{7}-3,1]$. 所以 $f(x)=2ax^2+2x-3-a=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解 $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}\in[\sqrt{7}-3,1]\Leftrightarrow a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

点评 此题是一个含参数的一元二次函数零点问题,主要考查二次函数及其性质、一元二次方程、函数应用、解不等式等基础知识,考查数形结合、分类与整合的思想方法,以及抽象概括能力、运算求解能力,对思维的严谨性和全面性要求较高,解法多样,通过对参数的讨论和概括,深入地考查了考生的抽象概括能力.

【例 10】 已知 $A_n(a_n,b_n)(n\in\mathbf{N}^*)$ 是曲线 $y=e^x$ 上的点, $a_1=a$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且满足 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$, $a_n\neq 0$, $n=2,3,4,\cdots$.

(Ⅰ) 证明:数列 $\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}(n\leqslant 2)$ 是常数数列;

(Ⅱ) 确定 a 的取值集合 M,使 $a\in M$ 时,数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

(Ⅲ) 证明:当 $a\in M$ 时,弦 $A_nA_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的斜率随 n 单调递增.

解析 本题是以指数函数曲线为背景来研究数列问题. 第(Ⅰ)问,先把数列 $\{a_n\}$ 的和转化为项的关系,再通过 $A_n(a_n,b_n)$ 在曲线 $y=e^x$ 上转化为 $\{b_n\}$ 的项的关系而得到证明. 第(Ⅱ)问,在(Ⅰ)的基础上找数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的充要条件,再转化而得到集合 M. 第(Ⅲ)问,引入辅助函数,并利用求导研究单调性,再转化为弦的斜率的单调性问题.

(Ⅰ) 当 $n\geqslant 2$ 时,由已知得 $S_n^2-S_{n-1}^2=3n^2a_n$. 因 $a_n=S_n-S_{n-1}\neq 0$, 故

$$S_n+S_{n-1}=3n^2 \quad ①$$

于是

$$S_{n+1}+S_n=3(n+1)^2 \quad ②$$

由 ② - ① 得

$$a_{n+1}+a_n=6n+3 \quad ③$$

于是

$$a_{n+2}+a_{n+1}=6n+9 \quad ④$$

由 ④ - ③ 得 $a_{n+2}-a_n=6$, 所以

$$\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{e^{a_{n+2}}}{e^{a_n}}=e^{a_{n+2}-a_n}=e^6 \quad ⑤$$

即数列$\left\{\dfrac{b_{n+2}}{b_n}\right\}(n \geqslant 2)$是常数数列.

（Ⅱ）由①有$S_2+S_1=12$,所以$a_2=12-2a$.由③有$a_3+a_2=15,a_4+a_3=21$,所以$a_3=3+2a$,$a_4=18-2a$.而⑤表明:数列$\{a_{2k}\}$和$\{a_{2k+1}\}$分别是以a_2、a_3为首项,6为公差的等差数列,所以$a_{2k}=a_2+6(k-1)$,$a_{2k+1}=a_3+6(k-1)$,$a_{2k+2}=a_4+6(k-1)(k\in \mathbf{N}^*)$,数列$\{a_n\}$是单调递增数列$\Leftrightarrow a_1<a_2$且$a_{2k}<a_{2k+1}<a_{2k+2}$对任意的$k\in \mathbf{N}^*$成立$\Leftrightarrow a_1<a_2$且$a_2+6(k-1)<a_3+6(k-1)<a_4+6(k-1)\Leftrightarrow a_1<a_2<a_3<a_4\Leftrightarrow a<12-2a<3+2a<18-2a\Leftrightarrow \dfrac{9}{4}<a<\dfrac{15}{4}$.

即所求a的取值集合是$M=\left\{a\,\middle|\,\dfrac{9}{4}<a<\dfrac{15}{4}\right\}$.

（Ⅲ）**解法1**　弦A_nA_{n+1}的斜率为$k=\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{e^{a_{n+1}}-e^{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$,任取$x_0$,设函数$f(x)=\dfrac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}$,则

$$f'(x)=\frac{e^x(x-x_0)-(e^x-e^{x_0})}{(x-x_0)^2}$$

记
$$g(x)=e^x(x-x_0)-(e^x-e^{x_0})$$

则
$$g'(x)=e^x(x-x_0)+e^x-e^x=e^x(x-x_0)$$

当$x>x_0$时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(x_0,+\infty)$上为增函数;

当$x<x_0$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(-\infty,x_0)$上为减函数.

所以$x\neq x_0$时,$g(x)>g(x_0)=0$,从而$f'(x)>0$.所以$f(x)$在$(-\infty,x_0)$和$(x_0,+\infty)$上都是增函数.由（Ⅱ）知,$a\in M$时,数列$\{a_n\}$单调递增.

取$x_0=a_n$,因为$a_n<a_{n+1}<a_{n+2}$,所以$k_n=\dfrac{e^{a_{n+1}}-e^{a_n}}{a_{n+1}-a_n}<\dfrac{e^{a_{n+2}}-e^{a_n}}{a_{n+2}-a_n}$.

取$x_0=a_{n+2}$,因为$a_n<a_{n+1}<a_{n+2}$,所以$k_{n+1}=\dfrac{e^{a_{n+1}}-e^{a_{n+2}}}{a_{n+1}-a_{n+2}}>\dfrac{e^{a_n}-e^{a_{n+2}}}{a_n-a_{n+2}}$.

所以$k_n<k_{n+1}$,即弦$A_nA_{n+1}(n\in \mathbf{N}^*)$的斜率随$n$单调递增.

解法2　设函数$f(x)=\dfrac{e^x-e^{a_{n+1}}}{x-a_{n+1}}$,同解法1得,$f(x)$在$(-\infty,a_{n+1})$和$(a_{n+1},+\infty)$上都是增函数.所以

$$k_n=\frac{e^{a_n}-e^{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}<\lim_{x\to a_{n+1}^-}\frac{e^x-e^{a_{n+1}}}{x-a_{n+1}}=e^{a_{n+1}}$$

$$k_{n+1}=\frac{e^{a_{n+2}}-e^{a_{n+1}}}{a_{n+2}-a_{n+1}}>\lim_{x\to a_{n+1}^+}\frac{e^x-e^{a_{n+1}}}{x-a_{n+1}}=e^{a_{n+1}}$$

故$k_n<k_{n+1}$,即弦$A_nA_{n+1}(n\in \mathbf{N}^*)$的斜率随$n$单调递增.

点评　研究数学问题"转化"是个法宝,未知可以转化为已知,函数可以转化为数列,曲线可以转化为数列,两个数列之间可以互相转化,"和"与"项"可以互相转化,充要条件可以互相转化,数与形可以互相转化,…….本题新颖之处就是需要通过几道转化关后才能得以解决.因此,我们遇到很多数学问题,都可以恰当地运用"转化"这个法宝.

【例11】　已知函数$f(x)=x^2-4$,设曲线$y=f(x)$在点$(x_n,f(x_n))$处的切线与x轴的交点为$(x_{n+1},0)(n\in \mathbf{N}^*)$,其中$x_1$为正实数.（Ⅰ）用$x_n$表示$x_{n+1}$;（Ⅱ）求证:对一切正整数$n$,$x_{n+1}\leqslant x_n$的充要条件是$x_1\geqslant 2$;（Ⅲ）若$x_1=4$,记$a_n=\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$,证明:数列$\{a_n\}$成等比数列,并求数列$\{x_n\}$的通项公式.

解析　（Ⅰ）由题可得$f'(x)=2x$,所以过曲线上点$(x_0,f(x_0))$的切线方程为

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

即
$$y-(x_n^2-4)=2x_n(x-x_n)$$

令 $y=0$，得 $-(x_n^2-4)=2x_n(x_{n+1}-x_n)$，即 $x_n^2+4=2x_nx_{n+1}$，显然 $x_n\neq 0$，所以 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}$.

（Ⅱ）（必要性）若对一切正整数 n，$x_{n+1}\leqslant x_n$，则 $x_2\leqslant x_1$，即 $\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{2}{x_1}\leqslant x_1$，而 $x_1>0$，所以 $x_1^2\geqslant 4$，即有 $x_1\geqslant 2$.

（充分性）若 $x_1\geqslant 2>0$，由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}$，用数学归纳法易得 $x_n>0$.

从而 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{x_n}{2}\cdot\dfrac{2}{x_n}}=2(n\geqslant 1)$，即 $x_n\geqslant 2(n\geqslant 2)$，又 $x_1\geqslant 2$，所以 $x_n\geqslant 2(n\geqslant 2)$，于是

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}-x_n=\frac{4-x_n^2}{2x_n}=\frac{(2-x_n)(2+x_n)}{2x_n}\leqslant 0$$

即 $x_{n+1}\leqslant x_n$ 对一切正整数 n 成立.

（Ⅲ）由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}$，知 $x_{n+1}+2=\dfrac{(x_n+2)^2}{2x_n}$，同理，$x_{n+1}-2=\dfrac{(x_n-2)^2}{2x_n}$，故

$$\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=\left(\frac{x_n+2}{x_n-2}\right)^2$$

从而

$$\lg\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=2\lg\frac{x_n+2}{x_n-2}$$

即 $a_{n+1}=2a_n$，所以，数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，故 $a_n=2^{n-1}a_1=2^{n-1}\lg\dfrac{x_1+2}{x_1-2}=2^{n-1}\lg 3$，即 $\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}=2^{n-1}\lg 3$，从而 $\dfrac{x_n+2}{x_n-2}=3^{2n-1}$，所以 $x_n=\dfrac{2(3^{2n-1}+1)}{3^{2n-1}-1}$.

点评　该题的背景是用切线法（牛顿法）求解方程的近似根，将数列知识、函数知识、不等式知识和导数应用等知识融为一体，考查逻辑推理方法、考查代数运算能力，具有较高的区分度，只不过此题以数列问题提出，学生理解题意和下手解决并不困难.

【例 12】　设函数 $f(x)=x^2+b\ln(x+1)$，其中 $b\neq 0$.

（Ⅰ）当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时，判断函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的极值点；

（Ⅲ）证明：对任意的正整数 n，不等式 $\ln\left(\dfrac{1}{n}+1\right)>\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}$ 都成立.

解析　（Ⅰ）由题意知，$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=2x+\frac{b}{x+1}=\frac{2x^2+2x+b}{x+1}$$

设 $g(x)=2x^2+2x+b$，其图象的对称轴为 $x=-\dfrac{1}{2}\in(-1,+\infty)$，所以

$$g(x)_{\min}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+b$$

当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时，$g(x)_{\max}=-\dfrac{1}{2}+b>0$，即 $g(x)=2x^2+3x-b>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，所以当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

（Ⅱ）① 由（Ⅰ）得，当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 无极值点.

② 当 $b=\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\dfrac{2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2}{x+1}=0$ 有两个相同的解 $x=-\dfrac{1}{2}$，因为 $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ 时，

$f'(x)>0, x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，所以$b=\frac{1}{2}$时，函数$f(x)$在$(-1,+\infty)$上无极值点.

③当$b<\frac{1}{2}$时，$f'(x)=0$有两个不同解，$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$，因为$b<0$时，$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}<-1$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}>0$，即$x_1\notin(-1,+\infty)$，$x_2\in[-1,+\infty)$. 所以当$b<0$时，$f'(x)$、$f(x)$随$x$的变化情况如表2所示.

表 2

x	$(-1,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

由此表可知：当$b<0$时，$f(x)$有唯一极小值点$x_2=\frac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$；当$0<b<\frac{1}{2}$时，$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}>-1$，所以$x_1$、$x_2\in(-1,+\infty)$，此时$f'(x)$、$f(x)$随$x$的变化情况如表3所示.

表 3

x	$(-1,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由此表可知：当$0<b<\frac{1}{2}$时，$f(x)$有一个极大值$x_1=\frac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}$和一个极小值点$x_2=\frac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$.

综上所述：当$b<0$时，$f(x)$有唯一极小值点$x=\frac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$；当$0<b<\frac{1}{2}$时，$f(x)$有一个极大值点$x=\frac{-1-\sqrt{1-2b}}{2}$和一个极小值点$x=\frac{-1+\sqrt{1-2b}}{2}$；当$b\geqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)$无极值点.

（Ⅲ）当$b=-1$时，函数$f(x)=x^2-\ln(x+1)$，令函数

$$h(x)=x^3-f(x)=x^3-x^2+\ln(x+1)$$

则

$$h'(x)=3x^2-2x+\frac{1}{x+1}=\frac{3x^3+(x-1)^2}{x+1}$$

所以当$x\in[0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，所以函数$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，又$h(0)=0$，所以$x\in(0,+\infty)$时，恒有$h(x)>h(0)=0$，即$x^2>x^3-\ln(x+1)$恒成立. 故当$x\in(0,+\infty)$时，有$\ln(x+1)>x^2-x^3$. 对任意正整数n取$x=\frac{1}{n}\in(0,+\infty)$，则有$\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)>\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}$. 所以结论成立.

点评　此题以对数函数为载体，内容是函数知识和不等式知识的一个结合体，考查了导数有关的概念、计算和应用. 利用导数工具研究函数的有关性质，不仅体现教材改革的一种理念，也是初等数学与高等数学一个很好的衔接点. 该题解答中融合了函数与方程思想、转化与化归思想、分类与整合思想（针对参数的取值对函数单调区间及对函数的极值产生影响的讨论）等这些考试大纲要求较高的数学思想方法，不但突出了能力的考查，同时也注意了对高考重点与热点的考查，达到了知识内容考查与思想方法考查相结合之目的. 对思维能力，尤其是理性思维有较高要求，是整份试卷的难题，但是设计了第（Ⅰ）问后，使入口较易且分值得到了分散，第（Ⅲ）问，把导数应用于单调性、极值等传统、常规问题的同时，进

一步升华到处理与自然数有关的不等式的证明.这一切对考查考生的应用能力和创新意识都大有裨益.

3.以"数列"为背景

【例13】 已知两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为A_n和B_n,且$\frac{A_n}{B_n}=\frac{7n+45}{n+3}$,则使得$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数$n$的个数是( )

A.2 B.3 C.4 D.5

解析 $\frac{a_n}{b_n}$与$\frac{A_n}{B_n}$到底有什么关系,能否转化?怎样转化?

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n}=\frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}=\frac{7(2n-1)+45}{(2n-1)+3}=\frac{14n+38}{2n+2}=\frac{7n+19}{n+1}$$

怎样才能保证比值$\frac{7n+19}{n+1}$是整数?借助不定方程求整数解的方法继续变形

$$\frac{7n+19}{n+1}=7+\frac{12}{n+1}$$

依题意,$n+1$必须能被12整除,所以$n=1,2,3,5$或11.

因此,n的个数为5,故选D.

点评 解好此题需要考生能够准确地联想出等差数列的通项公式和前n项和公式之间的关系,明显属于陈题改编而成,真可谓是老树开新花,别具一番风味啊!

【例14】 设正整数数列$\{a_n\}$满足$a_2=4$,且对于任何$n\in\mathbf{N}^*$,有

$$2+\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}<2+\frac{1}{a_n}$$

(Ⅰ)求a_1,a_3;(Ⅱ)求数列$\{a_n\}$的通项a_n.

解 (Ⅰ)令$n=1$可得$\frac{2}{3}<a_1<\frac{8}{7}$,因为$a_1$为正整数,故$a_1=1$;令$n=2$,可得$8<a_3<10$,故$a_3=9$.

(Ⅱ)由$a_1=1,a_2=4,a_3=9$,猜想$a_n=n^2$.下面用数学归纳法证明:

① 当$n=1,2$时,由(Ⅰ)知$a_n=n^2$均成立;

② 假设$n=k(k\geqslant2)$成立,即$a_k=k^2$,则$n=k+1$时,由条件得

$$2+\frac{1}{a_{n+1}}<k(k+1)\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)<2+\frac{1}{k^2}\Rightarrow\frac{k^3(k+1)}{k^2+k+1}<a_{k+1}<\frac{k(k^2+k-1)}{k-1}\Rightarrow$$

$$(k+1)^2-\frac{(k+1)^2}{k^3+1}<a_{k+1}<(k+1)^2+\frac{1}{k-1}$$

因为$k\geqslant2$时,$(k^3+1)-(k+1)^2=k(k+1)(k-2)\geqslant0$,所以$\frac{(k+1)^2}{k^3+1}\in(0,1]$.

由$k-1\geqslant1$,得$\frac{1}{k-1}\in(0,1]$.又$a_{k+1}\in\mathbf{N}^*$,所以$(k+1)^2\leqslant a_{k+1}\leqslant(k+1)^2$.

故$a_{k+1}=(k+1)^2$,即当$n=k+1$时,$a_n=n^2$成立.由①②知,对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,$a_n=n^2$.

点评 本题巧妙地将数列和不等式有机地结合在一起,重点考查了不等式的基础知识,以及不等式的证明,同时考查了逻辑推理能力,是一道综合能力较强的试题.本题字数寥寥,题意叙述简洁明了,体现了数学的简约之美.数列与不等式结合的题在以往的资料中并不少见,但以往的试题通常是给出(求出)数列的通项后,再利用通项公式去证明不等式.本题反其道而行之,在第一问中通过利用"两边夹"的数学思想得出前几项,然后再鼓励考生猜测通项后进行证明,体现了能力立意的命题原则.本题明显带有高等数学知识的背景和思路,体现了命题人对高中数学知识与后续所学知识衔接的关注.以后随

着高考自主命题省份的增加，参与高考命题的大学教授与数学专家也将多起来，所以在不超纲的前提下，以高等数学知识与方法作背景的高考试题肯定会多起来，这是值得我们关注的．另外我们还应关注数列和其他知识交汇的考题，例如2007年高考陕西卷理科第22题的第（Ⅱ）问解答中就交汇了组合的知识，全国少见．

4．以"三角函数"为背景

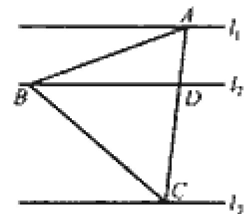


图2

【例15】　如图2，l_1、l_2、l_3是同一平面内的三条平行直线，l_1与l_2间的距离是1，l_2与l_3间的距离是2，正△ABC的三顶点分别在l_1、l_2、l_3上，则△ABC的边长是（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　C．$\frac{3\sqrt{17}}{4}$　　D．$\frac{2\sqrt{21}}{3}$

解析　本题的解题切入点是"三角函数的定义"，解题的具体指导思想是"方程思想"，在解题中可以先建立相关的三角方程，在求得某一角的三角函数值后再求证三角形的边长．

设直线l_2交AC于点D，设△ABC的边长为a，$\angle ABD=\theta$，则$\angle CBD=\frac{\pi}{3}-\theta$，依题意有$2a\sin\theta=a\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$，所以$\frac{5}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$，故得$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{5}$，注意到$\theta$为锐角，所以$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$，由$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}=\frac{1}{a}$，解得$a=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，故选D．

点评　本题的主要特点是比较新颖地将一个常见的平面几何图形与三角函数知识相综合，命题语言容易让考生联想到解三角形的知识和方法，在解题方向上没有人为地设置障碍，但蕴含着对重要的数学思想方法的考查，是一道"考方法、考思想"的好题．新教材中没有明确提出三角方程的概念，但在已知三角函数值求角一节内容中已经渗透有"三角方程"的思想，掌握了"方程思想"的考生可以在不同的思维方式下得到三角方程，从而保证顺利求解．本题意在引导我们深入课本，吃透教材．

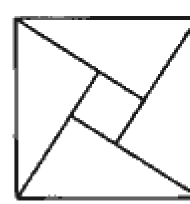


图3

【例16】　2002年在北京召开的国际数学家大会，会标是以我国古代数学家赵爽的弦图为基础设计的．弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形（图3）．如果小正方形的面积为1，大正方形的面积为25，直角三角形中较小的锐角为θ，那么$\cos 2\theta$的值等于________．

解析　设图3中小直角三角形的较小直角边长为x，则据题意及图形易得$x^2+(x+1)^2=5^2$，得$x=3$，再放回到其中一个直角三角形中，即可求出$\cos\theta$的值或θ的其他三角函数值，然后求出$\cos 2\theta$的值为$\frac{7}{25}$．

点评　本题以一个实际应用图案为背景，将解三角形、三角公式的应用以及方程思想等结合在一起考查，既考查了数学基础知识，又考查了考生对所学知识的实际应用水平．

【例17】　在△ABC中，已知内角$\angle A=\frac{\pi}{3}$，边$BC=2\sqrt{3}$．设内角$\angle B=x$，周长为y．

（Ⅰ）求函数$y=f(x)$的解析式和定义域；（Ⅱ）求y的最大值．

解析　（Ⅰ）△ABC的内角和$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$，由$\angle A=\frac{\pi}{3}$、$\angle B>0$、$\angle C>0$得$0<\angle B<\frac{2\pi}{3}$．应用正弦定理，知

$$AC=\frac{BC}{\sin A}\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\sin x=4\sin x,AB=\frac{BC}{\sin A}\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$$

因为 $y = AB + BC + AC$，所以

$$y = 4\sin x + 4\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + 2\sqrt{3}, 0 < x < \frac{2\pi}{3}$$

（Ⅱ）因为 $y = 4\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{6}) + 2\sqrt{3}(\frac{\pi}{6} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6})$。所以当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$，即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时，y 取得最大值 $6\sqrt{3}$。

点评 本题将三角函数的性质、三角公式、解三角形等知识交汇在一起考查，出题新颖。

【例 18】 如图 4，甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方航行，乙船按固定方向匀速直线航行，当甲船位于 A_1 处时，乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处，此时两船相距 20 海里，当甲船航行 20 min 到达 A_2 处时，乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处，此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里，问乙船每小时航行多少海里？

解法 1 如图 5，联结 A_1B_2，由已知 $A_2B_2 = 10\sqrt{2}$，$A_1A_2 = 30\sqrt{2} \times \frac{20}{60} = 10\sqrt{2}$，所以 $A_1A_2 = A_2B_2$，又 $\angle A_1A_2B_2 = 180° - 120° = 60°$，所以 $\triangle A_1A_2B_2$ 是等边三角形，所以 $A_1B_2 = A_1A_2 = 10\sqrt{2}$，由已知，$A_1B_1 = 20$，$\angle B_1A_1B_2 = 105° - 60° = 45°$，在 $\triangle A_1B_2B_1$ 中，由余弦定理，$B_1B_2^2 = A_1B_1^2 + A_1B_2^2 - 2A_1B_2 \cdot A_1B_2 \cdot \cos 45° = 20^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2 \times 20 \times 10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 200$，所以 $B_1B_2 = 10\sqrt{2}$。

因此，乙船的速度的大小为 $\frac{10\sqrt{2}}{20} \times 60 = 30\sqrt{2}$（海里/h）。

答：乙船每小时航行 $30\sqrt{2}$ 海里。

解法 2 如图 6，联结 A_2B_1，由已知 $A_1A_2 = 20$，$A_1A_2 = 30\sqrt{2} \times \frac{20}{60} = 10\sqrt{2}$，$\angle B_1A_1A_2 = 105°$。

$$\cos 105° = \cos(45° + 60°) = \cos 45°\cos 60° - \sin 45°\sin 60° = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

$$\sin 105° = \sin(45° + 60°) = \sin 45°\cos 60° + \cos 45°\sin 60° = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}$$

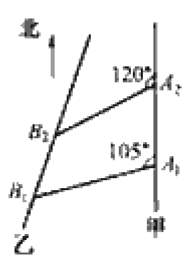


图 4

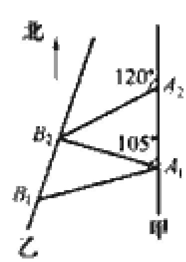


图 5

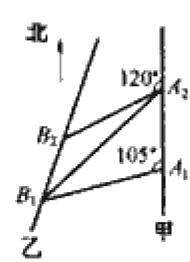


图 6

在 $\triangle A_2A_1B_1$ 中，由余弦定理

$$A_2B_1^2 = A_2B_1^2 + A_1A_2^2 - 2A_1B_1 \cdot A_1A_2 \cdot \cos 15° =$$

$$(10\sqrt{2})^2 + 20^2 - 2 \times 10\sqrt{2} \times 20 \times \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4} = 100(4 + 2\sqrt{3})$$

所以 $A_2B_1 = 10(1 + \sqrt{3})$。

由正弦定理 $\sin\angle A_1A_2B_1 = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} \cdot \sin\angle B_1A_1A_2 = \frac{20}{10(1 + \sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\angle A_1A_2B_1 = 45°$，即

$$\angle B_1A_2B_1 = 60° - 45° = 15°, \cos 15° = \sin 105° = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

在 $\triangle B_1A_2B_2$ 中，由已知 $A_2B_2 = 10\sqrt{2}$，由余弦定理

$$B_1B_2^2 = A_1B_1^2 + A_2B_2^2 + 2A_2B_1 \cdot A_2B_2 \cdot \cos 15° =$$

$$10^2(1+\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2\times 10(1+\sqrt{3})\times 10\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} = 200$$

所以 $B_1B_2 = 10\sqrt{2}$，乙船的速度的大小为$\frac{10\sqrt{2}}{20}\times 60 = 30\sqrt{2}$（海里 /h）.

答：乙船每小时航行 $30\sqrt{2}$ 海里.

点评　本题以航海中的测量为背景（2007 年全国高考海南、宁夏卷文理 17 题是测塔高），考查运用三角工具建立数学模型解决实际问题的能力．从题目选择的背景材料来看，密切联系了学生的社会常识，生活气息浓，有利于引导学生关注社会、参与实践．大胆地改革了传统三角函数的考试模式（山东卷对三角函数的考查，2005 年是三角的化简求值，2006 年是三角函数的图象和性质．今年文科 17 题是解三角形，理科 20 题是航海应用题），给解三角形问题赋予实际背景，在不过分追求形式翻新的同时，用古朴典雅的题目考查考生的应用意识，不过本质上还是解三角形．

5. 以"平面向量"为背景

【例 19】　设 $A(a,1)$、$B(2,b)$、$C(4,5)$ 为坐标平面上三点，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 方向上的投影相同，则 a 与 b 满足的关系式为（　　）

A. $4a-5b=3$　　B. $5a-4b=3$　　C. $4a+5b=14$　　D. $5a+4b=14$

解析　本题的解题切入点是"向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影"这一概念，而解题的简捷方法则来自于对这一概念的直观认识．

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影就是 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，由向量投影的概念可知 A、B 两点在直线 C 上的射影重合，所以直线 $AB \perp OC$，所以$\frac{b-1}{2-a} = -\frac{4}{5}$，即 $4a-5b=3$，故选 A.

点评　本题的主要特点为"小巧"，以"一个向量在另一个向量上的投影"这一概念为基本命题点，考查解析几何中的直线与直线的垂直关系，在解题方法中强调"数形结合"思想方法的掌握与应用，在实际答题中，对"一个向量在另一个向量上的投影"这一概念有不同层次理解的考生所用的答题时间会有明显的不同．由此进一步提醒高三师生要密切关注数学概念在解题中的重要性，对引导高中数学教学回归课本有一定的指导作用．

【例 20】　连掷两次骰子得到的点数分别为 m 和 n，记向量 $\boldsymbol{a}=(m,n)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(1,-1)$ 的夹角为 θ，则 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的概率是（　　）

A. $\frac{5}{12}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $[1.38, 1.50)$　　D. $\frac{5}{6}$

解析　我们知道利用向量去求角度，应该先求余弦．因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = m-n$，所以

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{m-n}{\sqrt{2(m^2+n^2)}}$$

已知 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos\theta\in[0,1)$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 对 m 和 n 有何要求？

$2(m^2+n^2)\geqslant(m+n)^2$，所以$\sqrt{2(m^2+n^2)}\geqslant|m+n|>m-n$，即$\frac{m-n}{\sqrt{2(m^2+n^2)}}<1$ 成立．

当 $\cos\theta\in[0,1)$ 时，一定有 $m\geqslant n$．而 m、$n=1,2,3,4,5,6$，故基本事件总数为 $6\times6=36$．

若 $m=n$，则有 6 种可能；若 $m>n$，则当 $m=6,5,4,3,2$ 时，n 分别取 $5,4,3,2,1$，此时有 15 种选择方法．于是 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的概率是 $P=\frac{6+15}{6\times6}=\frac{7}{12}$，故选 C.

点评 本题是向量的动态投影问题,通过平面向量的数量积的坐标运算及向量的夹角的范围,将向量与概率巧妙地结合起来考查了随机事件的概率的相关知识,确实令人耳目一新.值得注意的有两点:一是向量与概率的交汇背景新颖,极富思考性和挑战性,对能力的要求极高;二是概率知识与传统的知识交汇融合,极易形成背景新颖、联系广泛、结构巧妙的小型综合考题.

6.以"不等式"为背景

【例21】 已知 m、n 为正整数.

(Ⅰ)用数学归纳法证明:当 $x>-1$ 时,$(1+x)^m \geqslant 1+mx$;

(Ⅱ)对于 $n \geqslant 6$,已知 $\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}$,求证:$\left(1-\frac{m}{n+3}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^m$,$m=1,2,\cdots,n$;

(Ⅲ)求出满足等式 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n=(n+3)^n$ 的所有正整数 n.

分析 一般来说,一题多问的试题,后面的各问往往需要应用前面各问的结论.本题第(Ⅰ)问入手并不难,但第(Ⅱ)问却相当棘手;第(Ⅱ)问能否利用第(Ⅰ)问的结论,值得研究;第(Ⅲ)问更难,能否也可利用第(Ⅱ)问的结论,更是值得我们探究.

证法1 (Ⅰ)用数学归纳法证明:① 当 $m=1$ 时,原不等式成立;当 $m=2$ 时,左边 $=1+2x+x^2$,右边 $=1+2x$.因为 $x^2 \geqslant 0$,所以左边 $\geqslant$ 右边,原不等式成立.

② 假设当 $m=k$ 时,不等式成立,即 $(1+x)^k \geqslant 1+kx$,则当 $m=k+1$ 时,因为 $x>-1$,所以 $1+x>0$,于是在不等式 $(1+x)^k \geqslant 1+kx$ 两边同乘以 $1+x$ 得

$$(1+x)^k\cdot(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x$$

所以

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$$

即当 $m=k+1$ 时,不等式也成立.

综合①②知,对一切正整数 m,不等式都成立.

(Ⅱ)当 $n \geqslant 6$,$m \leqslant n$ 时,由(Ⅰ)得 $\left(1+\frac{-1}{n+3}\right)^m \geqslant 1-\frac{m}{n+3}>0$,于是

$$\left(1-\frac{m}{n+3}\right)^n \leqslant \left(1-\frac{1}{n+3}\right)^{mn}=\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n\right]^m<\left(\frac{1}{2}\right)^m,m=1,2,\cdots,n$$

(注:这里连续利用放缩法达到了证题的目的.)

(Ⅲ)由(Ⅱ)知,当 $n \geqslant 6$ 时

$$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n+\left(1-\frac{2}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{n}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\frac{1}{2^n}<1$$

所以

$$\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n+\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n+\cdots+\left(\frac{3}{n+3}\right)^n<1$$

即 $3^n+4^n+\cdots+(n+2)^n<(n+3)^n$,即当 $n \geqslant 6$ 时,不存在满足该等式的正整数 n.

故只需要讨论 $n=1,2,3,4,5$ 的情形,直接验算:

当 $n=1$ 时,$3 \neq 4$,等式不成立;

当 $n=2$ 时,$3^2+4^2=5^2$,等式成立;

当 $n=3$ 时,$3^3+4^3+5^3=6^3$,等式成立;

当 $n=4$ 时,$3^4+4^4+5^4+6^4$ 为偶数,而 7^4 为奇数,故 $3^4+4^4+5^4+6^4 \neq 7^4$,等式不成立;

(注意:两个奇数之积必是奇数,而任意多个偶数之和还是偶数,那么左边 = 偶数,而右边 = 奇数,故两边必不相等,所以 $n=4$ 不符合条件)

当 $n=5$ 时,同 $n=4$ 的情形可分析出,等式不成立.

综上,所求的 n 只有 $n=2,3$.

(注:这里用到了与整数论有关的课外知识,是高考新动向,值得关注.)

证法2 (Ⅰ)当 $x=0$ 或 $m=1$ 时,原不等式中等号显然成立,下用数学归纳法证明:

当 $x>-1$ 且 $x\neq 0$ 时，$m\geqslant 2$，且

$$(1+x)^m>1+mx \qquad ①$$

① 当 $m=2$ 时，左边 $=1+2x+x^2$，右边 $=1+2x$，因为 $x\neq 0$，所以 $x^2>0$，即左边 $>$ 右边，不等式①成立。

② 假设当 $m=k(k\geqslant 2)$ 时，不等式①成立，即 $(1+x)^k>1+kx$，则当 $m=k+1$ 时，因为 $x>-1$，所以 $1+x>0$。又因为 $x\neq 0$，$k\geqslant 2$，所以 $kx^2>0$。

于是在不等式 $(1+x)^k>1+kx$ 两边同乘以 $1+x$ 得

$$(1+x)^k(1+x)>(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x$$

所以

$$(1+x)^{k+1}>1+(k+1)x$$

即当 $m=k+1$ 时，不等式①也成立。

综上所述，所证不等式成立。

（Ⅱ）当 $n\geqslant 6$，$m\leqslant n$ 时，因为 $\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^n<\frac{1}{2}$，所以

$$\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^m\right]^n<\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

而由（Ⅰ），$\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^m\geqslant 1-\frac{m}{n+3}>0$，所以

$$\left(1-\frac{m}{n+3}\right)^n\leqslant\left[\left(1-\frac{1}{n+3}\right)^m\right]^n<\left(\frac{1}{2}\right)^m$$

（注：这里连续利用放缩法达到了证题的目的。）

（Ⅲ）假设存在正整数 $n_0\geqslant 6$ 使等式 $3^{n_0}+4^{n_0}+\cdots+(n_0+2)^{n_0}=(n_0+3)^{n_0}$ 成立，即有

$$\left(\frac{3}{n_0+3}\right)^{n_0}+\left(\frac{4}{n_0+3}\right)^{n_0}+\cdots+\left(\frac{n_0+2}{n_0+3}\right)^{n_0}=1 \qquad ②$$

又由（Ⅱ）可得

$$\left(\frac{3}{n_0+3}\right)^{n_0}+\left(\frac{4}{n_0+3}\right)^{n_0}+\cdots+\left(\frac{n_0+2}{n_0+3}\right)^{n_0}=\left(1-\frac{n_0}{n_0+3}\right)^{n_0}+\left(1-\frac{n_0-1}{n_0+3}\right)^{n_0}+\cdots+$$

$$\left(1-\frac{1}{n_0+3}\right)^{n_0}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0-1}+\cdots+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^{n_0}}<1$$

与式②矛盾。故当 $n\geqslant 6$ 时，不存在满足该等式的正整数 n。以下同解法 1。

（注：当 $0<n<6$ 时，只有 2 与 3 两个数符合条件，据此我们已经猜想到当 $n\geqslant 6$ 时，符合条件的正整数不存在。而证题的策略是，先假定存在，然后用反证法推翻这个假定。）

点评　这道理科压轴题难度较大，考生要有较强的数学思维能力方可顺利解出。此题以伯努里不等式和勾股定理的拓展为背景，既将不等式和等式进行了巧妙结合，又将数学归纳法、数列求和、不等式中的放缩法、构造法、反证法等方法融为一体，同时还充分地考查了分类与整合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想，本题的结论还蕴涵着勾股定理在连续整数下的多维推广，是一道既隐含着深刻的高等数学背景，又有着丰富的数学内涵和品味的综合试题。这样能使个性品质优秀、数学能力优异的考生通过此题脱颖而出。本题没有涉及复杂的变换技巧（以前高考试题中那些不等式内容中涉及的复杂变换技巧和过于形式化的知识在这里有逐渐淡化处理的倾向），第（Ⅰ）小问着重考查数学归纳法的基本知识（其目的是强调数学归纳法作为证明数学命题的一种重要方法，有着极其重要的地位，考纲要求"理解其原理并能用数学归纳法证明一些简单的数学命题"，我们应该不会忘记 2004 年、2005 年高考湖北理科卷的最后一题也考查了数学归纳法的基础知识）；第（Ⅱ）小问是对第（Ⅰ）小问结论（贝努利不等式的特殊情形）的简单应用，要求考生能揭示第（Ⅰ）、（Ⅱ）问之间的联系并实施目标转化，考查学生的观察及探索能力，其目的在于体现"学数学，用数学"的理念；第（Ⅲ）小问是对第（Ⅱ）

小问结论的综合应用，考查学生在新的信息背景下，综合运用数学思想和方法处理问题的能力．而此问无法套用现成的思维模式去寻求解题思路和方法，所以需冷静地认清已知等式的数量特征关系并变换等式形式，发现上下问的关联并利用上一问的结论．本题三问层层递进、跨度适中、浑然一体．由此我们不难看出，"合情推理，猜证结合"是新高考考查学生创新思维能力的重要形式，而寻求合理的解题思路和方法、破除模式化，力求创新是此类试题的显著特点，本题体现得尤为突出．

7. 以"直线与圆的方程"为背景

【例 22】 若不等式组 $\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ 2x+y\leqslant 2 \\ y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant a \end{cases}$ 表示的平面区域是一个三角形，则 a 的取值范围是( )

A. $a\geqslant\frac{4}{3}$ B. $0<a\leqslant 1$ C. $1\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$ D. $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$

解析 利用数形结合思想，先画出 $\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ 2x+y\leqslant 2 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 表示的平面区域，即图 7 中三条直线所围成的三角形，然后画出直线 $x+y=0$，通过平移，观察能使所构成的新平面区域是三角形时 a 的取值所满足的条件，易得 $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant\frac{4}{3}$，故选 D.

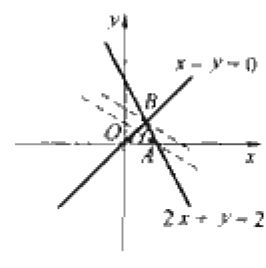


图 7

点评 过去考查线性规划时，常常给出约束条件，然后求给定式的最值，本题打破了这种常规，设计成一道条件探究题，角度新，考查灵活．

【例 23】 已知直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$（$a$、$b$ 是非零常数）与圆 $x^2+y^2=100$ 有公共点，且公共点的横坐标和纵坐标均为整数，那么这样的直线共( )

A. 60 条 B. 66 条 C. 72 条 D. 78 条

解析 本题的常规解题思路是：圆上有几个整点 → 过圆上一个整点的切线有多少 → 过圆上两个整点的直线（即割线）有多少 → 以上这些直线中有哪些不符合条件的（这里要注意原题表述中有什么陷阱）？

(1) 找出圆上符合要求的整点数．

如图 8，圆上的整点（横坐标和纵坐标均为整数的点为整点）都是 $x^2+y^2=100$ 的整数解．由勾股定理知这些点分别是：(10,0)，(8,6)，(6,8)，(0,10)，(−6,8)，(−8,6)，(−10,0)，…，(8,−6) 共 12 个点．

(2) 若直线与圆有两个公共点，则这样的直线（即圆的割线）有 $C_{12}^2=\frac{12\times 11}{2}=66$（条）．

(3) 如果直线与圆只有一个公共点，则这样的直线（即圆的切线）有 12 条．

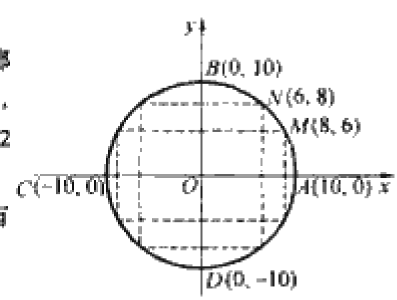


图 8

以上共计 $12+66=78$（条）．此题解到这里，不同思维层次的考生将出现不同的选择：

① 如果有的考生粗心大意就会直接根据上述结果误选 D.

② 如果有的考生注意到方程是截距式的直线是不能过原点的，就会去掉圆的直径所在的 6 条直线而错选 C.

③ 如果有的考生注意到方程是截距式的直线是不能平行于坐标轴的，就会在 78 条直线中，去掉与坐标轴平行的割线 8 条、去掉与坐标轴平行的切线 4 条，于是去掉不合格的 12 条直线而误选 B.

所以只有完整地考虑到如上三点才能得出正确的答案，即 78 - 6 - 12 = 60 条，故选 A.

点评 本题表象上虽是以直线和圆的位置关系为背景，主要考查直线方程的截距式、组合等基础知识，但内层涉及的基础知识较多，数的方面有：圆的方程、截距不为零的直线方程、勾股数、组合数等；形的方面有：整点、过圆上一个整点的切线、过圆上两个整点的直线、去掉过原点的直线、平行于坐标轴的直线等. 所以是名副其实的"小题不小"的题，也是难题. 解本题的基本功体现在综合分析本题涉及的数与形的特点及其运用的能力层面上，要有较好的逻辑思维能力和计数能力方可顺利解出. 不过本题虽然涉及的知识面广，但各层次的考生都能动手，只是不犯一点错误却是很不容易的，题不难但区分度较高，所以笔者认为此题是一道难得的好题.

【例 24】 本公司计划去年在甲、乙两个电视台做总时间不超过 300 min 的广告，广告总费用不超过 9 万元，甲、乙电视台的广告收费标准分别为 500 元/min 和 200 元/min，规定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告，能给公司事来的收益分别为 0.3 万元和 0.2 万元. 问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元?

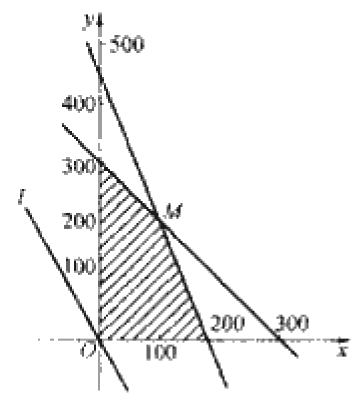


图 9

解析 设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为 x min 和 y min，总收益为 z 元，由题意得 $\begin{cases}x+y\leqslant 300\\500x+200y\leqslant 90\,000,\\x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}$

目标函数为 $z=3\,000x+2\,000y$.

二元一次不等式组等价于 $\begin{cases}x+y\leqslant 300\\5x+2y\leqslant 900.\\x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域，即可行域. 如图 9 所示，作直线 $l: 3\,000x+2\,000y=0$，即 $3x+2y=0$.

平移直线 l，从图 9 中可知，当直线 l 过点 M 时，目标函数取得最大值. 联立 $\begin{cases}x+y=300\\5x+2y=900\end{cases}$，解得 $x=100, y=200$. 所以点 M 的坐标为 $(100,200)$，所以 $z_{max}=3\,000x+2\,000y=700\,000$(元).

答：该公司在甲电视台做 100 min 广告，在乙电视台做 200 min 广告，公司的收益最大，最大收益是 70 万元.

点评 本题是一个背景新颖(以社会经济活动为背景(线性规划中的电视广告背景))的应用问题，和今年的山东理科(20)题一样，都以平实的背景考查学生的应用能力，这种处理方式对试卷总体难度的稳定起到了保障作用. 这些应用题展示了数学应用的广泛性，体现出数学与传统的、现代的文化的交融，反映出数学来源于社会现实又为社会实践服务的基本事实. 这些应用题的设计和考查，提高了考生学好应用问题的积极性，同时对运用所学数学知识分析问题和解决问题的能力进行了有效的检测.

【例 25】 如图 10，矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 $M(2,0)$，AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$，点 $T(-1,1)$ 在 AD 边所在直线上.

(Ⅰ) 求 AD 边所在直线的方程；

(Ⅱ) 求矩形 $ABCD$ 外接圆的方程；

(Ⅲ) 若动圆 P 过点 $N(-2,0)$，且与矩形 $ABCD$ 的外接圆外切，求动圆 P 的圆心的轨迹方程.

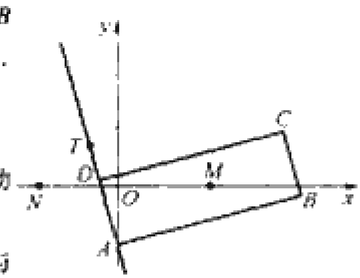


图 10

解析 (Ⅰ) 因为 AB 边所在直线的方程为 $x-3y-6=0$，且 AD 与 AB 垂直，所以直线 AD 的斜率为 -3. 又因为点 $T(-1,1)$ 在直线 AD 上，

所以 AD 边所在直线的方程为 $y-1=-3(x+1)$,即 $3x+y+2=0$.

(Ⅱ)由 $\begin{cases}x-3y-6=0\\3x+y+2=0\end{cases}$,解得点 A 的坐标为 $(0,-2)$.因为矩形 $ABCD$ 两条对角线的交点为 $M(2,0)$.

所以 M 为矩形 $ABCD$ 外接圆的圆心,又 $|AM|=\sqrt{(2-0)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$.

从而矩形 $ABCD$ 外接圆的方程为 $(x-2)^2+y^2=8$.

(Ⅲ)因为动圆 P 过点 N,所以 $|PN|$ 是该圆的半径,又因为动圆 P 与圆 M 外切,所以 $|PM|=|PN|+2\sqrt{2}$,即 $|PM|-|PN|=2\sqrt{2}$.

故点 P 的轨迹是以 M、N 为焦点,实轴长为 $2\sqrt{2}$ 的双曲线的左支.

因为实半轴长 $a=\sqrt{2}$,半焦距 $c=2$,所以虚半轴长 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$.

从而动圆 P 的圆心的轨迹方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1(x\leqslant-\sqrt{2})$.

点评 2007 年北京卷 16 题是一道以立体几何为背景的动态几何探究问题,本题属于以解析几何为背景的动态几何探究问题,这种题型在以往高考试题中并不是没出现过,但像这样在解答题中以圆的有关知识作为中心,综合辐射性地考查考生对直线、圆和圆锥曲线等知识的灵活应用能力的命题方式还实为少见.

8. 以"圆锥曲线方程"为背景

【例 26】 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点,A、B、C 为该抛物线上三点,若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$,则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$ ( )

A. 9 B. 6 C. 4 D. 3

解法 1 由 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$,知 F 为 $\triangle ABC$ 的重心,不妨设 A 为坐标原点,则 $BC\perp x$ 轴,得 $F(1,0)$、$B(\frac{3}{2},\sqrt{6})$、$C(\frac{3}{2},-\sqrt{6})$,进而 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=6$,故选 B.

解法 2 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$,由 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$ 得 $x_1+x_2+x_3=3$,由抛物线的性质易得

$$|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=(x_1+\frac{p}{2})+(x_2+\frac{p}{2})+(x_3+\frac{p}{2})=6$$

故选 B.

点评 本题以抛物线为载体,以向量为工具来命题立意,对广大考生来说,试题情境并不陌生,其考查点却很丰富.本来圆锥曲线中的线段长短问题、直线位置问题一直是高考考查的重点,后来向量引入后,考查的范围又进一步扩大,此题的新颖之处就是将平面向量、解析几何、平面几何等相关知识有机的结合在一起综合考查.

【例 27】 已知一组抛物线 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx+1$,其中 a 为 2、4、6、8 中任取的一个数,b 为 1、3、5、7 中任取的一个数,从这些抛物线中任意抽取两条,它们在与直线 $x=1$ 交点处的切线相互平行的概率是 ( )

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{7}{60}$ C. $\frac{6}{25}$ D. $\frac{5}{25}$

解析 本题的解题切入点是"等可能性事件的概率的概念以及函数在某点处的导数的几何意义",要求掌握求函数的导数的基本功和展开分类讨论的具体能力.解题中应该先确定共有多少条抛物线,再分析使得两条不同的抛物线在点 $(1,f(1))$ 处的切线相互平行的代数条件,最后根据所需条件展开分类讨论.

确定抛物线中的系数 a、b 各有 4 种方法,由分步计数原理,共有抛物线 $4^2=16$ 条,从中任取抛物线时,每一条抛物线被取到的概率相等,所以从中任取两条抛物线共有方法 $n=C_{16}^2=120$ 种,因为

$f'(x)=ax+b$，所以 $f'(1)=a+b$，欲使这些抛物线在 $x=1$ 处的切线互相平行，则要求对应的 $a_i+b_i=a_j+b_j$.

其中 a_i、a_j 为 2、4、6、8 中的任意两个数，b_i、b_j 为 1、3、5、7 中的任意两个数，记数对 (a_i,b_i) 由表 4 可知.

表 4

(2,1)	(4,1)	(6,1)	(8,1)
(2,3)	(4,3)	(6,3)	(8,3)
(2,5)	(4,5)	(6,5)	(8,5)
(2,7)	(4,7)	(6,7)	(8,7)

当 $a+b=2+3=4+1$，$a+b=2+5=4+3=6+1$，$a+b=2+7=4+5=6+3=8+1$，$a+b=4+7=6+5=8+3$，$a+b=6+7=8+5$ 时，对应的两条抛物线分别相互平行.

所以使任取的两条抛物线在 $x=1$ 处的切线相互平行的方法数 $m=2C_2^2+2C_3^2+C_4^2=14$ 种，所以所求的概率 $P=\frac{14}{120}=\frac{7}{60}$，故选 B.

点评　本题作为 2007 年高考四川理科卷中选择题的压轴题，综合考查了解析几何、导数和概率的知识，命题的主要特点是小巧别致，具有较强的甄别数学思维品质优劣的功能和较高的区分度，可以预见本题将可能成为今后一段时间里高中数学教学中的一道经典"名题".

【例 28】　如图 11，在平面直角坐标系 xOy 中，过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线，与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A、B 两点. 一条垂直于 x 轴的直线，分别与线段 AB 和直线 $l:y=-c$ 交于点 P、Q.

(Ⅰ) 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，求 c 的值；(Ⅱ) 若 P 为线段 AB 的中点，求证：QA 为此抛物线的切线；(Ⅲ) 试问(Ⅱ)的逆命题是否成立？说明理由.

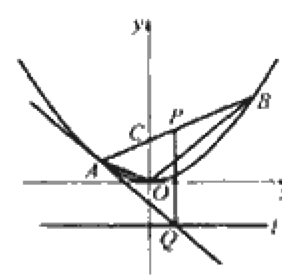


图 11

解析　(Ⅰ) 设直线 AB 的方程为 $y=kx+c$，将该方程代入 $y=x^2$，得 $x^2-kx-c=0$. 令 $A(a,a^2)$，$B(b,b^2)$，则 $ab=-c$. 因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=ab+a^2b^2=-c+c^2=2$，解得 $c=2$ 或 $c=-1$(舍去)，故 $c=2$.

(Ⅱ) 由题意知 $Q\left(\frac{a+b}{2},-c\right)$，直线 AQ 的斜率为 $k_{AQ}=\frac{a^2+c}{a-\frac{a+b}{2}}=\frac{a^2-ab}{\frac{a-b}{2}}=2a$. 又 $y=x^2$ 的导数为 $y'=2x$，所以点 A 处切线的斜率为 $2a$，因此，AQ 为该抛物线的切线.

(Ⅲ)(Ⅱ) 的逆命题成立，证明如下.

设 $Q(x_0,-c)$，若 AQ 为该抛物线的切线，则 $k_{AQ}=2a$，又直线 AQ 的斜率为

$$k_{AQ}=\frac{a^2+c}{a-x_0}=\frac{a^2-ab}{a-x_0}$$

所以 $\frac{a^2-ab}{a-x_0}=2a$，得 $2ax_0=a^2+ab$，因 $a\neq0$，有 $x_0=\frac{a+b}{2}$.

故点 P 的横坐标为 $\frac{a+b}{2}$，即点 P 是线段 AB 的中点.

点评　本小题的特色主要是交汇地考查了抛物线的基本性质、直线与抛物线的位置关系、向量的数量积、导数的应用、简易逻辑等基础知识和基本运算，考查分析问题、探索问题的能力.

【例 29】　如图 12，有一块半椭圆形钢板，其长半轴长为 $2r$，短半轴长为 r，计划将此钢板切割成等腰

梯形的形状，下底 AB 是半椭圆的短轴，上底 CD 的端点在椭圆上，记 $CD=2x$，梯形面积为 S.

（Ⅰ）求面积 S 以 x 为自变量的函数式，并写出其定义域；

（Ⅱ）求面积 S 的最大值.

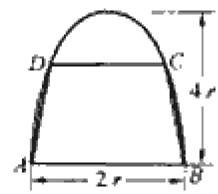


图 12

解析 （Ⅰ）依题意，以 AB 的中点为原点建立直角坐标系（图 13），则点 C 的横坐标为 x，点 C 的纵坐标 y，满足方程 $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4r^2}=1(y\geqslant 0)$，解得

$$y=2\sqrt{r^2-x^2},0<x<r$$

$$S=\frac{1}{2}(2x+2r)2\sqrt{r^2-x^2}=2(x+r)\sqrt{r^2-x^2}$$

其定义域为 $\{x\mid 0<x<r\}$.

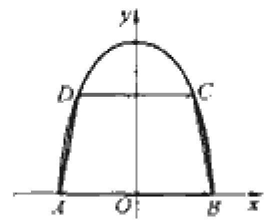


图 13

（Ⅱ）记 $f(x)=4(x+r)^2(r^2-x^2),0<x<r$，则 $f'(x)=8(x+r)^2(r-2x)$. 令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}r$. 因为当 $0<x<\frac{r}{2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\frac{r}{2}<x<r$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f\left(\frac{1}{2}r\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值. 因此，当 $x=\frac{1}{2}r$ 时，S 也取得最大值，最大值为 $\sqrt{f\left(\frac{1}{2}r\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$. 即梯形面积 S 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

以下解法不同于参考答案.

另类思维一 由

$$f(x)=S^2=4(x+r)^2(r^2-x^2)=\frac{4}{3}(x+r)\cdot(x+r)\cdot(x+r)\cdot(3r-3x)\leqslant$$

$$\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{x+r+x+r+x+r+3r-3x}{4}\right)^4=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}r\right)^4$$

得 $S\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}r$，当且仅当 $x+r=3r-3x$，即 $x=\frac{r}{2}$ 时，S 有最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

另类思维二 据 $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4r^2}=1(y\geqslant 0)$，可设 $C(r\cos\theta,2r\sin\theta)(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，则有 $S=2r^2\sin\theta\cdot(\cos\theta+1)$，令 $f(\theta)=2r^2\sin\theta(\cos\theta+1)$，故

$$f'(\theta)=2r^2\cos\theta(\cos\theta+1)-2r^2\sin\theta\cos\theta=2r^2(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$$

令 $2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$，得 $\theta=\frac{\pi}{3}$，易知当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，函数 $f(\theta)$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$，即 S 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

点评 本题从实际生活中抽象出一个圆锥曲线——椭圆的背景模式，以函数和方程思想为灵魂，以三角函数、不等式、导数等知识为工具，综合考查了考生对方程、函数、三角函数、不等式、导数、椭圆等数学知识的灵活应用能力，同时此题在解法上的开放性也给不同层次的考生提供了一个展示自己良好思维能力的广阔空间.

【例 30】 已知函数 $y=kx$ 与 $y=x^2+2(x\geqslant 0)$ 的图象相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l_1、l_2 分别是 $y=x^2+2(x\geqslant 0)$ 的图象在 A、B 两点的切线，M、N 分别是 l_1、l_2 与 x 轴的交点.

（Ⅰ）求 k 的取值范围；

（Ⅱ）设 t 为点 M 的横坐标，当 $x_1<x_2$ 时，写出 t 以 x_1 为自变量的函数式，并求其定义域和值域；

（Ⅲ）试比较 $|OM|$ 与 $|ON|$ 的大小，并说明理由（O 是坐标原点）.

解析　（Ⅰ）由方程$\begin{cases} y = kx \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$，消 y 得

$$x^2 - kx + 2 = 0 \qquad ①$$

依题意，该方程有两个正实根，故$\begin{cases} \Delta = k^2 - 8 > 0 \\ x_1 + x_2 = k > 0 \end{cases}$，解得 $k > 2\sqrt{2}$.

（Ⅱ）由 $f'(x) = 2x$，求得切线 l_1 的方程为 $y = 2x_1(x - x_1) + y_1$，由 $y_1 = x_1^2 + 2$，并令 $y = 0$，得 $t = \frac{x_1}{2} - \frac{1}{x_1}$，$x_1$、$x_2$ 是方程①的两实根，且 $x_1 < x_2$，故 $x_1 = \frac{k - \sqrt{k^2 - 8}}{2} = \frac{4}{k + \sqrt{k^2 - 8}}$，$k > 2\sqrt{2}$，$x_1$ 是关于 k 的减函数，所以 x_1 的取值范围是 $(0, \sqrt{2})$. t 是关于 x_1 的增函数，定义域为 $(0, \sqrt{2})$，所以值域为 $(-\infty, 0)$.

（Ⅲ）当 $x_1 < x_2$ 时，由（Ⅱ）可知 $|OM| = |t| = -\frac{x_1}{2} + \frac{1}{x_1}$，类似可得

$$|ON| = \frac{x_2}{2} - \frac{1}{x_2}, \ |OM| - |ON| = -\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

由①可知 $x_1 x_2 = 2$，从而 $|OM| - |ON| = 0$.

当 $x_2 < x_1$ 时，有相同的结果 $|OM| - |ON| = 0$，所以 $|OM| = |ON|$.

点评　该题知识的综合性比以往北京卷相关问题有所增强，涉及代数、平面解析几何等多个内容，同时因为涉及有关不是圆的切线的切线问题，所以这类题的解决也就意味着又需要用到导数的相关知识. 同时注意在这个题目解答过程当中有一个最核心的成分是函数. 大家知道函数是高中数学的第一重点，所以把函数作为一个核心的内容放在最后一道大题设计，这再一次提醒我们：高考复习万万不可偏离《考试大纲》.

【例 31】　设动点 P 到两定点 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2，$\angle F_1PF_2 = 2\theta$，且存在常数 $\lambda(0 < \lambda < 1)$，使得 $d_1 d_2 \sin^2\theta = \lambda$.

（Ⅰ）证明：动点 P 的轨迹 C 为双曲线，并求出 C 的方程；

（Ⅱ）如图 14，过点 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A、B 两点. 问：是否存在 λ，使 $\triangle F_1AB$ 是以点 B 为直角定点的等腰直角三角形？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.

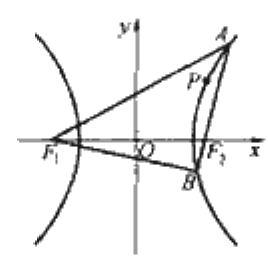


图 14

解析　（Ⅰ）在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$|F_1F_2| = 2$，则 $2^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos 2\theta$，$4 = (d_1 - d_2)^2 + 4d_1 d_2 \sin^2\theta$，即

$$|d_1 - d_2| = \sqrt{4 - 4d_1 d_2 \sin^2\theta} = 2\sqrt{1 - \lambda} < 2(\text{常数})$$

故动点 P 的轨迹 C 是以 F_1、F_2 为焦点，实轴长 $2a = 2\sqrt{1 - \lambda}$ 的双曲线，方程为$\frac{x^2}{1 - \lambda} - \frac{y^2}{\lambda} = 1$.

（Ⅱ）标准答案提供了两种解法.

解法 1　在 $\triangle AF_1B$ 中，设 $|AF_1| = d_1$，$|AF_2| = d_2$，$|BF_1| = d_3$，$|BF_2| = d_4$. 假设 $\triangle AF_1B$ 为等腰直角三角形，则

$$\begin{cases} d_1 - d_2 = 2a & ① \\ d_3 - d_4 = 2a & ② \\ d_3 = d_4 + d_2 & ③ \\ d_1 = \sqrt{2} d_3 & ④ \\ d_3 d_4 \sin^2 \frac{\pi}{4} = \lambda & ⑤ \end{cases}$$

由②与③得 $d_2 = 2a$，则

$$\begin{cases} d_1 = 4a \\ d_3 = 2\sqrt{2}a \\ d_4 = d_3 - 2a = 2(\sqrt{2}-1)a \end{cases}$$

由⑤得 $d_3d_4 = 2\lambda$，$4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)a^2 = 2\lambda$，$(8-4\sqrt{2})(1-\lambda) = 2\lambda$，$\lambda = \frac{12-2\sqrt{2}}{17} \in (0,1)$，故存在 $\lambda = \frac{12-2\sqrt{2}}{17}$ 满足题设条件.

解法2 (1) 设 $\triangle AF_1B$ 为等腰直角三角形，依题设可得

$$\begin{cases} |AF_1|\cdot|AF_2|\cdot\sin^2\frac{\pi}{8} = \lambda \\ |BF_1|\cdot|BF_2|\cdot\sin^2\frac{\pi}{4} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |AF_1|\cdot|AF_2| = \dfrac{2\lambda}{1-\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{2}-1} \\ |BF_1|\cdot|BF_2| = 2\lambda \end{cases}$$

所以

$$S_{\triangle AF_1F_2} = \frac{1}{2}|AF_1|\cdot|AF_2|\sin\frac{\pi}{4} = (\sqrt{2}+1)\lambda$$

$$S_{\triangle BF_1F_2} = \frac{1}{2}|BF_1|\cdot|BF_2| = \lambda$$

则

$$S_{\triangle AF_1B} = (2+\sqrt{2})\lambda \qquad ①$$

由

$$\frac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle BF_1F_2}} = \frac{|AF_2|}{|BF_2|} = \sqrt{2}+1$$

可设 $|BF_2| = d$，则

$$|AF_2| = (\sqrt{2}+1)d,\ |BF_1| = |AB| = (2+\sqrt{2})d$$

则

$$S_{\triangle AF_1B} = \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})^2d^2 \qquad ②$$

由①②得

$$(2+\sqrt{2})d^2 = 2\lambda \qquad ③$$

根据双曲线定义 $|BF_1| - |BF_2| = 2a = 2\sqrt{1-\lambda}$，可得 $(\sqrt{2}+1)d = 2\sqrt{1-\lambda}$. 平方得

$$(\sqrt{2}+1)^2d^2 = 4(1-\lambda) \qquad ④$$

由③④消去 d 可解得，$\lambda = \frac{12-2\sqrt{2}}{17} \in (0,1)$，故存在 $\lambda = \frac{12-2\sqrt{2}}{17}$ 满足题设条件.

以下笔者给出不同于标准答案的另一种简解.

设 $|BF_1| = |AB| = m$，$d_2 = |AF_2| = n$，则 $d_1 = |AF_1| = \sqrt{2}m$. 由双曲线定义

$$|AF_1| - |AF_2| = 2a,\ |BF_1| - |BF_2| = 2a$$

得

$$\sqrt{2}m - n = 2\sqrt{1-\lambda},\ m-(m-n) = 2\sqrt{1-\lambda}$$

故 $n = 2\sqrt{1-\lambda}$，$\sqrt{2}m = 4\sqrt{1-\lambda}$，故由 $\lambda = d_1d_2\sin^2\theta = 8\sqrt{1-\lambda}\sqrt{1-\lambda}\sin^2\frac{\pi}{8}$.

从而得 $\lambda = \frac{12-2\sqrt{2}}{17} \in (0,1)$，故存在 $\lambda = \frac{12-2\sqrt{2}}{17}$ 满足题意.

点评 本题作为文科压轴题(理科第21题与此题大致相同)，构思巧妙，综合性强，问题不偏不怪，初入眼帘，清新之感扑面而来. 考生进入情景并不难，但要在有限时间内完全解出却也不易，这就是命题者匠心独具所在. 在第一问解答中，本例巧妙地地将三角公式的应用、余弦定理的运用及圆锥曲线定义的理解融合在一起，符合高考"在知识交汇处设计试题"的命题思想与创新精神. 在第二问中，参考答案

中给出了两种不同的解法.实际上这道题的解法还有几种,比如利用向量处理解析几何中的垂直关系等.方法选用得当与否直接决定了运算量的大小.但不管哪种解法,这道题都能较好地考查考生的逻辑思维能力,综合运用知识的能力及构造恰当方程的能力和运算能力.

【例32】　已知椭圆 C 的中心在坐标原点,焦点在 x 轴上,椭圆 C 上的点到焦点距离的最大值为3,最小值为1.

(Ⅰ)求椭圆 C 的标准方程;

(Ⅱ)若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 相交于 A、B 两点(A、B 不是左右顶点),且以 AB 为直径的圆过椭圆 C 的右顶点.求证:直线 l 过定点,并求出该定点的坐标.

解析　(Ⅰ)由题意设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$,由已知得:$a + c = 3, a - c = 1, a = 2, c = 1$,所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(Ⅱ)设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$,联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$,得

$$(3 + 4k^2)x^2 + 8mkx + 4(m^2 - 3) = 0$$

则

$$\begin{cases} \Delta = 64m^2k^2 - 16(3 + 4k^2)(m^2 - 3) > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{8mk}{3 + 4k^2} \\ x_1x_2 = \frac{4(m^2 - 3)}{3 + 4k^2} \end{cases}$$

即

$$3 + 4k^2 - m^2 > 0$$

又

$$y_1y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + mk(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{3(m^2 - 4k^2)}{3 + 4k^2}$$

因为以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点 $D(2,0)$,所以 $k_{AD}k_{BD} = -1$,即 $\frac{y_1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2}{x_2 - 2} = -1$.所以

$$y_1y_2 + x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = 0$$

所以

$$\frac{3(m^2 - 4k^2)}{3 + 4k^2} + \frac{4(m^2 - 3)}{3 + 4k^2} + \frac{15mk}{3 + 4k^2} + 4 = 0$$

所以 $7m^2 + 16mk + 4k^2 = 0$,解得 $m_1 = -2k, m_2 = -\frac{2k}{7}$,且均满足 $3 + 4k^2 - m^2 > 0$.

当 $m_1 = -2k$ 时,l 的方程为 $y = k(x - 2)$,直线过点(2,0),与已知矛盾;

当 $m_2 = -\frac{2k}{7}$ 时,l 的方程为 $y = k\left(x - \frac{2}{7}\right)$,直线过定点 $\left(\frac{2}{7},0\right)$.所以,直线 l 过定点,定点坐标为 $\left(\frac{2}{7},0\right)$.

点评　本题综合、全面地考查了直线与椭圆的位置关系,通过用代数的方法,处理几何问题的深入考查,使函数、方程和不等式与解析几何的内容有机结合.该题具备了较强的综合性,有效地考查了考生综合运用知识、分析问题和解决问题的能力以及理性思维的能力.2007年高考全国各套试卷中像这样综合考查曲线和方程等解析几何的基本思想方法及推理运算能力的创新试题还有不少,例如天津文、理卷(22)题等即是如此.

9.以"直线、平面、简单几何体"为背景

【例33】　四位好朋友在一次聚会上,他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯,如图15所示.盛满酒后他们约定:先各自饮杯中酒的一半.设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1、h_2、h_3、h_4,则它们的大小关系正确的是(　　)

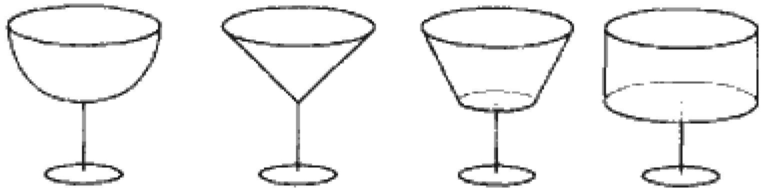


图 15

A. $h_2 > h_1 > h_4$　　B. $h_1 > h_2 > h_3$　　C. $h_3 > h_2 > h_4$　　D. $h_2 > h_4 > h_1$

解析　考生只须仔细观察所给几何体的形状,结合自己的生活经验,易知选 A.

点评　本题设计新颖别致,贴近生活(数学的生活化).近几年高考命题积极支持课程改革,逐步加大了对生产生活中的数学的考查力度.命题者并不想让考生进行大量繁琐的运算,而是试图引导考生多从数学角度去观察思考日常生活问题,多运用数学知识去解决生活问题,真实感受数学之美(本题中不同酒杯的高度展示了立体几何中的体之美,2007 年高考数学卷中体现数学趣味美的试题还有不少,例如重庆卷理科第 22 题所证的椭圆定值体现了曲线的形之美,湖北卷理科第 8 题等差数列求和公式和通项公式间联系探究的式之美,海南、宁夏卷理科第 12 题三棱锥和四棱锥的拼图之美,天津卷文、理第 14 题两圆交线的方程式之美等)在我们生活当中处处可见,同时此题的出现也是新一轮课程改革精神的具体体现.

【例 34】　一个等腰直角三角形的三个顶点分别在正三棱柱的三条侧棱上.已知正三棱柱的底面边长为 2,则该三角形的斜边长为______.

解析　如图 16,作正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 $A_0B_0C_0$,取 A_0B_0 的中点 O,过 O 作直线 DE,分别交 AA_1、BB_1 于 D、E 两点.联结 C_0D、C_0E,则 $\triangle C_0DE$ 为等腰三角形,若 $\triangle C_0DE$ 仍为直角三角形,设 $B_0E = x$,应有 $DE^2 = 2C_0E^2$,即 $2(4+x^2) = 4(1+x^2)$,解得 $x=\sqrt{2}$,这样 $DE = \sqrt{4(1+x^2)} = 2\sqrt{3}$,即等腰 $\mathrm{Rt}\triangle C_0DE$ 斜边长为 $2\sqrt{3}$.

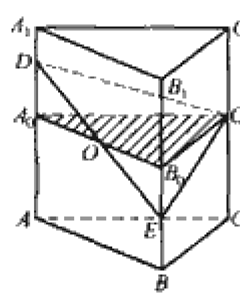


图 16

点评　本题通过正三棱柱内接等腰直角三角形的位置关系的定性分析,考查了考生的空间想象能力、联想类比的思维能力、分析问题和解决问题的能力.题设中所涉及的等腰直角三角形的位置是不定状态,其难点在于根据等腰直角三角形的存在性和图形的对称性确定其位置,一旦位置确定,便可引入线段参数,建立方程或直角坐标系求解.这是一道难得的开放性试题,特别是命制方法值得借鉴.

【例 35】　如图 17,等腰 $\triangle ABC$ 的底边 $AB = 6\sqrt{6}$,高 $CD = 3$,点 E 是线段 BD 上异于 B、D 的动点,点 F 在 BC 边上,且 $EF \perp AB$,现沿 EF 将 $\triangle BEF$ 折起到 $\triangle PEF$ 的位置,使 $PE \perp AE$,记 $BE = x$,$V(x)$ 表示四棱锥 $P-ACEF$ 的体积.

(Ⅰ)求 $V(x)$ 的表达式;

(Ⅱ)当 x 为何值时,$V(x)$ 取得最大值?

(Ⅲ)当 $V(x)$ 取得最大值时,求异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值.

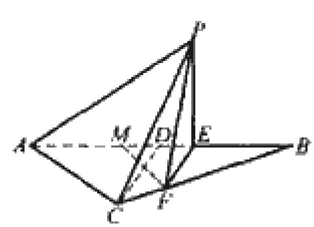


图 17

解析　(Ⅰ)由折起的过程可知,$PE \perp$ 平面 ABC,$S_{\triangle ABC} = 9\sqrt{6}$,$S_{\triangle BEF} = \frac{x^2}{54} \cdot S_{\triangle BDC} = \frac{\sqrt{6}}{12}x^2$,所以

$$V(x) = \frac{\sqrt{6}}{3}x\left(9 - \frac{1}{12}x^2\right), 0 < x < 3\sqrt{6}$$

（Ⅱ）$V'(x)=\frac{\sqrt{6}}{3}(9-\frac{1}{4}x^2)$，所以 $x\in(0,6)$ 时，$V'(x)>0$，$V(x)$ 单调递增；$6<x<3\sqrt{6}$ 时 $V'(x)<0$，$V(x)$ 单调递减；因此 $x=6$ 时，$V(x)$ 取得最大值 $12\sqrt{6}$.

（Ⅲ）过 F 作 $MF\parallel AC$ 交 AD 与 M，则

$$\frac{BM}{AB}=\frac{BF}{BC}=\frac{BE}{BD}=\frac{BE}{\frac{1}{2}AB},MB=2BE=12,PM=6\sqrt{2}$$

$$MF=BF=PF=\frac{6}{3\sqrt{6}}BC=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{54+9}=\sqrt{42}$$

在 $\triangle PFM$ 中，$\cos\angle PFM=\frac{84-72}{2\times 42}=\frac{1}{7}$，所以异面直线 AC 与 PF 所成角的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

点评　本题是一个折叠立体的问题，综合考查了立体几何、函数、导数和极值等相关知识，思维要求和知识综合度均较高，解法也灵活多样，其特色是比较全面地考查了考生的空间想象能力、推理论证能力和求解运算能力，以及创新意识和数学地分析、解决问题的能力.

【例 36】　如图 18，某地为了开发旅游资源，欲修建一条连接风景点 P 和居民区 O 的公路，点 P 所在的山坡面与山脚所在水平面 α 所成的二面角为 $\theta(0°<\theta<90°)$，且 $\sin\theta=\frac{2}{5}$，点 P 到平面 α 的距离 $PH=0.4$ km. 沿山脚原有一段笔直的公路 AB 可供利用. 从点 O 到山脚修路的造价为 a 万元 /km，原有公路改建费用为 $\frac{a}{2}$ 万元 /km. 当山坡上公路长度为 l km$(1\leqslant l\leqslant 2)$ 时，其造价为 $(l^2+1)a$ 万元. 已知 $OA\perp AB$，$PB\perp AB$，$AB=1.5$ km，$OA=\sqrt{3}$ km.

（Ⅰ）在 AB 上求一点 D，使沿折线 $PDAO$ 修建公路的总造价最小；

（Ⅱ）对于（Ⅰ）中得到的点 D，在 DA 上求一点 E，使沿折线 $PDEO$ 修建公路的总造价最小；

（Ⅲ）在 AB 上是否存在两个不同的点 D'、E'，使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于（Ⅱ）中得到的最小总造价，证明你的结论.

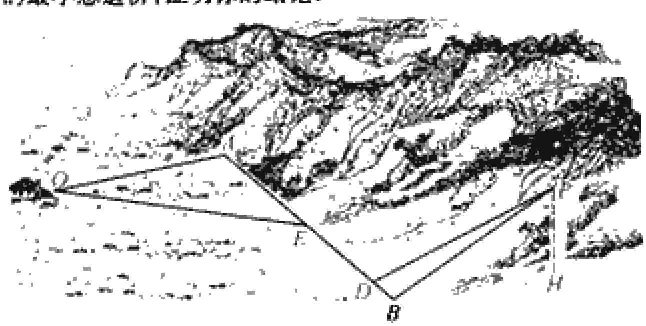


图 18

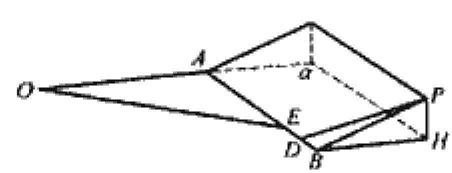


图 19

解析　（Ⅰ）这是立体几何的数学规划问题，要人们首先要看懂图，把自然图 18 变为立体图 19. 接着就可证明 $\angle PBH$ 是山坡与 α 所成二面角的平面角等于 θ，$PB=\frac{PH}{\sin\theta}=1$. 设 $BD=x$ km，$0\leqslant x\leqslant 1.5$，则 $PD=\sqrt{x^2+1}$，所以总造价

$$f_1(x)=(PD^2+1+\frac{1}{2}AD+AO)a=(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{11}{4}+\sqrt{3})a=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2a+\left(\frac{43}{16}+\sqrt{3}\right)a$$

当 $x=\frac{1}{4}$ 时，即 $BD=\frac{1}{4}$ (km) 时，总造价 $f_1(x)$ 最小.

（Ⅱ）设 $AE=y$ (km)，则总造价

$$f_2(y)=\left[PD^2+1+\sqrt{y^2+3}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-y\right)\right]a=\left(\sqrt{y^2+3}-\frac{y}{2}\right)a+\frac{43}{16}a$$

目标函数是根式，为了研究最小值需先求导：$f'_2(y)=\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+3}}-\frac{1}{2}\right)a$，由 $f'_2(y)=0$，得 $y=1$. 而 $f_2(y)$ 在 $(0,1)$ 内是减函数，在 $\left(1,\frac{5}{4}\right)$ 内是增函数. 故 $AE=1$ km 时总造价 $[f_2(y)]_{\min}=\frac{67}{16}a$ 万元.

(Ⅲ) 假定存在这样的点 D'、E'，使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价最小，则 E' 不能位于 D' 与 B 之间，故可设 E' 位于 D' 与 A 之间，且 $BD'=x_1$ km，$AE'=y_1$ km，$0\leqslant x_1+y_1\leqslant\frac{3}{2}$，则总造价

$$S=\left(x_1^2-\frac{x_1}{2}+\sqrt{y_1^2+3}-\frac{y_1}{2}+\frac{11}{4}\right)a$$

类似于(Ⅰ)、(Ⅱ)讨论知 $x_1^2-\frac{x_1}{2}\geqslant-\frac{1}{16}$，$\sqrt{y_1^2+3}-\frac{y_1}{2}\geqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $x_1=\frac{1}{4}$，$y_1=1$ 同时成立时，上述两个不等式等号同时成立，此时 $BD'=\frac{1}{4}$(km)，$AE=1$(km)，S 取得最小值 $\frac{67}{16}a$，点 D'、E' 分别与点 D、E 重合，所以不存在这样的点 D'、E'，使沿折线 $PD'E'O$ 修建公路的总造价小于(Ⅱ)中得到的最小总造价.

点评 这是数学规划中的非线性问题. 第(Ⅰ)问的目标函数是二次函数，用配方法即可求得最小值. 第(Ⅱ)问的目标函数是根式，需要利用求导来研究函数的单调性，才能求出最小值. 第(Ⅲ)问是探索性问题，先假定存在 D'、E'，然后证明点 D'、E' 分别与点 D、E 重合，来否定存在. 本题的特色是集空间想象能力、非线性数学规划以及探索性问题等于一体并蕴含有高等数学背景知识，确实有一定的难度和高等数学背景.

10. 以"排列、组合和二项式定理"为背景

【例 37】 某书店有 11 种杂志，2 元 1 本 8 种，1 元 1 本 3 种，小张有 10 元钱买杂志(每种至多买 1 本，10 元钱刚好用完)，则不同的买法的种数是________(用数字作答).

解析 按照限制条件，即每种至多买一本，10 元钱刚好用完，小张不同的买法的种数只有两种情况，一是从 2 元 1 本 8 种书中任选 5 种，10 元钱刚好用完，有 $C_8^5=56$ 种不同选法；二是从 2 元 1 本 8 种书中任选 4 种，1 元 1 本 3 种书中任选 2 种，有 $C_8^4C_3^2=210$ 种不同选法.

所以不同的买法的种数是 $56+210=266$(种).

点评 这是一道含有限制条件的较复杂的排列组合应用题，可以优先考虑安排特殊元素，然后再考虑其他元素的安排，而每一类的排列组合数可容易地求出，然后根据加法原理求出总数. 要根据实际问题可能产生的多种情况，通过分类与整合作出明确的判断才能进行推理，显然这里渗透了相关数学思想方法. 求解排列组合问题时，要教会学生学会深挖约束条件或隐含因素，否则就会出现遗漏、重复或不符合题意的解答.

11. 以"概率与统计"为背景

【例 38】 图 20 是某县参加去年高考的学生身高条形统计图，从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$(如 A_2 表示身高(单位：cm)在[150,155)内的学生人数). 图 21 是统计图 20 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图. 现要统计身高在 160 ~ 180 cm(含 160 cm，不含 180 cm)的学生人数，那么在流程图中的判断框内应填写的条件是(　　)

A. $i<6$　　B. $i<7$　　C. $i<8$　　D. $i<9$

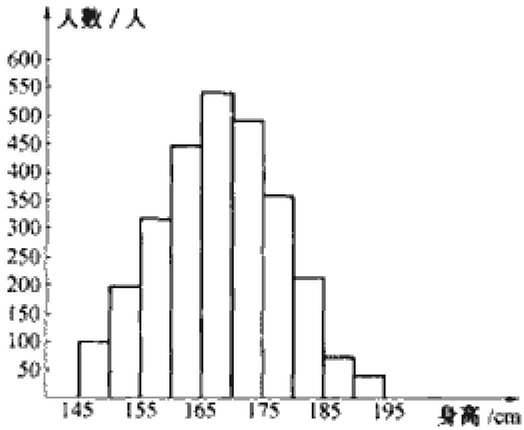


图 20

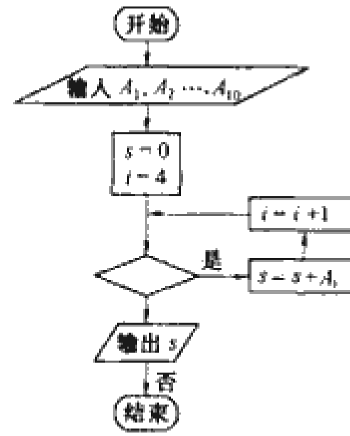


图 21

解析　$S = A_4 + A_5 + A_6 + A_7$，故选 C.

点评　该题注重对数据处理能力的考查，数据处理能力是实施新课程标准后新增加的一种数学基本能力．此题将统计图和算法框图综合在一起，试题新颖，具有较高的思维要求，还考查了算法思想、读图识图能力和推理论证能力．

【例 39】　表 5 提供了某厂节能降耗技术改造后生产甲产品过程中记录的产量 x(t) 与相应的生产能耗 y(吨标准煤) 的几组对照数据．

表 5

x	3	4	5	6
y	2.5	3	4	4.5

(Ⅰ) 请画出表 5 数据的散点图；

(Ⅱ) 请根据表 5 提供的数据，用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $y = \hat{b}x + \hat{a}$；

(Ⅲ) 已知该厂技术改造前 100 t 甲产品能耗为 90 吨标准煤；试根据(Ⅱ)求出的线性回归方程，预测生产 100 t 甲产品的生产能耗比技术改造前降低多少吨标准煤？

$(3 \times 2.5 + 4 \times 3 + 5 \times 4 + 6 \times 4.5 = 66.5)$

解析　(Ⅰ) 由题设所给数据，可得散点图如图 22 所示．

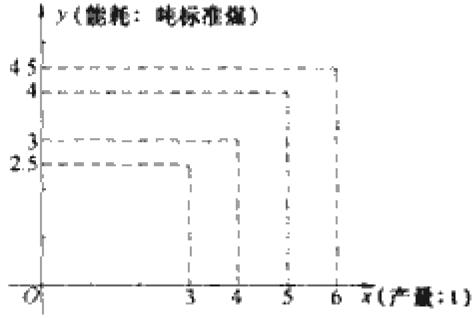


图 22

(Ⅱ) **解法 1**(不作要求)　设线性回归方程为 $y = bx + a$，则

$$f(a,b) = (3b + a - 2.5)^2 + (4b + a - 3)^2 + (5b + a - 4)^2 + (6b + a - 4.5)^2 =$$

$$4a^2+2a(18b-14)+(3b-2.5)^2+(4b-3)^2+(5a-4)^2+(6b-4.5)^2$$

所以 $a=\dfrac{7-9b}{2}=3.5-4.5b$ 时，$f(a,b)$ 取得最小值为

$$(1.5b-1)^2+(0.5b-0.5)^2+(0.5b-0.5)^2+(1.5b-1)^2$$

即
$$0.5[(3b-2)^2+(b-1)^2]=5b^2-7b+\frac{5}{2}$$

所以 $b=0.7$，$a=0.35$ 时 $f(a,b)$ 取得最小值，所以线性回归方程为 $y=0.7x+0.35$.

解法 2 由系数公式可知，$\overline{x}=4.5$，$\overline{y}=3.5$.

$$\hat{b}=\frac{66.5-4\times4.5\times3.5}{86-4\times4.5^2}=\frac{66.5-63}{5}=0.7$$

$$\hat{a}=3.5-0.7\times\frac{9}{2}=0.35$$

所以线性回归方程为 $y=0.7x+0.35$.

（Ⅲ）当 $x=100$ 时，$y=0.7x+0.35=70.35$，所以预测生产 100 t 甲产品的生产能耗比技术改造前降低 19.65 吨标准煤.

点评 此题反映出新课程标准的应用理念，背景符合考生心理成长和学习生活实际，有一定时代气息，反映了正确价值取向，是一道科学严谨的试题.

【例 40】 设 b 和 c 分别是先后抛掷一枚骰子得到的点数，用随机变量 ξ 表示方程 $x^2+bx+c=0$ 实根的个数（重根按一个计）.

（Ⅰ）求方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率；

（Ⅱ）求 ξ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）求在先后两次出现的点数中有 5 的条件下，方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根的概率.

解析 （Ⅰ）由题意知：设基本事件空间为 Ω，记"方程 $x^2+bx+c=0$ 没有实根"为事件 A，"方程 $x^2+bx+c=0$ 有且仅有一个实根"为事件 B，"方程 $x^2+bx+c=0$ 有两个相异实数"为事件 C，则

$$\Omega=\{(b,c)\mid b,c=1,2,\cdots,6\}$$
$$A=\{(b,c)\mid b^2-4c<0,b,c=1,2,\cdots,6\}$$
$$B=\{(b,c)\mid b^2-4c=0,b,c=1,2,\cdots,6\}$$
$$C=\{(b,c)\mid b^2-4c>0,b,c=1,2,\cdots,6\}$$

所以 Ω 的基本事件总数为 36 个，A 中的基本事件总数为 17 个，B 中的基本事件总数为 2 个，C 中的基本事件总数为 17 个. 又因为 B、C 是互斥事件，故所求概率 $P=P(B)+B(C)=\dfrac{2}{36}+\dfrac{17}{36}=\dfrac{19}{36}$.

（Ⅱ）由题意，ξ 的可能取值为 0，1，2，则 $P\{\xi=0\}=\dfrac{17}{36}$，$P\{\xi=1\}=\dfrac{1}{18}$，$P\{\xi=2\}=\dfrac{17}{36}$，故 ξ 的分布列如表 6 所示.

表 6

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{17}{36}$	$\dfrac{1}{18}$	$\dfrac{17}{36}$

所以 ξ 的数学期望 $E\xi=0\times\dfrac{17}{36}+1\times\dfrac{1}{18}+2\times\dfrac{17}{36}=1$.

（Ⅲ）记"先后两次出现的点数中有 5"为事件 D，"方程 $x^2+bx+c=0$ 有实根"为事件 E，由上面分析得 $P(D)=\dfrac{11}{36}$，$P(D\cap E)=\dfrac{7}{36}$，所以 $P(E\mid D)=\dfrac{P(D\cap E)}{P(D)}=\dfrac{7}{11}$.

点评 这道概率统计题综合性极强，它融合了古典概率、条件概率、数学期望、二次方程的判别式

等多个数学知识,同时渗透有分类与整合(需对一元二次方程根的个数进行讨论)等数学思想,充分体现了学科知识的内在联系和综合应用.

【例41】 某中学号召学生在今年春节期间至少参加一次社会公益活动(以下简称活动).该校合唱团共有100名学生,他们参加活动的次数统计如图23所示.

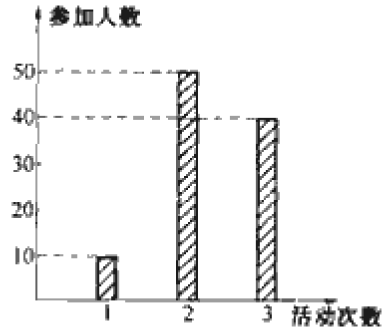


图23

(Ⅰ)求合唱团学生参加活动的人均次数;

(Ⅱ)从合唱团中任意选两名学生,求他们参加活动次数恰好相等的概率;

(Ⅲ)从合唱团中任选两名学生,用 ξ 表示这两人参加活动次数之差的绝对值,求随机变量 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

解析 由图23可知,参加活动1次、2次和3次的学生人数分别为10、50和40.

(Ⅰ)该合唱团学生参加活动的人均次数为 $\frac{1\times10+2\times50+3\times40}{100}=\frac{230}{100}=2.3$.

(Ⅱ)从合唱团中任选两名学生,他们参加活动次数恰好相等的概率为

$$P_0=\frac{C_{10}^2+C_{50}^2+C_{40}^2}{C_{100}^2}=\frac{41}{99}$$

(Ⅲ)从合唱团中任选两名学生,记"这两人中一人参加1次活动,另一人参加2次活动"为事件 A,"这两人中一人参加2次活动,另一人参加3次活动"为事件 B,"这两人中一人参加1次活动,另一人参加3次活动"为事件 C.易知

$$P(\xi=1)=P(A)+P(B)=\frac{C_{10}^1C_{50}^1}{C_{100}^2}+\frac{C_{50}^1C_{40}^1}{C_{100}^2}=\frac{50}{99}$$

$$P(\xi=2)=P(C)=\frac{C_{10}^1C_{40}^1}{C_{100}^2}=\frac{8}{99}$$

ξ 的分布列(表7):

表7

ξ	0	1	2
P	$\frac{41}{99}$	$\frac{50}{99}$	$\frac{8}{99}$

ξ 的数学期望:$E\xi=0\times\frac{41}{99}+1\times\frac{50}{99}+2\times\frac{8}{99}=\frac{2}{3}$.

点评 此题将概率、分布列、数学期望和频率分布直方图等诸多统计知识交汇在一起考查,是近几年少见的解答题中的应用题考查模式.这就要求考生必须抓牢大纲要求所学的每个知识板块.

【例42】 某商场经销某商品,根据以往资料统计,顾客采用的付款期数 ξ 的分布列如表8所示.

表8

ξ	1	2	3	4	5
P	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1

商场经销一件该商品,采用1期付款,其利润为200元;分2期或3期付款,其利润为250元;分4期或5期付款,其利润为300元.η 表示经销一件该商品的利润.

(Ⅰ)求事件 A:"购买该商品的3位顾客中,至少有1位采用1期付款"的概率 $P(A)$;

(Ⅱ)求 η 的分布列及期望 $E\eta$.

解析 (Ⅰ)由 A 表示事件"购买该商品的3位顾客中至少有1位采用1期付款",知 $\overline{A}$ 表示事件"购买该商品的3位顾客中无人采用1期付款".

$$P(\overline{A})=(1-0.4)^3=0.216,P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.216=0.784$$

(Ⅱ)η 的可能取值为200元、250元、300元.

$$P(\eta=200)=P(\xi=1)=0.4,P(\eta=250)=P(\xi=2)+P(\xi=3)=0.2+0.2=0.4$$

$$P(\eta=300)=1-P(\eta=200)-P(\eta=250)=1-0.4-0.4=0.2$$

η 的分布列如表9所示.

表9

η	200	250	300
P	0.4	0.4	0.2

$$E\eta=200\times0.4+250\times0.4+300\times0.2=240(\text{元})$$

点评 这道概率解答题跟往年全国卷的题目相比有一个明显的不同,在这道题当中涉及两个随机变量.以往我们做题的时候,一道题基本上都涉及一个随机变量,这次涉及两个随机变量,就需要我们把两个随机变量之间的关系搞清楚.而这个考查要点也恰恰是概率当中的一个重点,因为我们研究概率就是要研究随机变量的相关性,研究随机变量的特点.因此,这个题考生感觉很眼熟,但是一做就会发现跟以往所做的那些题目还是有所区别的.不过尽管有这样一种区别,但并未明显增加这种题目的难度,而是在大纲所规定的范围内,把概率的特点体现得更加突出,这就意味着我们今后的教学要很好地关注数学的实质,而不是只关注题型,不是只关注某些机械的一成不变的解题模式,而是能够用数学的思考去分析问题、处理问题和解决问题.

【例43】 在医学生物学试验中,经常以果蝇作为试验对象.一个关有6只果蝇的笼子里,不慎混入了两只苍蝇(此时笼内共有8只蝇子,6只果蝇和2只苍蝇),只好把笼子打开一个小孔,让蝇子一只一只地往外飞,直到两只苍蝇都飞出,再关闭小孔.以 ξ 表示笼内还剩下的果蝇的只数.

(Ⅰ)写出 ξ 的分布列(不要求写出计算过程);(Ⅱ)求数学期望 $E\xi$;(Ⅲ)求概率 $P(\xi\geqslant E\xi)$.

解析 (Ⅰ)ξ 的分布列表10所示.

表10

ξ	0	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{7}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$

(Ⅱ)数学期望为 $E\xi=\frac{2}{28}(1\times6+2\times5+3\times4)=2$.

(Ⅲ)所求的概率为 $P(\xi\geqslant E\xi)=P(\xi\geqslant2)=\frac{5+4+3+2+1}{28}=\frac{15}{28}$.

点评 本小题选用医学实验为背景,设计新颖,主要考查等可能事件概率的计算、离散型随机变量的分布列、数学期望的概念及其计算,考查分析问题及解决实际问题的能力.

12.以"极限"为背景

【例44】 设正数 a、b 满足 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax-b)=4$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+ab^{n-1}}{a^{n-1}+2b^n}=(\quad)$

A.0 B.$\frac{1}{4}$ C.$\frac{1}{2}$ D.1

解析 由 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax-b)=4$ 得 $4+2a-b=4$,即 $b=2a$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+ab^{n-1}}{a^{n-1}+2b^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+2^{n-1}a^{n}}{a^{n-1}+2^{n+1}a^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a}}{\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{a}}=\frac{1}{4}$$

点评　本题新颖之处在于将函数极限和数列极限相结合，打破了以前此类问题单一考查的命题模式.

13. 以"复数"为背景

【例45】　对于非零实数 a、b，以下四个命题都成立：① $a+\frac{1}{a}\neq 0$；② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；③ 若 $|a|=|b|$，则 $a=\pm b$；④ 若 $a^2=ab$，则 $a=b$.

那么，对于非零复数 a、b，仍然成立的命题的所有序号是________.

解析　对于命题①，当复数 $a=\mathrm{i}$ 时，$a+\frac{1}{a}=0$，故命题①错误；对于命题③，若复数 $a=3+4\mathrm{i}$，$b=3-4\mathrm{i}$，则 $|a|=|b|$，而 $a\neq\pm b$，故命题③错误；命题②④对于非零复数 a，b 仍然成立，所以正确答案选②④.

点评　本题巧妙地考查了实数与复数运算律的异同，其目的在于引导中学生加强类比、推广等主动性学习方式的优化.

(三)2008全国高考数学试题“亮点”品评

高中数学新课程标准要求学生“对新颖的信息、情景和设问,选择有效的方法和手段收集信息,综合与灵活的应用所学知识、思想和方法,进行独立的思考、探索和研究,提出解决问题的思路,创造性地解决问题”.高考数学考试大纲也明确指出:在考试中要创设比较新颖的问题情景,注重问题的多样化.综观近几年高考试题,试卷在创新改革题型的“试验田”中迈出了较大步伐,相继推出了一些题意新颖、构思精巧,具有相当深度和明确导向的创新题型,使高考数学试卷充满活力,并随之也加大了高考试题的难度.下面就2008年全国高考数学试卷中的“亮点”试题(即创新题型)进行完全解读,旨在探索高考题型规律,总结解题方法,更好地服务我们的教和学.

1. 情景创新

这类试题是指以考生已有的知识为基础,给出一定容量的新信息,要求学生能运用这些知识做进一步的运算、推理和迁移,做到“化生为熟”,考查学生解决新问题的能力.定义型试题正是体现其精神较好的一类信息迁移题型,这类题型主要通过先提供或设计一个陌生的情境(例如,给出一个新概念,或约定一种新运算,或给出几个新模型来创设全新的问题情景),要求考生在阅读理解的基础上,依据题目提供的信息,联系所学的知识和方法,实现信息的迁移,达到灵活解决所面临的新问题的目的.通过观察、阅读去理解所定义的新概念、新运算等,从中获得解题所需的知识、信息,并立即将其恰当综合应用到实际解题过程中,从而考查其阅读理解、知识迁移的能力及后续学习的潜能.近几年的高考数学试题,在能力立意的基础上大胆地进行了改革创新,2008年全国高考又出现了一批设计新颖内容丰富的新定义型试题,这与高中新课程标准的要求是相吻合的.此类题型特点是:内容新颖、推理简捷、即时运用,突出信息迁移.

(1) 定义新概念

【例1】 (福建卷,文16)设P是一个数集,且至少含有两个数,若对任意$a、b\in P$,都有$a+b、a-b、ab、\frac{a}{b}\in P(b\neq 0)$,则称$P$是一个数域,例如有理数集$\mathbf{Q}$是数域,有下列命题:

①数域必含有0,1两个数;②整数集是数域;③若有理数集$\mathbf{Q}\subseteq M$,则数集M必为数域;④数域必为无限集.其中正确的命题的序号是________.(把你认为正确的命题的序号都填上)

解析　依据数域的定义,从正反两个方面加以验证其正确与否.

通过阅读,提取关键信息:(1)数域应该是数;(2)数域应该对加减乘除具有封闭性(即运算后得到的数还属于本数集).由于至少含有两个元素,可从数域P中选择不等于0的数a,则$a-a=0\in P,\frac{a}{a}=1\in P$,故①正确;对于整数集,对于除法不具有封闭性,例如,对于2和3,就不可以,故②错误;对于③,选择举例子的办法,即可排除,例如$M=\mathbf{Q}\cup\{\sqrt{2}\}$;对于④,对于数域$P$是不是无限集,选择的判断方法应该是反证法,假设是有限集,元素个数为n个,故不妨设为$a_1<a_2<\cdots<a_n$,由于数域必含有0和1,若$a_1=0$,则$a_2>0$,那么$a_1-a_2<a_1=0$,则$a_1-a_2\notin P$,矛盾;若$a_1\neq 0$,则$a_1<0$,那么a_1+

$a_1<a_1$，则 $a_1+a_1\notin P$，矛盾；当然对于④，我们也可以选择一个具体的数集去验证，例如取有限数集 $\{-8,-3,0,1,5,7\}$，我们很容易判断其不符合数域的定义，我们有理由得出数域应该是无限集. 从而答案为①④.

点评 数域对考生来说，应该说是一个全新的概念，要使问题得到圆满解决，必须真正领会"数域"的含义. 本题在新概念的背景下，具有较强的发散性，这就要求考生在新的环境下，提取关键信息，依据新概念的规定，通过合理的逻辑推理，灵活地选择合适的手段来进行探索判断，从而发现规律，破解此题. 本题可谓是"新"题"活"做，活在对每一问的方法处理上.

例题链接 设 P 是一个数集，且至少含有两个数，若对任意 $a、b\in P$，都有 $a+b、a-b、ab、\frac{a}{b}\in P(b\neq 0)$，则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域；数集 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ 也是数域. 有下列命题：

①整数集是数域；②若有理数集 $\mathbf{Q}\subseteq M$，则数集 M 必为数域；③数域必为无限集；④存在无穷多个数域.

其中正确的命题的序号是________（把你认为正确的命题的序号都填上）.

解析 数集中取2个数2,3，由于 $\frac{2}{3}\notin\mathbf{Z}$，所以①错；整数 M 满足 $\mathbf{Q}\subseteq M$，M 中有异于 $\mathbf{Q}$ 的一个无理数，显然此时 M 不符合定义，故②错，由定义知③④符合定义.

(2) 定义新函数

【例2】（湖南卷，文15）设【x】表示不超 x 的最大整数（如【2】$=2$，【$\frac{5}{4}$】$=1$）. 对于给定的 $n\in\mathbf{N}^*$，定义 $C_n^x=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}$，$x\in[1,+\infty)$，则 $C_8^{\frac{3}{2}}=$________；当 $x\in(2,3)$ 时，函数 C_8^x 的值域是________.

解析 由题意知：$[\frac{3}{2}]=1$，$C_8^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$；当 $x\in(2,3)$，$[x]=2$，此时 $C_8^x=\frac{8\times(8-1)}{x(x-1)}=\frac{8\times 7}{x(x-1)}$，$x\in[2,3)$ 为减函数. 当 $x=2$ 时，$C_8^2=\frac{8\times 7}{2\times 1}=28$，当 $x\to 3$ 时，$C_8^x=\frac{8\times 7}{3\times 2}=\frac{28}{3}$，故函数 C_8^x 的值域是 $(\frac{28}{3},28]$.

点评 本题在学生已学过的概念——组合的基础上，稍加改造，创新定义了一个新函数；解决此题的关键是对"【x】"的充分理解，即弄清楚所定义函数的结构及性质. 此题着重考查学生对新数学符号的理解与运用能力，较好地考查了考生的双基和对数学思想方法掌握的情况，能考查出考生的数学素养，重在考查学生的阅读能力、分析能力、随机应变能力、探索能力和思维的发散性. 本题可谓是"新"题"旧"做.

相关链接 设【x】表示不超过 x 的最大整数（如【2】$=2$，【$\frac{5}{4}$】$=1$）. 对于给定的 $n\in\mathbf{N}^*$，定义 $C_n^x=\frac{n(n-1)\cdots(n-[x]+1)}{x(x-1)\cdots(x-[x]+1)}$，$x\in[1,+\infty)$，则当 $x\in[\frac{3}{2},3)$ 时，函数 C_8^x 的值域是（　　）.

A. $\left[\frac{16}{3},28\right]$　　B. $\left[\frac{16}{3},56\right)$　　C. $\left(4,\frac{28}{3}\right)\cup(28,56)$　　D. $\left(4,\frac{16}{3}\right]\cup\left(\frac{28}{3},28\right]$

解析 $x\in\left[\frac{3}{2},3\right)$ 时，得【x】$\in\{1,2\}$，当【x】$=1$ 时，$x\in[\frac{3}{2},2)$，$C_8^x=\frac{8}{x}\in(4,\frac{16}{3}]$；

当【x】$=2$ 时，$x\in[2,3)$，$C_8^x=\frac{8\times 7}{x(x-1)}=\frac{56}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\in(\frac{28}{3},28]$. 故选 D.

(3) 定义新运算

【例3】（江西卷，文、理2）定义集合运算：$A*B=\{z\mid z=xy,x\in A,y\in B\}$．设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $A*B$ 的所有元素之和为(　　)

A.0　　B.2　　C.3　　D.6

解析　通过阅读分析，解决本题的方法手段应该是枚举法．采用枚举法得出集合 $A*B$ 的元素：①$x=1,y=0,z=xy=0$；②$x=1,y=2,z=xy=2$；③$x=2,y=0,z=xy=0$；④$x=2,y=2,z=xy=4$；这样 $A*B=\{0,2,4\}$，故选 D.

点评　本题借助于新的运算——集合运算，得到了一个新的集合，要求考生求出所有元素之和，题目呈现的形式较为新颖．通过观察阅读不难发现，此题实质就是分别从两个集合中选取元素作积，再构成新集合的元素，这对于考生来说应该是很熟悉的．对此，只要考生依据新的运算方式，选择合适的解题方法——枚举法，不难化解难点．此题以集合为载体，通过新定义"$*$"，考查学生的阅读理解能力和对新知识的转化能力，可谓是"旧"题穿"新"衣．

【例4】（陕西卷，理12）为提高信息在传输中的抗干扰能力，通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信息．设定原信息为 $a_0a_1a_2$，$a_i\in\{0,1\}(i=0,1,2)$，传输信息为 $h_0a_0a_1a_2h_1$，其中 $h_0=a_0\oplus a_1$，$h_1=h_0\oplus a_2$，$\oplus$ 运算规则为：$0\oplus0=0$，$0\oplus1=1$，$1\oplus0=1$，$1\oplus1=0$．例如原信息为111，则传输信息为01111．传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错，则下列接收信息一定有误的是(　　)

A.11010　　B.01100　　C.10111　　D.00011

解析　依据题设中定义，先弄清原信息与传输信息之间的联系，再运用定义的运算验证．

对于答案A，由题设易知原信息是101，很容易检验 $1\oplus0=1$，$1\oplus1=0$ 恰为传输信息中的首尾两数，故答案A正确；对于答案B，由题设易知原信息是110，很容易检验 $1\oplus1=0$，$0\oplus0=0$ 恰为传输信息中的首尾两数，故答案B正确；对于答案C，由题设易知原信息是011，很容易检验传输信息中的首位数为 $0\oplus1=1$，末位应为 $1\oplus1=0$，故答案C不正确，故传输信息一定有误；同样可以验证答案D也是正确的，故选 C.

点评　本题自主定义的是运算"$\oplus$"和相关法则，求解时只有读懂运算"$\oplus$"的相关定义，才能迈开解决问题的步伐．

(4) 定义新动点

【例5】（上海卷，文、理15）如图1，在平面直角坐标系中，Ω 是一个与 x 轴的正半轴、y 轴的正半轴分别相切于点 C、D 的定圆所围成区域（含边界），A、B、C、D 是该圆的四等分点，若点 $P(x,y)$、$P'(x',y')$ 满足 $x\leqslant x'$ 且 $y\geqslant y'$，则称 P 优于 P'，如果 Ω 中的点 Q 满足：不存在 Ω 中的其他点优于 Q，那么所有这样的点 Q 组成的集合是劣弧(　　)

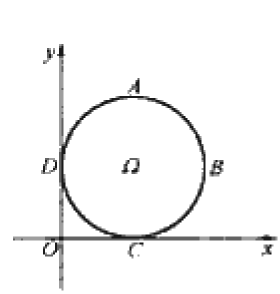


图1

A. $\overset{\frown}{AB}$　　B. $\overset{\frown}{BC}$　　C. $\overset{\frown}{CD}$　　D. $\overset{\frown}{DA}$

解析　先搞清"P 优于 P'"定义的内涵，然后在判断符合题设的答案．

通过审题，提取关键信息：(1) 若点 $P(x,y)$、$P'(x',y')$ 满足 $x\leqslant x'$ 且 $y\geqslant y'$，则称 P 优于 P'，即横小纵大；(2) 不存在 Ω 中的其他点优于 Q；由题意可知点 Q 组成的集合是劣弧，因此可采用特殊点法．依据定义不难看出，点 A 要优于 B，故点 B 不合题意，排除答案 A、B，又点 D 要优于 C，点 C 不合题意，故排除答案 C；从而得到答案选 D.

点评　本题考查学生阅读理解反馈处理信息的能力，理解透彻劣弧概念是关键．本题通过两个点纵横坐标的大小比较，定义了"P 优于 P'"．解决问题的关键一要看考生的阅读理解的能力和迁移能力，二要看能否选择巧妙的方法；本题体现了以能力为立意的命题思路，充分考查了考生的双基和应变能

力. 本题可谓是"新"题"巧"做.

(5) 定义新线段

【例6】 (江西卷, 理10) 联结球面上两点的线段称为球的弦. 半径为4的球的两条弦 AB、CD 的长度分别等于 $2\sqrt{7}$, $4\sqrt{3}$, M、N 分别为 AB、CD 的中点, 每条弦的两端都在球面上运动, 有下列四个命题:

① 弦 AB、CD 可能相交于点 M; ② 弦 AB、CD 可能相交于点 N; ③ MN 的最大值为5; ④ MN 的最小值为1. 其中真命题的个数为(　　)

A. 1个　　　B. 2个　　　C. 3个　　　D. 4个

解析　由题意知过 AB 和球心 O 可作一个大圆; 同样, 过 CD 和球心 O 也能作大圆. 这样我们可以将问题集中在同一个大圆中进行处理, 过 AB 的中点 M 的所有的弦中最短的是 AB, 由于 $AB = 2\sqrt{7} < CD = 4\sqrt{3}$, 故弦 AB、CD 可能相交于点 M, 故 ① 正确; 过 CD 的中点 N 的所有的弦中最短的是 CD, 而 $AB = 2\sqrt{7} < CD = 4\sqrt{3}$, 故弦 AB、CD 不可能相交于点 N, 故 ② 错误; 由于大圆的圆心 O 到弦 AB、CD 的距离分别为 $\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=3$ 和 $\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$, 不难得出 MN 的最大值为5, 最小值为1, 故 ③④ 也正确. 故选 C.

点评　本题的背景对考生而言是很熟悉的, 考生只须将此问题转化为圆的问题即可解决, 本题考查了化归的思想方法及考生的双基和迁移能力. 本题属于"旧"题"新"衣.

【例7】 (湖南卷, 理20) 若 A、B 是抛物线 $y^2=4x$ 上不同两点, 弦 AB(不平行于 y 轴) 的垂直平分线与 x 轴交于点 P, 则称 AB 是点 P 的一条"相关弦". 已知当 $x>2$ 时, 点 $P(x,0)$ 存在无穷多条"相关弦". 给定 $x_0>2$.

(Ⅰ) 证明: 点 $P(x_0,0)$ 的所有"相关弦"中的中点横坐标相同;

(Ⅱ) 试问: 点 $P(x_0,0)$ 的"相关弦"的弦长中是否存在最大值? 若存在, 求其最大值(用表示); 若不存在, 请说明理由.

解析　依据"相关弦"的定义, 借助所学知识解决题中问题.

(Ⅰ) 设 AB 为点 $P(x_0,0)$ 的任意一条"相关弦", 且 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$, 则 $y_1^2=4x_1$, $y_2^2=4x_2$, 两式相减得 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=4(x_1-x_2)$, 因 $x_1\neq x_2$ 且 $y_1+y_2\neq 0$, 故 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}$, 设直线 AB 的斜率为 k, 弦 AB 的中点为 $M(x_m,y_m)$, 则 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{2}{y_m}$, 所以 AB 垂直平分线的方程为 $y-y_m=-\frac{y_m}{2}(x-x_m)$, 又点 $P(x_0,0)$ 在直线 AB 上, 故 $0-y_m=-\frac{y_m}{2}(x_0-x_m)$, 注意到 $y_m\neq 0$, 所以 $x_m=x_0-2$, 即点 $P(x_0,0)$ 的所有"相关弦"中的中点横坐标都是 $x_m=x_0-2$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知弦 AB 所在的直线方程为 $y-y_m=k(x-x_m)$, 代入 $y^2=4x$ 中并整理可得

$$k^2x^2+2[k(y_m-kx_m)-2]x+(y_m-kx_m)^2=0 \qquad ①$$

则 x_1、x_2 是方程①的两根, 由韦达定理得 $x_1x_2=\frac{(y_m-kx_m)^2}{k^2}$, 注意到 $k=\frac{2}{y_m}$, 故 $x_1x_2=\frac{(y_m^2-2x_m)^2}{4}$. 设点 $P(x_0,0)$ 的"相关弦" AB 的长为 l, 则

$$l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

即

$$l=\sqrt{4(l+k^2)(x_m^2-x_1x_2)}$$

又因为 $x_1x_2=\frac{(y_m^2-2x_m)^2}{4}$, 所以

$$l=\sqrt{4(1+\frac{4}{y_m^2})(x_m^2-\frac{(y_m^2-2x_m)^2}{4})}=\sqrt{-y_m^4+4y_m^2(x-1)+16x_m}=$$

$$\sqrt{4(x_m+1)^2-[y_m^2-2(x_m-1)]^2}$$

注意到 $x_m = x_0 - 2$，所以 $l = \sqrt{4(x_0-1)^2 - [y_m^2 - 2(x_0-3)]^2}$，又因为 $0 < y_m^2 < 4x_m = 4(x_0 - 2) = 4x_0 - 8$，设 $t = y_m^2$，则 $t \in (0, 4x_0 - 8)$.

记 $l^2 = g(t) = -[t - 2(x_0-3)]^2 + 4(x_0-1)^2$，若 $x_0 > 3$，则 $2(x_0-3) \in (0, 4x_0-8)$，故当 $t = 2(x_0-3)$，即 $y_m^2 = 2(x_0-3)$ 时，$l_{\max} = \sqrt{4(x_0-1)^2} = 2(x_0-1)$；若 $2 < x_0 \leqslant 3$ 时，$2(x_0-3) \leqslant 0$，函数 $g(t)$ 在区间 $(0, 4x_0-8)$ 上单调递减，所以 $0 < l^2 < 16(x_0-2)$，此时函数 $g(t)$ 不存在最大值；综上所述：当 $x_0 > 3$ 时，点 $P(x_0, 0)$ 的"相关弦"的弦长中存在最大值，且最大值为 $2(x_0-1)$；当 $2 < x_0 \leqslant 3$ 时，点 $P(x_0, 0)$ 的"相关弦"的弦长中不存在最大值.

点评 本题是用即刻学到的"相关弦"的定义这一新知识，解决从未见到的数学问题，从而考查学生在新的信息、新的情景下，独立获取和运用新信息的能力.

(6) 定义新变换

【例 8】 (北京卷，理 20) 对于每项均是正整数的数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$，定义变换 T_1，T_1 将数列 A 变换成数列 $T_1(A): n, a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_n - 1$. 对于每项均是非负整数的数列 $B: b_1, b_2, \cdots, b_m$，定义变换 T_2，T_2 将数列 B 各项从大到小排列，然后去掉所有为零的项，得到数列 $T_2(B)$；又定义

$$S(B) = 2(b_1 + 2b_2 + \cdots + mb_m) + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2$$

设 A_0 是每项均为正整数的有穷数列，令 $A_{k+1} = T_2(T_1(A_k))(k = 0, 1, 2, \cdots)$.

(Ⅰ) 如果数列 A_0 为 5, 3, 2，写出数列 A_1、A_2；

(Ⅱ) 对于每项均是正整数的有穷数列 A，证明：$S(T_1(A)) = S(A)$；

(Ⅲ) 证明：对于任意给定的每项均为正整数的有穷数列 A_0，存在正整数 K，当 $k \geqslant K$ 时，$S(A_{k+1}) = S(A_k)$.

解析 依据题中的新定义并利用题设中的条件来解答题中所提供的相关问题.

(Ⅰ) A_0: 5, 3, 2; $T_1(A_0)$: 3, 4, 2, 1; $A_1 = T_2(T_1(A_0))$: 4, 3, 2, 1; $T_1(A_1)$: 4, 3, 2, 1, 0; $A_2 = T_2(T_1(A_1))$: 4, 3, 2, 1.

(Ⅱ) 设每项均是正整数的有穷数列 A 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，则 $T_1(A)$ 为 $n, a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_n - 1$，从而

$$S(T_1(A)) = 2[n + 2(a_1-1) + 3(a_2-1) + \cdots + (n+1)(a_n-1)] + n^2 + (a_1-1)^2 + (a_2-1)^2 + \cdots + (a_n-1)^2$$

又

$$S(A) = 2(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

所以

$$S(T_1(A)) - S(A) = 2[n - 2 - 3 - \cdots - (n+1)] + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n = -n(n+1) + n^2 + n = 0$$

故

$$S(T_1(a)) = S(A)$$

(Ⅲ) 设 A 是每项均为非负整数的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

当存在 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，使得 $a_i \leqslant a_j$ 时，交换数列 A 的第 i 项与第 j 项得到数列 B，则

$$S(B) - S(A) = 2(ia_j + ja_i - ia_i - ja_j) = 2(i-j)(a_j - a_i) \leqslant 0$$

当存在 $1 \leqslant m < n$，使得 $a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_n = 0$ 时，若记数列 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为 C，则 $S(C) = S(A)$，所以 $S(T_2(A)) \leqslant S(A)$.

从而对于任意给定的数列 A_0，由 $A_{k+1} = T_2(T_1(A_k))(k = 0, 1, 2, \cdots)$，可知 $S(A_{k+1}) \leqslant S(T_1(A_k))$.

又由(Ⅱ)可知 $S(T_1(A_k)) = S(A_k)$，所以 $S(A_{k+1}) \leqslant S(A_k)$.

即对于 $k \in \mathbf{N}$，要么有 $S(A_{k+1}) = S(A_k)$，要么有 $S(A_{k+1}) \leqslant S(A_k) - 1$.

因为 $S(A_k)$ 是大于 2 的整数，所以经过有限步后，必有 $S(A_k) = S(A_{k+1}) = S(A_{k+2}) = \cdots$.

即存在正整数 K，当 $k \geqslant K$ 时，$S(A_{k+1}) = S(A_k)$.

点评 本题对数列的变换及定义等都比较新颖. 考生必须灵活运用所学知识，对新的情景、新的概

念,通过阅读、理解、推理论证、演算等才能得出合理的结论."变换数列"是一个全新的概念,所以要使问题得到圆满的解决,必须深刻理解"变换数列"的新规则,然后借用数列的运算规则把问题转化.本题在阅读和推理论证演算等方面有较高的要求,在问题设置上有一定的坡度和难度,不容易做对.解此类问题需仔细阅读、理解题意和较强的转换能力,即把"变换数列"转化为普通的数列.着力体现概念性、思辨性,对考生在数学思想、理性思维、自主学习能力和探究能力以及数学潜能素养方面作了比较深入的考查.本题可谓"新"题"新"做.

(7) 定义新长度

【例9】 (江苏卷20) 若 $f_1(x)=3^{|x-p_1|}$, $f_2(x)=2\cdot 3^{|x-p_2|}$, $x\in\mathbf{R}$, p_1、p_2 为常数,且

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & f_1(x)\leqslant f_2(x)\\ f_2(x), & f_1(x)>f_2(x)\end{cases}$$

(Ⅰ) 求 $f(x)=f_1(x)$ 对所有实数 x 成立的充要条件(用 p_1、p_2 表示);

(Ⅱ) 设 a、b 为两实数,$a<b$ 且 p_1、$p_2\in(a,b)$ 若 $f(a)=f(b)$,求证:$f(x)$ 在区间 (a,b) 上的单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$(闭区间 $[m,n]$ 的长度定义为 $n-m$).

解析 (Ⅰ) $f(x)=f_1(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow f_1(x)\leqslant f_2(x)\Leftrightarrow 3^{|x-p_1|}\leqslant 2\cdot 3^{|x-p_2|}\Leftrightarrow$

$$3^{|x-p_1|-|x-p_2|}\leqslant 2\Leftrightarrow |x-p_1|-|x-p_2|\leqslant \log_3 2 \qquad ①$$

若 $p_1=p_2$,则 ①$\Leftrightarrow 0\leqslant\log_3 2$,显然成立;若 $p_1\neq p_2$,记 $g(x)=|x-p_1|-|x-p_2|$.

当 $p_1>p_2$ 时

$$g(x)=\begin{cases}p_1-p_2, & x<p_2\\ -2x+p_1+p_2, & p_2\leqslant x\leqslant p_1\\ p_2-p_1, & x>p_1\end{cases}$$

所以 $g(x)_{\max}=p_1-p_2$,故只须 $p_1-p_2\leqslant\log_3 2$.

当 $p_1<p_2$ 时

$$g(x)=\begin{cases}p_1-p_2, & x<p_1\\ 2x-p_1-p_2, & p_1\leqslant x\leqslant p_1\\ p_2-p_1, & x>p_2\end{cases}$$

所以 $g(x)_{\max}=p_2-p_1$,故只须 $p_2-p_1\leqslant\log_3 2$.

综上所述,$f(x)=f_1(x)$ 对所有实数成立的充要条件是 $|p_1-p_2|\leqslant\log_3 2$.

(Ⅱ)① 如果 $|p_1-p_2|\leqslant\log_3 2$,则 $f(x)=f_1(x)$ 的图象关于直线 $x=p_1$ 对称(图2).

因为 $f(a)=f(b)$,所以区间 $[a,b]$ 关于直线 $x=p_1$ 对称.

因为减区间为 $[a,p_1]$,增区间为 $[p_1,b]$,所以单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$.

② 如果 $|p_1-p_2|>\log_3 2$,不妨设 $p_1<p_2$,则 $p_2-p_1>\log_3 2$,于是当 $x\leqslant p_1$ 时,$f_1(x)=3^{p_1-x}<3^{p_2-x}<f_2(x)$,从而 $f(x)=f_1(x)$.

当 $x\geqslant p_2$ 时,$f_1(x)=3^{x-p_1}=3^{p_2-p_1}\cdot 3^{x-p_2}<3^{\log_3 2}\cdot 3^{x-p_2}=f_2(x)$,从而 $f(x)=f_2(x)$.

当 $p_1<x<p_2$ 时,$f_1(x)=3^{x-p_1}$ 及 $f_2(x)=2\cdot 3^{p_2-x}$,由方程 $3^{x_0-p_1}=2\cdot 3^{p_2-x_0}$ 得

$$x_0=\frac{p_1+p_2}{2}+\frac{1}{2}\log_3 2 \qquad ①$$

显然 $p_1<x_0=p_2-\frac{1}{2}[(p_2-p_1)-\log_3 2]<p_2$,表明 x_0 在 p_1 与 p_2 之间,所以

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & p_1<x\leqslant x_0\\ f_2(x), & x_0<x<p_2\end{cases}$$

综上可知，在区间 $[a,b]$ 上

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & a\leqslant x\leqslant x_0\\ f_2(x), & x_0<x\leqslant b\end{cases}\quad(\text{图 }3)$$

故由函数 $f_1(x)$ 及函数 $f_2(x)$ 的单调性可知，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度之和为 $(x_0-p_1)+(b-p_2)$，由 $f(a)=f(b)$，即 $3^{p_1-a}=2\cdot 3^{b-p_2}$，得

$$p_1+p_2=a+b+\log_3 2 \qquad ②$$

故由 ①② 得

$$(x_0-p_1)+(b-p_2)=b-\frac{1}{2}[p_1+p_2-\log_3 2]=\frac{b-a}{2}$$

综合 ①② 可知，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的单调增区间的长度和为 $\frac{b-a}{2}$.

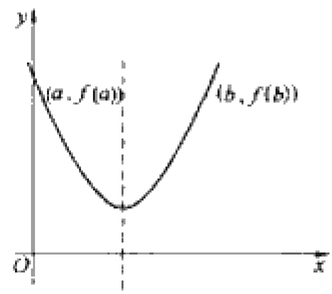


图 2

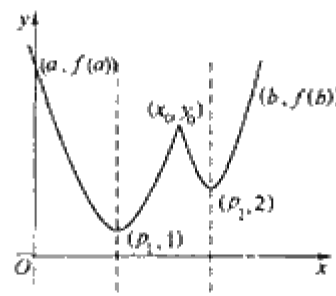


图 3

点评 本题考查了充要条件、指数函数与绝对值函数以及不等式的综合运用，综合能力要求高. 本题在第二问上定义了区间长度，问题涉及了函数的性质，难度较大、考生难于理解. 本题重点考查了考生进一步学习的潜能，有利于高校选拔人才.

2. 开放探索

所谓开放探索型问题是相对于中学课本中有明确条件和明确结论的封闭型问题而言的. 这类试题的知识覆盖面较大，综合性较强，对处理问题方法的灵活选择要求较高，具有相当的深度和难度. 它重在考查学生的分析、探索能力和思维的发散性.

(1) 类比探究型

这类题型的特点是，通过阅读材料，将问题由二维平面升华到三维空间等升降变化或借助于其他转化策略来处理. 解决此类问题是通过阅读材料，分析、理解问题所给相关信息，经过合成和加工，形成解题思路.

【例 10】 (全国卷 Ⅱ，理 16) 平面内的一个四边形为平行四边形的充要条件有多个，如两组对边分别平行. 类似地，写出空间中的一个四棱柱为平行六面体的两个充要条件.

充要条件 ① ______________________;

充要条件 ② ______________________.

解析 充要条件 ①：底面为平行四边形；充要条件 ②：两组相对侧面分别平行.

点评 此题从平面向空间推广，探究拓展结论. 将二维(三维) 空间的对象升(降) 到三维(二维) 空间的对象，这种类比方法即为升(降) 维类比. 在升(降) 维类比的方法中，常常体现在双向联想的结合，即由平面几何问题类比联想到立体几何中去，又运用类比联想的思维方法将立体几何问题化归为平面几何问题去思考.

例题链接 某海域内有一孤岛，岛四周的海平面(视为平面) 上有一浅水区(含边界)，其边界是长

轴长为$2a$、短轴长为$2b$的椭圆.已知岛上甲、乙导航灯的海拔高度分别为h_1、h_2,且两个导航灯在海平面上的投影恰好落在椭圆的两个焦点上.现有船只经过该海域(船只的大小忽略不计),在船上测得甲、乙导航灯的仰角分别为θ_1、θ_2,那么船只已进入该浅水区的判别条件是________.

解析　设椭圆的两焦点分别为F_1、F_2,把船只看成点P,则$|PF_1| = h_1\cot\theta_1$,$|PF_2| = h_2\cot\theta_2$,类比点与圆的位置关系,船只进入浅水区即点P在椭圆上或在椭圆的内部,类比点与圆的位置关系,从而有$h_1\cot\theta_1 + h_2\cot\theta_2 \leqslant 2a$.

点评　本题考查椭圆定义及解三角形.解题的关键是在理解题意,然后转化为数学模型进行类比求解.

[redacted]

类比推理是根据两个对象具有某些相同的属性而推出当一个对象具有一个另外的性质时,另一个对象也具有这一性质的一种推理方式.因此求解类比推理问题的关键在于确定类比物,建立类比项.换言之,不能把类比仅停留在叙述方式或数学结构等外层表象之上,还需要对数学结论的运算、推理过程等进行类比分析,从解题的思想方法、思维策略等层面寻求内在的关联.近几年高考对此表现在以下几方面:

① 数列中的类比

【例11】　在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_{10}=0$,则有等式$a_1+a_2+\cdots+a_n = a_1+a_2+\cdots+a_{19-n}$($n<19$,$n\in\mathbf{N}^*$)成立,类比上述性质,相应的在等比数列$\{b_n\}$中,若$b_9=1$,则有等式________成立.

解析　本题考查等差数列与等比数列的类比.一种较本质的认识是:等差数列→用减法定义→性质用加法表述(若m、n、p、$q\in\mathbf{N}^*$,且$m+n=p+q$,则$a_m+a_n=a_p+a_q$).

等比数列→用除法定义→性质用乘法表述(若m、n、p、$q\in\mathbf{N}^*$,且$m+n=p+q$,则$a_m\cdot a_n = a_p\cdot a_q$).由此,猜测本题的答案为:$b_1b_2\cdots b_n = b_1b_2\cdots b_{17-n}$($n<17$,$n\in\mathbf{N}^*$).

事实上,对等差数列$\{a_n\}$,如果$a_k=0$,则$a_{n+1}+a_{2k-1-n} = a_{n+2}+a_{2k-2-n}=\cdots=a_k+a_k=0$.所以有:$a_1+a_2+\cdots+a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2k-2-n}+a_{2k-1-n})$($n<2k-1$,$n\in\mathbf{N}^*$).从而对等比数列$\{b_n\}$,如果$b_k=1$,则有等式:$b_1b_2\cdots b_n = b_1b_2\cdots b_{2k-1-n}$($n<2k-1$,$n\in\mathbf{N}^*$)成立.

点评　本题是一道小巧而富于思考的妙题,主要考查观察分析能力、抽象概括能力,考查运用类比的思想方法由等差数列$\{a_n\}$而得到等比数列$\{b_n\}$的新的一般性的结论.

【例12】　定义"等和数列":在一个数列中,如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数,那么这个数列叫做等和数列,这个常数叫做该数列的公和.

已知数列$\{a_n\}$是等和数列,且$a_1=2$,公和为5,那么a_{18}的值为________,这个数列的前n项和S_n的计算公式为________.

解析　由等和数列的定义,易知$a_{2n-1}=2$,$a_{2n}=3$($n=1,2,\cdots$),故$a_{18}=3$.

当n为偶数时,$S_n=\dfrac{5}{2}n$;当n为奇数时,$S_n=\dfrac{5}{2}n-\dfrac{1}{2}$.

点评　本题以"等和数列"为载体,解决本题的关键是课本中所学的等差数列的有关知识及其数学活动的经验,本题还考查分类讨论的数学思想方法.

② 函数中的类比

【例13】　设函数$f(x)=\dfrac{1}{2^x+\sqrt{2}}$,利用课本中推导等差数列前$n$项和公式的方法,可求得$f(-4)+\cdots+f(0)+\cdots+f(5)+f(6)$的值为________.

解析　此题利用类比课本中推导等差数列前 n 项和公式的倒序相加法，观察每一个因式的特点，尝试着计算 $f(x)+f(1-x)$. 因为

$$f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}},\quad f(1-x)=\frac{1}{2^{1-x}+\sqrt{2}}=\frac{2^x}{2+\sqrt{2}\cdot 2^x}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2^x}{\sqrt{2}+2^x}$$

所以
$$f(x)+f(1-x)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2^x}{\sqrt{2}+2^x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

发现 $f(x)+f(1-x)$ 正好是一个定值，所以 $2S=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 12$，所以 $S=3\sqrt{2}$.

点评　此题依据大纲和课本，在常见中求新意，在平凡中见奇巧，将分析和解决问题的能力的考查放在了突出的位置. 本题通过弱化或强化条件与结论，揭示出它与某类问题的联系与区别并变更出新的命题. 这样，通过从课本出发，无论是对内容的发散，还是对解题思维的深入，都能收到固本拓新之用，收到"秀枝一株，嫁接成林"之效，从而有效于发展学生创新的思维.

③ 排列组合中的类比

【例 14】　已知数列 $\{a_n\}$（n 为正整数）的首项为 a_1，公比为 q 的等比数列.

（Ⅰ）求和：$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2$；$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）的结果，归纳概括出关于正整数 n 的一个结论，并加以证明.

解析　本题由（Ⅰ）的结论，通过大胆猜测，归纳猜想出一般性的结论：

（Ⅰ）
$$a_1C_2^0-a_2C_2^1+a_3C_2^2=a_1-2a_1q+a_1q^2=a_1(1-q)^2$$
$$a_1C_3^0-a_2C_3^1+a_3C_3^2-a_4C_3^3=a_1-3a_1q+3a_1q^2-a_1q^3=a_1(1-q)^3$$

（Ⅱ）归纳概括的结论为：若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1，公比为 q 的等比数列，则
$$a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^na_{n+1}C_n^n=a_1(1-q)^n\text{（证明略）}$$

点评　本题主要考查探索能力、类比归纳能力与论证能力，突出了创新能力的考查；通过抓住问题的实质，探讨具有共同的属性，可以由特殊型命题直接归纳概括出一般型命题.

④ 立体几何中的类比

【例 15】　在 $\triangle DEF$ 中有余弦定理 $DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\angle DFE$. 拓展到空间，类比三角形的余弦定理，写出斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的3个侧面面积与其中两个侧面所成二面角之间的关系式，并予以证明.

解析　根据类比猜想得出
$$S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cdot\cos\theta$$

其中 θ 为侧面为 ABB_1A_1 与 BCC_1B_1 所成的二面角的平面角.

作斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面 DEF，则 $\angle DFE$ 为面 ABB_1A_1 与面 BCC_1B_1 所成角，在 $\triangle DEF$ 中有余弦定理 $DE^2=DF^2+EF^2-2DF\cdot EF\cos\theta$，同乘以 AA_1^2，得
$$DE^2\cdot AA_1^2=DF^2\cdot AA_1^2+EF^2\cdot AA_1^2-2DF\cdot AA_1\cdot EF\cdot AA_1\cos\theta$$

即
$$S^2_{AA_1C_1C}=S^2_{ABB_1A_1}+S^2_{BCC_1B_1}-2S_{ABB_1A_1}\cdot S_{BCC_1B_1}\cos\theta$$

点评　本题考查由平面三角形的余弦定理到空间斜三棱柱的拓展推广，因为类比是数学发现的重要源泉，因此平时的教学与复习中更要注意类比等思想方法的学习.

⑤ 解析几何中的类比

【例 16】　已知两个圆
$$x^2+y^2=1\qquad①$$
与
$$x^2+(y-3)^2=1\qquad②$$
则由式①减去式②可得上述两圆的对称轴方程. 将上述命题在曲线仍为圆的情况下加以推广，即要求

得到一个更一般的命题,而已知命题要成为所推广命题的一个特例,推广的命题为______.

解析　将题设中所给出的特殊方程①②推广归纳到一般情况.

设圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad ③$$

与

$$(x-c)^2+(y-d)^2=r^2 \quad ④$$

其中 $a\neq c$ 或 $b\neq d$,则由式③减去式④可得两圆的对称轴方程.

点评　本题通过类比推广,可以由特殊型命题直接归纳概括出一般型命题.

【例17】　已知椭圆具有性质:若 M、N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点,点 P 是椭圆上任意一点,当直线 PM、PN 的斜率都存在,并记为 k_{PM}、k_{PN} 时,那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 的位置无关的定值.试对双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 写出具有类似特性的性质,并加以证明.

解析　类似的性质为:若 M、N 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上关于原点对称的两个点,点 P 是双曲线上任意一点,当直线 PM、PN 的斜率都存在,并记为 k_{PM}、k_{PN} 时,那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 的位置无关的定值.

设点 M、P 的坐标为 (m,n)、(x,y),则 $N(-m,-n)$.因为点 $M(m,n)$ 在已知双曲线上,所以 $n^2=\frac{b^2}{a^2}m^2-b^2$,同理 $y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2$,则

$$k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{y-n}{x-m}\cdot\frac{y+n}{x+m}=\frac{y^2-n^2}{x^2-m^2}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2-m^2}{x^2-m^2}=\frac{b^2}{a^2}\text{(定值)}$$

点评　本题以椭圆、双曲线为载体,考查直线的斜率,椭圆、双曲线的概念与方程,考查数学运算能力.同类之间的类比在圆锥曲线中,常常以姐妹题形式出现,这样对学生思维和素质的考查具有很好的功能,而且题型新颖,避免了传统的考法的单调.

⑤ 新定义、新运算中的类比

【例18】　若记号“$*$”表示两个实数 a 与 b 的算术平均的运算,即 $a*b=\frac{a+b}{2}$,则两边均含有运算符号“$*$”和“$+$”,且对于任意3个实数 a、b、c 都能成立的一个等式可以是______.

解析　由于本题是探索性和开放性问题,问题的解决需要经过一定的探索过程,并且答案不唯一.这题要把握住 $a*b=\frac{a+b}{2}$,还要注意到试题的要求不仅类比推广到三个数,而且等式两边均含有运算符号“$*$”和“$+$”,则可容易得到 $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$.正确的结论还有:$(a*b)+c=(a*c)+(b*c)$,$(a*b)+c=(b*a)+c$ 等.

(2) 动态变化型

立体几何中的“动态问题”,是指空间图形中的某些点、线、面的位置是不确定的,可变的一类开放问题.此类问题的解题方向是:让变量变化起来,在运动变化中探求与之相关的其他量之间的关系.

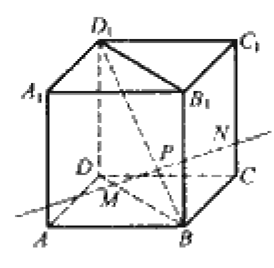
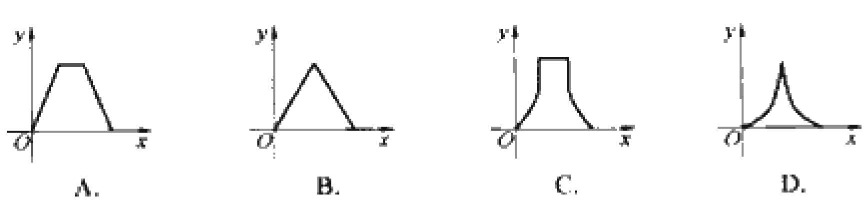


图4

【例19】　如图4,动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上.过点 P 作垂直于平面 BB_1D_1D 的直线,与正方体表面相交于 M、N.设 $BP=x$,$MN=y$,则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是(　　)



解析 设正方体的棱长为 x，取 AA_1 的中点 E，CC_1 的中点 F，联结 EF，交 BD_1 于 O，则 $EF=\sqrt{2}$. 依题意知，当 $0<x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y}{\sqrt{2}}$，即 $y=2x$；当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\sqrt{2}$ 时，$\frac{\sqrt{2}-x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y}{\sqrt{2}}$，即 $y=2\sqrt{2}-2x$. 故选 B.

点评 点、线、面的变化必然导致位置关系或一些量的变化，就是说，让变量变化，考虑由此变化所引起的其他量的变化，构建目标函数，则将立体几何问题转化为代数方法来解决.

(3) 完形填空型

这类问题一般给出部分或全部结论，条件残缺或部分结论不完善，要答题者分析、探索缺少的条件或结论.

【例 20】（江苏卷，文、理 9）如图 5，在平面直角坐标系 xOy 中，设 $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$. 点 $P(0,p)$ 是线段 OA 上一点（异于端点），a、b、c、p 均为非零实数. 直线 BP、CP 分别交 AC、AB 于点 E、F. 一同学已正确地求出直线 OE 的方程为 $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$，请你完成直线 OF 的方程：(　　) $x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$.

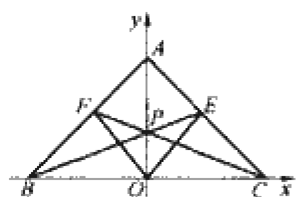


图 5

解析 如果将 CP 和 AB 的方程联立，求点 F 坐标，计算量会很大，且不易算出.

解法 1 可画出图形，由给出的 OE 方程，可猜想 OE、OF 的斜率存在某种特殊的关系，如互为相反数等，可猜想填：$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$. 事实上，由截距式可得直线 AB：$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$，直线 CP：$\frac{x}{c}+\frac{y}{p}=1$，两式相减得 $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$，显然直线 AB 与 CP 的交点 F 满足此方程，又原点 O 也满足此方程，故为所求直线 OF 的方程. 所以猜想正确.

解法 2 实际上 E、F 仅仅是横坐标不同，一个为 c，另一个为 b，从而所得到的 OF 的方程也就是原 OE 的方程中 b、c 互换.

点评 本题主要考查直线方程的求法，新课标对直线方程的要求为 C 级，有一定难度. 同时此题也是一道数学完形填空题，其特点是命题中部分结论明确，需要完善另一结论. 解答此类问题，一般借用已给结论，通过对比、联想等手段，完善填空题所缺少的条件.

(4) 归纳猜想型

所谓归纳，是指通过特例的观察和综合去发现一般规律，它是发现和认识规律的重要手段，有些高考题往往可以通过特例寻觅出解题思路.

【例 21】（北京卷，理 14）某校数学课外小组在坐标纸上，为学校的一块空地设计植树方案如下：第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k,y_k)$ 处，其中 $x_1=1$，$y_1=1$，当 $k\geqslant 2$ 时

$$\begin{cases}x_k=x_{k-1}+1-5\left[T\left(\frac{k-1}{5}\right)-T\left(\frac{k-2}{5}\right)\right]\\ y_k=y_{k-1}+T\left(\frac{k-1}{5}\right)-T\left(\frac{k-2}{5}\right)\end{cases}$$

$T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分，例如 $T(2.6)=2$，$T(0.2)=0$.

按此方案，第 6 棵树种植点的坐标应为________；第 2 008 棵树种植点的坐标应为________.

解析 设 $z=T\left(\frac{k-1}{5}\right)-T\left(\frac{k-2}{5}\right)$，则 $z(k)=z(k+5)$，且 $k=5m+1$，$m\in\mathbf{N}^*$，由已知可求得 $x_6=1$，$y_6=2$，所以有 $x_{2\,008}=x_3=3$，$y_{2\,008}=y_{2\,006}=1+(z_{2\,006})\times 401=402$（其中 401 为 $2\,008=5\times 401+3$ 模 5 带余算式中的商）. 所以 $(x_{2\,008},y_{2\,008})=(3,402)$.

点评 在理解阅读材料的基础上，寻找规律靠分析、综合和模仿，并应用于解决新问题. 阅读理解题考查的不仅是阅读理解能力、观察分析能力，还考查考生的归纳总结及灵活变形能力. 只要学生有归

纳的意识,并细心观察就能完成.此类问题获取并分析、处理信息是十分重要的一步.

【例 22】 (湖北卷,理 15)观察下列等式:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = a_{k+1}n^{k+1} + a_kn^k + a_{k-1}n^{k-1} + a_{k-2}n^{k-2} + \cdots + a_1n + a_0$$

可以推测,当 $k \geq 2(k \in \mathbf{N}^*)$ 时,$a_{k+1} = \frac{1}{k+1}$,$a_k = \frac{1}{2}$,$a_{k-1} =$ ________,$a_{k-2} =$ ________.

解析　当 $k \geq 2(k \in \mathbf{N}^*)$ 时,观察上述式子,当 $k = 2$ 时,对应 $a_1 = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$;当 $k = 3$ 时,对应 $a_2 = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$;当 $k = 4$ 时,对应 $a_3 = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$;当 $k = 5$ 时,对应 $a_4 = \frac{5}{12}$;当 $k = 6$ 时,对应 $a_5 = \frac{1}{2} = \frac{6}{12}$,…,推测取 k 时,$a_{k-1} = \frac{k}{12}$.

当 $k = 2$ 时,对应 $a_0 = 0$;当 $k = 3$ 时,对应 $a_1n = 0$;当 $k = 4$ 时,对应 $a_2n^2 = 0$;当 $k = 5$ 时,对应 $a_3n^3 = 0$;当 $k = 6$ 时,对应 $a_4n^4 = 0$,…,推测 $a_{k-2}n^{k-2} = 0$,所以 $a_{k-2} = 0$.

点评　该题立意新颖,背景深刻,它源于雅各·伯努利(Jacob Bernoulli)数,即前 n 个正整数同次幂求和问题,主要考查考生的直觉观察意识、合情推理能力和正确理解抽象数学符号语言的能力,是一道渗透新课程理念的创新题型.通过观察前 6 个幂和等式的系数规律,让学生从中推测出答案,得出相关项系数的一般性结论,充分体现了辩证地运用特殊与一般的数学思想方法解题的能力,这道题充分考查了学生的归纳、观察、概括能力,同时该题的命制也体现了高中数学新课改在高考命题中主要考查学生综合能力的趋势.

(5)探索发现型

这类问题是从题目叙述中获取符号信息,或从图形中获得"形象信息",然后通过类比、联想,再对信息进行提炼、组织与加工,最后探索出解题思路.

【例 23】 如图 6,(江苏卷,文、理 10)将全体正整数排成三角形数阵:根据以上的排列规律,第 $n(n \geq 3)$ 行从左向右第 3 个数是________.

1
2　3
4　5　6
7　8　9　10
11　12　13　14　15
…

图 6

解析　有的考生可能从关注每一行的第一个数入手,构成二阶等差数列,然后用叠加的方法求出通项,这当然可以,但是,明显增加了解题时间,小题大做了.放眼全局,前 $n-1$ 行共有正整数 $1+2+\cdots+(n-1)$ 个,即 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个,因此第 n 行第 3 个数是全体正整数中第 $\frac{n(n-1)}{2}+3$ 个,即为 $\frac{n(n-1)}{2}+3$.

点评　求解此题没有现成的方法可遵循,需要根据所给数表生成的法则,自行发现问题本身所蕴涵的规律,探索解决问题的思路.

[redacted]

1.(福建卷,理 12) 已知函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的导函数的图象如图 7 所示,那么 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的图象可能是(　　)

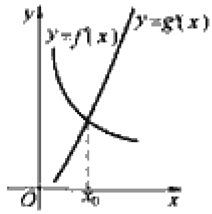
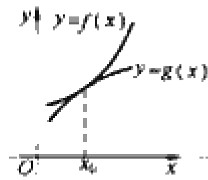
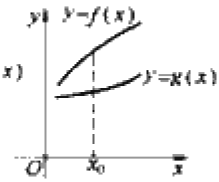


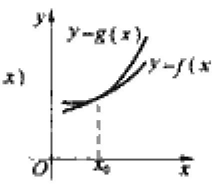
图 7



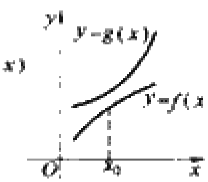
A.



B.



C.

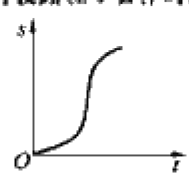


D.

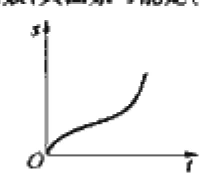
解析　从 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的导函数图象可知, $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上均为增函数,且 $0 < x < x_0$ 时,函数 $y = f(x)$ 的斜率大于函数 $y = g(x)$ 的斜率,当 $x > x_0$ 时,函数 $y = f(x)$ 的斜率小于函数 $y = g(x)$ 的斜率,结合图象可知选 D.

点评　题中给出的条件是图象,属于图象信息迁移型,要求考生利用图象信息来解题,解题关键是抓住图象的特征,从图象中提炼、整理信息、进行图象语言转换.

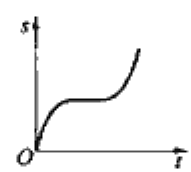
2.(全国卷 Ⅰ,文、理 2) 汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车,若把这一过程中汽车的行驶路程 s 看作时间 t 的函数,其图象可能是(　　)



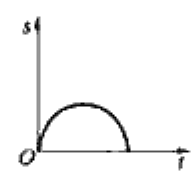
A.



B.



C.



D.

解析　因为路程 s 是时间 t 的函数,其图象上每一点的切线的斜率即为该点的瞬时速度,切线的斜率的变化即为速度的变化,开始时速度增加缓慢,并且逐渐加快,中间速度保持不变,然后速度逐渐减慢,最后为零,只有 A 符合实际情况,故选 A.

点评　本题考查函数图象及导数的几何意义等基础知识,属于图象信息迁移题型,突出考查考生的思维能力.

(6) 结论开放题

近几年的数学高考试卷中,填空题成为创新改革的"试验田",其中出现了不少以能力立意为目标,以增大思维容量为特色,具有一定深度和明确导向的创新题型,其中多项选择题,即按说明将要求符合题意条件的结论填写出来,这种命题模式可以看作是选择题的补充和拓展.

【例 24】　(海南、宁夏卷,文、理 16) 从甲、乙两品种的棉花中各抽测了 25 根棉花的纤维长度(单位:mm),结果如下:

甲品种:271	273	280	285	285	287	292	294	295	301	303	303	307
308	310	314	319	323	325	325	328	331	334	337	352	
乙品种:284	292	295	304	306	307	312	313	315	315	316	318	318
320	322	322	324	327	329	331	333	336	337	343	356	

由以上数据设计了如下茎叶图

甲		乙
3 1	27	
7 5 5 0	28	4
5 4 2	29	2 5
8 7 3 3 1	30	4 6 7
9 4 0	31	2 3 5 5 6 8 8
8 5 5 3	32	0 2 2 4 7 9
7 4 1	33	1 3 6 7
	34	3
2	35	6

根据以上茎叶图,对甲、乙两品种棉花的纤维长度作比较,写出两个统计结论:

①________________________________;

②________________________________.

解析　由于甲品种棉花的纤维长度的中位数为 307 mm,乙品种棉花的纤维长度的中位数为 318 mm,并且乙品种棉花的纤维长度基本上是对称的,而且大多集中在中间(均值附近).甲品种棉花的纤维长度除一个特殊值(352)外,也大致对称,其分布较均匀.因此得到下面两个结论:

① 乙品种棉花的纤维平均长度大于甲品种棉花的纤维平均长度(或乙品种棉花的纤维长度普遍大于甲品种棉花的纤维长度).

② 甲品种棉花的纤维长度较乙品种棉花的纤维长度更分散(或乙品种棉花的纤维长度较甲品种棉花的纤维长度更集中(稳定);甲品种棉花的纤维长度的分散程度比乙品种棉花的纤维长度的分散程度更大).

点评　本题考查对茎叶图的理解与应用,必要的运算虽然显示不出来,但运算的准确度决定着所写结论的对与错,借助结论的开放性考查利用数据分析问题的能力及统计的基本思想.

【例 25】　(江西卷,理 16)如图 8,一个正四棱柱形的密闭容器水平放置,其底部镶嵌了同底的正四棱锥形实心装饰块,容器内盛有 a L 水时,水面恰好经过正四棱锥的顶点 P.如果将容器倒置,水面也恰好过点 P(图 9).

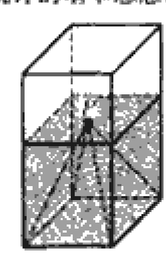


图 8

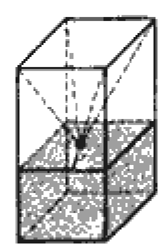


图 9

有下列四个命题:

A.正四棱锥的高等于正四棱柱高的一半

B.将容器侧面水平放置时,水面也恰好过点 P

C.任意摆放该容器,当水面静止时,水面都恰好经过点 P

D.若往容器内再注入 a L 水,则容器恰好能装满

其中真命题的代号是:________(写出所有真命题的代号)

解析　由于正四棱柱和正四棱锥均左右对称,所以将容器侧面水平放置时,水面也恰好过点 P,将容器倒置,水面也恰好过点 P,所以上下两部分容器相等,所以真命题的代号为 B,D.

点评　本题主要考查组合体方面的知识,考查四棱锥与长方体体积公式,同时考查学生综合运用几何知识解决问题的能力,这是近年来出现的新题型,属于选择题中的多选题,排除了"唯一性"中"猜"的成分,多个结论的开放加大了问题的难度,必须对每个备选结论逐一研究其真伪性,才能探索出正确答案.对这类问题不能有一丝一毫的疏忽,错选一个全题皆输.

3. 联系实际

以热点话题为背景，创设问题情景，从而考查学生阅读资料，提取信息及建立数学模型的能力．考生的创新意识和实践能力的考查，很大程度表现在解答数学应用问题之中．

【例 26】 电子钟一天显示的时间是从00:00到23:59，每一时刻都由四个数字组成，则一天中任一时刻显示的四个数字之和为 23 的概率为( )．

A. $\frac{1}{180}$　　B. $\frac{1}{288}$　　C. $\frac{1}{360}$　　D. $\frac{1}{480}$

解析 当首位为 0 时，所有四位数为 $10\times6\times10=600$；

当第一位数为 1 时，所有四位数为 $10\times6\times10=600$；

当第一位数为 2 时，所有四位数为 $4\times6\times10=240$．

所以共有 $600+600+400=1\ 440$．

满足条件的有：09 : 59，19 : 58，19 : 49，18 : 59 共四个数，所以 $P=\frac{4}{1\ 440}=\frac{1}{360}$，故选 C．

【例 27】 在某地的奥运火炬传递活动中，有编号为1，2，3，…，18的18名火炬手．若从中任选3人，则选出的火炬手的编号能组成以 3 为公差的等差数列的概率为( )．

A. $\frac{1}{51}$　　B. $\frac{1}{68}$　　C. $\frac{1}{306}$　　D. $\frac{1}{408}$

解析 能够成等差数列且公差为 3 的数共有 2 个，基本事件总数为 C_{18}^3，所以 $\frac{12}{C_{18}^3}=\frac{1}{68}$．

【例 28】 如图 10，"嫦娥一号"探月卫星沿地月转移轨道飞向月球，在月球附近一点 P 轨进入以月球球心 F 为一个焦点的椭圆轨道 Ⅰ 绕月飞行，之后卫星在点 P 第二次变轨进入仍以 F 为一个焦点的椭圆轨道 Ⅱ 绕月飞行，最终卫星在点 P 第三次变轨进入以 F 为圆心的圆形轨道 Ⅲ 绕月飞行，若用 $2c_1$ 和 $2c_2$ 分别表示椭轨道 Ⅰ 和 Ⅱ 的焦距，用 $2a_1$ 和 $2a_2$ 分别表示椭圆轨道 Ⅰ 和 Ⅱ 的长轴的长，给出下列式子：

①$a_1+c_1=a_2+c_2$；②$a_1-c_1=a_2-c_2$；③$c_1a_2>a_1c_2$；④$\frac{c_1}{a_1}<\frac{c_2}{a_2}$．

其中正确式子的序号是( )

A. ①③　　B. ②③　　C. ①④　　D. ②④

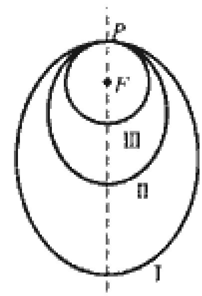


图 10

解析 因为点 P 既在椭圆 Ⅰ 上，又在椭圆 Ⅱ 上，且 F 是椭圆 Ⅰ 和 Ⅱ 的同一侧的焦点，所以 $PF=a-c$，即 $a_1-c_1=a_2-c_2$，故 ② 正确；由 $a_1-c_1=a_2-c_2$ 得 $a_1-a_2=c_1-c_2$，$c_1=a_1-a_2+c_2$，所以 $c_1a_2-a_1c_2=(a_1-a_2+c_2)a_2-a_1c_2=(a_1-a_2)a_2+(a_2-a_1)c_2=(a_1-a_2)(a_2-c_2)$，又从图中可以看出，$a_1>a_2$，$a_2>c_2$，所以 $c_1a_2-a_1c_2>0$，即 $c_1a_2>a_1c_2$，因此 ③ 正确，故选 B．

【例 29】 因冰雪灾害，某柑橘基地果林严重受损，为此有关专家提出两种拯救果树的方案，每种方案都需分两年实施．若实施方案一，预计第一年可以使柑橘产量恢复到灾前的 1.0 倍、0.9 倍、0.8 倍的概率分别是 0.3，0.3，0.4；第二年可以使柑橘产量为第一年产量的 1.25 倍、1.0 倍的概率分别是 0.5，0.5．若实施方案二，预计第一年可以使柑橘产量达到灾前的 1.2 倍、1.0 倍、0.8 倍的概率分别是 0.2，0.3，0.5；第二年可以使柑橘产量为第一年产量的 1.2 倍、1.0 倍的概率分别是 0.4，0.6．实施每种方案第一年与第二年相互独立，令 $\xi_i(i=1,2)$ 表示方案 i 实施两年后柑橘产量达到灾前产量的倍数．

(Ⅰ) 写出 ξ_1、ξ_2 的分布列；

(Ⅱ) 实施哪种方案，两年后柑橘产量超过灾前产量的概率更大?

(Ⅲ) 不管哪种方案，如果实施两年后柑橘产量达不到、恰好达到、超过灾前产量，预计利润分别为 10 万元、15 万元、20 万元．问实施哪种方案的平均利润更大?

解析 （Ⅰ）ξ_1 的所有取值为 0.8，0.9，1.0，1.125，1.25.

ξ_2 的所有取值为 0.8，0.96，1.0，1.2，1.44. ξ_1、ξ_2 的分布列如表 1 所示.

表 1

ξ_1	0.8	0.9	1.0	1.125	1.25
P	0.2	0.15	0.35	0.15	0.15
ξ_2	0.8	0.96	1.0	1.2	1.44
P	0.3	0.2	0.18	0.24	0.08

（Ⅱ）令 A、B 分别表示方案一、方案二两年后柑橘产量超过灾前产量这一事件

$$P(A)=0.15+0.15=0.3,P(B)=0.24+0.08=0.32$$

可见，方案二两年后柑橘产量超过灾前产量的概率更大.

(3) 令 η_i 表示方案 i 的预计利润，则（表 2、表 3）

表 2

η_1	10	15	20
P	0.35	0.35	0.3

表 3

η_2	10	15	20
P	0.5	0.18	0.32

所以 $E\eta_1=14.75$，$E\eta_2=14.1$，可见，方案一的预计利润更大.

点评 例 18 的背景贴近现实生活，例 19 是以 2008 年奥运火炬传递为背景，例 20 选择"嫦娥一号"作为问题的背景，从"嫦娥奔月"探月卫星沿绕月转移轨道飞向月球，考查学生对椭圆基础知识的掌握情况，它涉及椭圆的焦点、长轴的相关计算问题，但只要抓住每次变轨中的不变量来进行比较即可，例 21 的背景选择的是南方大雪灾害，这些应用题有一是生活在周围的实际数学现象，二是 2008 年我国发生的重大影响的热点事件. 这就要求考生更应该多了解社会生活，关注社会热点问题，关心国家大事，尽量地接触实际事例，增长实际知识，从中提炼出有社会价值的应用背景，增强用数学的意识，学会将实际问题抽象为数学问题.

4. 网络交汇

近几年来以知识网络的交汇点设计的高考解答题，运用知识之间的交叉、渗透和组合，是基础性与综合性的最佳表现形式. 随着学生学习的深入，知识积累的增多，各部分知识在各自发展中的纵向联系以及部分知识之间的横向联系日益密切，教师要不失时机地引导学生构筑知识网络，并在各个阶段逐步扩充与完善.

【例 30】 请先阅读：在等式 $\cos 2x=2\cos^2 x-1(x\in\mathbf{R})$ 的两边求导，得 $(\cos 2x)'=(2\cos^2 x-1)'$，由求导法则得 $(-\sin 2x)\cdot 2=4\cos x\cdot(-\sin x)$，化简得等式：$\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$.

（Ⅰ）利用上题的想法（或其他方法），结合等式 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$（$x\in\mathbf{R}$，正整数 $n\geqslant 2$），证明：$n[(1+x)^{n-1}-1]=\sum\limits_{k=2}^{n}kC_n^kx^{k-1}$.

（Ⅱ）对于正整数 $n\geqslant 3$，求证：① $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kkC_n^k=0$；② $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^kk^2C_n^k=0$；③ $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

解析 本题题型新颖，类比题目给出的范例，结合求导法则和组合数的性质，可以解决. 第③题借

助定积分，利用微积分基本定理证明.

（Ⅰ）将等式$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$两边求导得

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} = n + \sum_{k=2}^{n} kC_n^k x^{k-1}$$

所以
$$n[(1+x)^{n-1} - 1] = \sum_{k=2}^{n} kC_n^k x^{k-1}$$

（Ⅱ）① 令$x=-1$，则有

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k = (-1)\sum_{k=1}^{n} kC_n^k(-1)^{k-1} = (-1)\cdot n(1-1)^{n-1} = 0$$

② 对等式$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$再一次求导得

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2}$$

所以
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 C_n^k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k(k-1)C_n^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k = \\ &\sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k(-1)^{k-2} - \sum_{k=1}^{n} kC_n^k(-1)^{k-1} = \\ &n(n-1)(1-1)^{n-2} - n(1-1) = 0\end{aligned}$$

③ 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1}C_n^k &= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \\ &\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \\ &\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot[(n+1)-(k+1)]!} = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}\end{aligned}$$

所以
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

点评 创新题着重考查观察发现、类比转化以及运用数学知识，分析和解决数学问题的能力.培养考生的思维的灵活性以及在建立知识体系中知识点灵活融合的能力.当然导数创新题是近年高考重点探索考查的一种类型.导数的创新试题，形式更新鲜、内容更广泛.本题是以三角函数的导数和结合恒等式为先导，新颖而灵活，把导数与组合数、二项式定理、定积分巧妙结合.可以说是2008年全国高考导数部分最为新颖的一道考题，是一道典型的网络综合考题，也是高考新课程卷的创新题，更是新高考发展的趋势.在强化知识网络综合题训练时，应注意从题目的众多条件和求解（求证）中提取相关信息，推动题目信息的延伸，归结到某个确定的数学关系，从而形成一个解题的行动序列，有效地、灵活地解决问题，这就是解题方向.另外第（Ⅱ）问中的式③也可利用新课程中的积分知识证得.

1.求和：$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}(x \neq 0, n \in \mathbf{N}^*)$.

解析 当$x=1$时，$S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$，当$x \neq 1$时，因为$x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$，两边都是关于$x$的函数，求导得

$$(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)' = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right)'$$

即 $$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

2.求和：$S_n=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

解析 因为$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$，两边都是关于$x$的可导函数，求导得

$$n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots+nC_n^nx^{n-1}$$

令$x=1$得

$$n\cdot 2^{n-1}=C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n$$

即 $$S_n=C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$$

(四)2007年全国高考数学新课程卷综合分析

1.2007年全国高考数学新课标卷综评

(1) 依据:2007年教育部高中新课程《考试大纲》和广东、山东、海南、宁夏四省、区《考试说明》.

(2) 过渡:新课程标准基本理念向新课程平稳过渡.

(3) 坚持:坚持能力立意和创新意识的考查.

(4) 协调:协调基础与提高、知识与能力、传统与创新、稳定与改革的关系.

(5) 调控:合理调节试题难度.

2007年高考是广东、山东、海南、宁夏这四个课改区新课标开考的第一年,这几个省(自治区)的高考数学文、理3套6份试卷(广东、山东自主命题,海南、宁夏共用教育部考试中心统一命制的新课标卷)集中体现了"保持延续性稳定性,稳步推进高考改革"的精神,也切实体现了普通高中新课程的改革精神,都充分考虑了实验区各地使用各种不同版本教材的实际,紧密贴近中学教学,结合中学数学在知识、思想方法和能力等方面的要求,贯彻新课程理念.坚持能力立意,注重以知识为载体重点考查考生的数学能力与数学素养,试题立意朴实又不失新颖,源于教材又高于教材.加强了对考生思维能力的考查,控制试题的计算量,加大试题的思考量,试卷科学地考查了考生继续学习所应具备的数学素养和潜能,着重考查考生对数学本质的理解,宽角度、多视点、有层次地考查数学理性思维,特别是通过解题过程对思维能力进行了深入的考查.新课标高考数学试题成功地平移到了新课标的舞台上,不但做到了试卷结构稳定,知识覆盖面广,重点突出,而且稳中有新,稳中有变,试卷难、中、易比例恰当,尤其是对课程中新增内容和传统内容有机结合,考查也更加科学、规范和深化.而且还处处体现着新课标,几乎每个新考点都有所体现,探究创新是这几套新课标高考试题的灵魂,也是对考生的基本要求,试卷中除增加了新课标的内容外,在创新方面也作了大胆尝试,更加注重实际应用和问题探究,达到了考基础、考能力、考素质、考潜能的考试目标.总之,2007年文、理6份高考数学新课标卷是熟悉亲切之中又不乏清新亮丽之处,实现了较理想的难度、有效的区分度,具有较高的信度和效度,是一份既利于高校选拔优秀人才,又利于中学数学教学改革的好试卷,对中学教学发挥了良好的导向作用.在实情检验、教学考核、人才选拔三个主要方面都达到了非常完美的境界,师生评价良好,社会反响颇佳,这实为不易!

试卷结构

四个课改区2007年高考数学试卷的整体结构与2006年相比保持了相对稳定,都沿用了传统题型且顺序也未改变(选择、填空、解答).山东卷的试卷结构与2006年完全相同

(题量未变仍为22道但内容有所变化);广东卷不光是试题内容有所改变,试卷结构也作了部分调整,试题总量文理均为21道,选择题由2006年的10道减为今年的8道,相应的分数也从50分下调为40分,文科未作改变,而填空题理科则增加了三选二的选做题,由2006年的4题增加到今年的7题(只选做6题),因此分数比去年增加10分,文科增加了二选一的选做题,由2006年的4题增加到今年的5题(只选做4题),分数和2006年相比未作改变,解答题的题量和分值未作改变;海南、宁夏共用文、理两套试卷,其试卷结构与2007年全国卷Ⅰ、卷Ⅱ基本相同,试题总量文理均22道,但内容有所改变且结构在解答题第22题上也作了新的调整:理科要求考生从A、B、C三题中任意选做一题,文科则要求考生从A、B两题中任意选做一题.

知识考查

2007年,6份新课标卷全面、综合地考查了新课程《考试大纲》和四省、自治区《考试说明》中各部分的内容,可以说教材中各章的内容都有所涉及,如复数、旋转体、简易逻辑、概率等教学课时较少的内容,在试卷中也都有所考查.在全面考查的前提下,重点考查了高中数学知识的主干内容,如函数、三角函数、不等式、数列、直线与平面、圆锥曲线等仍是支撑各份试卷的主体内容.尤其是在每份试卷的6个解答题中,每题所涉及的具体内容都是高中数学的重点内容(考查的重点仍旧是直线与圆锥曲线、概率与统计、函数与导数、三角函数与解三角形、立体几何、数列、不等式等内容),考查要求层次恰当,淡化特殊的技巧,大多数试题既有常规解法,同时在知识的应用上又有一定的灵活性.一些试题在考查题型、情景设置、设问方式等方面也体现了稳中有变的命题思路.这些试卷对基础知识的考查全面、综合,主要体现在:

(1)立足基础,使知识考查切实服务于能力考查,保障了高考突出能力与学习潜能考查的要求.例如山东卷文、理科(11)、(12)题,考查概率、向量、零点的基础知识,但只有在具有较强转化能力的基础上才能发现问题的实质,突出了能力考查的要求.

(2)立足基础,但并不刻意追求知识的覆盖率,着重考查了支撑学科知识体系的知识主干,以重点知识为主线组织全卷的内容,首先设定考查重点和要求层次,以此为基调,铺开考查的网络,拓展考查的空间,对重点知识的考查力求深入和综合,对基础知识的考查,既注重传统"双基",又注重新增"双基".如山东卷理科第(2)、(4)、(6)、(16)、(22)题和文科第(2)、(6)、(11)、(13)、(14)、(21)题,广东卷理科第(1)、(3)、(4)、(21)题和文科第(1)、(3)、(5)、(12)、(20)、(21)题,海南、宁夏卷理科第(14)、(21)题和文科第(14)、(19)题重点考查了函数的基本概念、性质和图象等;山东卷理科第(13)、(15)、(21)题和文科第(9)、(16)、(22)题,广东卷理科第(11)、(13)、(15)、(18)题和文科第(11)、(14)、(15)、(19)题,海南、宁夏卷理科第(6)、(10)、(13)、(19)、(22A、B)题和文科第(6)、(7)、(10)、(13)、(21)、(22A、B)题重点考查了直线和二次曲线的位置关系;山东卷理科第(3)、(19)题和文科第(3)、(20)题,广东卷理科第(12)、(19)题和文科第(17)题,海南、宁夏卷文、理科第(8)、(18)题重点考查了多面体的有关线面关系、角和体积(还涉及三视图);山东卷理科第(10)题、广东卷理科第(6)题、海南和宁夏卷理科第(5)题考查了算法的程序框图;山东卷理科第(8)题、广东卷理科第(6)题、海南和宁夏卷理科第(11)题考查了数据整理;山东卷理科

第(1)题、海南和宁夏卷理科第(1)题考查了简单逻辑用语;还有数列、向量、概率统计、导数和线性规划等内容均得到了不同程度的考查.

(3)继续把教材丰富的内涵作为编拟高考数学试题的源泉.有些试题甚至直接考查数学概念和有关定理,只改造了外在的设问形式,并未改变原来的思想意图,减少了运算量,着重考查思维能力,体现了试卷的整体设计思想.

(4)在新旧内容的结合上综合考查基础知识,体现在知识网络的交汇处设计试题和使用新观点、新方法来解决传统问题上.如山东卷理科第(18)题将概率与一元二次方程结合起来,既增加了知识的考查点,又改变了概率试题的传统命题模式;山东卷理科第(22)题、文科(21)题就是函数与导数的综合、用导数的方法研究解决函数的单调性与最大值及最小值等问题,将函数的单调性、极值点、导数与不等式结合起来进行综合考查;再如广东卷理科第(21)题就是在函数、方程、导数、数列、不等式的结合处设计的一道综合性试题.立体几何解答题的命制,在试卷中同样采用了"一题两法"(传统解法和向量解法)的命制办法,即同一个试题可以使用两种方法来解决.

(5)综合性试题以知识网络的交汇点作为设计的起点和着力点,力图实现全面考查数学基础和数学素质的目标.既有传统的交汇点(函数与导数、函数与不等式、三角与向量、向量与不等式、向量与立体几何、数列与不等式、概率与方程等)又有新的交汇点(算法与数列、算法与函数、三视图与几何体等),如山东卷理科(22)题是一道函数的解答题,以对数函数为载体考查了导数的有关概念、计算和应用,利用导数工具研究函数的有关性质,不仅体现教材改革的一种理念,也是初等数学与高等数学一个很好的衔接点,该题解法中还应用了函数与方程、化归与转化、分类整合等数学思想,这些都是《考试大纲》要求较高的思想方法.该题达到了知识内容考查与思想方法考查相结合的目的.山东卷文科第(22)题是一道解析几何的解答题,综合、全面地考查了直线与椭圆的位置关系,通过用代数的方法,处理几何问题的深入考查,使函数、方程和不等式与解析几何的内容有机结合,该题具备了较强的综合性,有效地考查了考生综合运用知识、分析问题和解决问题的能力以及理性思维的能力.即使选择、填空题这样的小题也表现出很强的交汇性,如山东卷理科第(16)题是函数、方程、不等式、定点和最值问题,集对数、直线方程和基本不等式等内容于一身,题目虽小,可覆盖面大,综合性极强,要求较高.

[redacted]

6份试卷难度适中,充分体现文、理科考生的特点,层次分明,适合考生的实际情况.在控制难度上有以下特点:

(1)层次分明.6份试卷在三种题型中体现出明显的层次性,选择题、填空题、解答题,层层递进.选择题、填空题前几题,着重考查了基础知识、基本技能,最后1、2题考查考生的理性思维能力和分析问题、解决问题的能力.解答题基本上是一题多问,入口容易,最后两题是爬坡题,对思维能力,尤其是理性思维有较高要求.

(2)较好地把握了入口题的难度.6份试卷无论是试卷的入口题还是每种题型的入口题都较好地把握住了难度,文、理科试卷的前几个小题着重考查基础知识、基本运算和识别能力.作为整份试卷入口题的选择题前几个小题较容易,这对稳定考生的心态也有较好

的作用．不仅如此，填空题的前2个小题，解答题中的前2个小题也相对容易．

(3) 较难的解答题采用分步设问、分步给分的设计方法．试卷中后面的几个解答题较难，采用了分步设问的办法使其逐步深入，在化解试题难度的同时，又合理区分了不同层次的考生，减少了答题用时，增加了思考深度．6份试卷共39道解答题中，除广东卷理科第(20)、文科第(21)题，山东卷理科第(20)题，海南和宁夏卷文、理科第(17)题外，都设计了两问或者三问，文、理解答题都设计了11个以上的问题．在引导考生正确思维的同时，也给每一个层面的考生提供了施展才华的平台．

(4) 控制新题型的比例．无论是设问方式新颖的试题、情境设置新颖的试题，还是应用型试题，对考生来说都要比常规试题难，这类题的多少与难易会直接影响整份试卷的难度．在文、理两份试卷中，新题型和应用题所占比例适中．如概率、统计、直方图等有实际背景的问题也采用了最常见的背景，叙述也采用课本上的方式，较好的体现公平、公正的原则．又如山东卷理科第(20)、文科第(19)题是两道分别以航海中的测量和社会经济活动为背景的应用问题，背景平和朴实，这种处理方式对试卷总体难度的稳定起到了保障作用．6份试卷中新颖试题主要表现在：首先在选择题中设计了少量构思新颖的试题，如山东卷理科第(12)题求质点 P 按规则移动后的概率，山东卷文科第(12)题将概率与解析几何交汇起来考查，广东卷理科第(8)题在定义的新运算中解决相关问题，等等，以上这些试题的问题情境设置都比较新颖．其次试题新颖之处还表现在解答题中的立体几何问题在设问方式上发生了一些新变化，如广东卷理科第(19)题将函数与立体几何交汇考查，海南、宁夏卷理科第(18)题的第(Ⅱ)问设计成开放性问题，广东卷文科第(17)题给出了一个几何体的俯视图、正视图和侧视图，求其体积和面积，实际上这也是新增知识点(几何体的三视图)带给命题的新途径、新思路，等等．以上这些新颖试题的数量和难度都进行了有效控制．

(5) 控制较难题比例．为了充分体现试卷的选拔功能，设置适量的较难试题是必要的，关键是如何把握其数量和难度．这6份试卷处理得都比较适度，较难试题基本集中在每种题型的最后两题，而选择题、填空题中较少出现过难的试题．例如山东卷解答题的第(22)题是整份试卷的难题，但是设计了第(Ⅰ)问后，使入口较易且分值得到了分散．全卷较难试题分数在选择题、填空题的最后一题和(21)题的最后一问及(22)题的最后两问，共计30分，占全卷的20%，达到了预期目的．这种多题把关的处理方法，既很好保证了试卷的总体难度不会过难，又正常发挥了考试的选拔功能，广东卷、海南和宁夏卷也作了类似限度处理．

[illegible]方法

突出理性思维和思想方法的考查，倡导通性通法，有效区分不同思维层次的考生．数学思想方法是对数学知识的最高层次的抽象和概括，反映了考生的数学基本素质，是适用于中学数学全部内容的通法，是高考考查的核心．6份试卷对函数与方程、数形结合、分类与整合、化归与转化、特殊与一般、有限与无限、或然与必然等数学思想方法进行了较全面、深入的考查．这使得每套试卷整体体现出突出重点，重在通性通法，淡化特殊技巧的特点．

[illegible]

6份试题较为科学地处理了考查数学能力与难度稳定的关系，重视了对运算求解能力、数据处理能力、空间想象能力、抽象概括能力、推理论证能力和应用能力等核心数学能力的考查，考查突出重点，避免繁琐的计算，倡导理性思维，将创新意识的考查融于数学的基本问题之中，建立在核心能力考查的基础之上，控制了创新题的数量．新课程中大力倡导数学探究，所以试卷在考查基础知识和基本技能的同时，还加大了对数学探究能力的考查力度，对数学探究能力的考查主要通过创设适度开放需进行探索讨论的试题实现．如广东卷文科第(21)题(理科第20题)是含参数的一元二次函数零点问题，解法多样，深入地考查了考生的抽象概括能力．山东卷理科第(22)题第(Ⅲ)问，把导数应用于单调性、极值等传统、常规问题的同时，进一步升华到处理与自然数有关的不等式的证明．这一切对考查考生的应用能力和创新意识都大有益处；又如广东卷文科第(10)题(理科第7题)、理科第12题、文科第21题(理科第20题)都有讨论探究的要求；广东卷理科第(18)、文科第(19)题中圆 C 上是否存在异于原点的点 Q，使 $|QF|=|OF|$，显然是探讨解析几何中的存在性问题；海南、宁夏卷理科第(19)、文科第(21)题背景不同，但立意及考查意图却完全相同，其中是否存在常数 k 使得向量 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{PD}$ 共线，也需要考生自行探究；海南、宁夏卷文科第(18)题，本身就将问题设为 $\triangle ADB$ 转动时，是否总有 $AB\perp CD$？山东卷理科第(21)、文科第(22)题中直线所过的定点并未给出，还有山东卷文科第(20)题虽属传统的立体几何问题，但在设问方式上发生了新的变化，问点 E 落在棱 DC 上什么位置才能使得 $D_1E\parallel$ 平面 A_1BD，……，这些问题均属开放性的，求解时必须先进行探究，然后才能给出解答或证明．数据处理能力是实施课程标准后新增加的一种数学基本能力，值得关注．如广东卷文科第(7)题(理科第6题)将统计图和算法框图综合在一起，考查了算法思想、读图识图能力和推理论证能力．广东卷文科第(18)题(理科第17题)以生产中节能降耗为情景，倡导正确的价值观，考查考生对统计中最小二乘法知识的掌握和运用．侧重考查方法，控制计算量．

[illegible]

6份试卷均加强了对应用题的考查，注重创设背景符合考生心理成长和学习生活实际、有一定时代气息、反映正确价值取向、科学严谨的试题．坚持科学的数学教育观，辩证考查数学应用，体现了数学应用的现实性和时代性，创设了考查数学实践能力的新颖环境，不但在概率与统计、排列与组合等知识上仍然以实际问题作为命题背景，而且还在其他有关知识上专门设置了应用题．例如广东卷文科第(7)题(理科第6题)和第(18)题(理科第17题)都创设了应用的背景．广东卷体现对考生应用意识考查的还有文科第(5)题(理科第4题)和文科第(10)题(理科第7题)，文科第(5)题(理科第4题)是速度与路程的问题，重点考查了考生对函数概念的理解和读图识图的能力，文科第(10)题(理科第7题)的物流配送问题，实质是函数的最值问题，可通过对图形的探究，运用合情推理进行简单运算去解答．山东卷理科第(18)题(概率统计中的掷骰子问题)、山东卷理科第(20)题(航海问题，需要正确判断方位角、选择三角形使用余弦定理，还要会进行逻辑推理并对知识

灵活应用)、山东卷文科第(19)题(线性规划中的电视广告背景)、广东理科第(17)、文科(18)题(节能降耗问题,考查了线性回归方程的求法和应用)、海南、宁夏卷文科第(17)题(测量塔高问题,考查利用正弦定理解三角形知识)等,对应用问题都以平实的背景考查考生的应用能力.这些应用题展示了数学应用的广泛性,体现出数学与传统的、现代的文化的交融,反映出数学来源于社会现实又为社会实践服务的基本事实.这些应用题的设计和考查,提高了考生学好应用问题的积极性,同时对运用所学数学知识分析问题和解决问题的能力进行了有效的检测.

[illegible]

6份试卷解答题的设计可谓取材考究,立意独到,交叉渗透,融合自然,设问简明,充分体现了"注重学科的内在联系和知识的综合"以及"能力立意"的原则.注意知识网络、设问内容、思想方法、各科能力的交叉与融合.如广东卷理科第(19)题是折叠立体的问题,综合了立体几何、函数、导数和极值等知识,思维要求和知识综合度较高,解法多样,较全面地考查了空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力,以及创新意识和数学地分析、解决问题的能力;山东卷理科第(18)题这道概率统计解答题将古典概型、条件概率、数学期望、二次方程的判别式等数学知识融合在一起,体现了学科知识的内在联系和综合应用;山东卷理科第(22)题内容是函数和不等式知识的一个结合体,但它的解答却融合了转化、分类讨论、函数、数形结合等数学思想与方法,不但突出了能力的考查,同时也注意了对高考重点与热点的考查.广东卷理科第(21)题(文科20题是其姊妹题)的综合性极强,交汇考查了函数、导数、一元二次方程、对数、数列、数学归纳法等基础知识,考查转化与化归、特殊与一般的思想方法,考查推理论证能力和运算求解能力以及创新意识.还有象前面提到的海南、宁夏卷理科第(19)、文科第(21)题和第(18)题等.

[illegible]

由于考生和教学内容的特殊情况,四个课改区数学科高考也分为文、理两卷.保证了数学成绩在文科考试中的权重,有利于选拔人才,在能力考查中注意文、理科考生的实际情况.进一步降低文科试卷的难度,突出共性,反映个性,文、理两卷分合明显,体现层次差别,这样的处理方法比较切合新课程教学的实际.

[illegible]

新课标高考数学试题在"相对稳定、适度创新"的原则下,体现了数学新课程的理念,关注了不同版本的教材,关注了必修和选修的比例和文、理试卷的差异,以达到支持课程改革、进一步深化和正确引导中学数学教学之目的.主要表现在:

(1)打破僵化的试卷模式.例如山东卷理科第(17)题,往年是三角函数题目,2007年打破了常规模式由数列题取代了其位置;山东卷理科第(22)题由于新课标降低了不等式证明问题的要求,所以此题就由函数、导数与不等式的综合题取代之;海南、宁夏卷理科第(20)题在概率题中打破传统模式而考查了二项分布的应用,…….这些变化(广东卷也有类似变化)使得试卷布局生动、活泼、新颖、流畅,为试题的内容改革提供了适宜的形式和方法,同时还有助于突破固有的复习模式,体现了新课改新高考的全新局面.

(2) 赋予实际背景. 如山东卷理科试卷中有背景的题目包括第(8)、(12)、(18)、(20)题,共计34分占总分22.7%. 尤其是理科的第(20)题,大胆地改革了传统三角函数的考试模式,给解三角形问题赋予实际背景,在不过分追求形式翻新的同时,用古朴典雅的题目考查应用意识.

(3) 新增内容全面系统考查. 6份试卷对新课程中增加的内容幂函数、函数的零点、三视图、算法与框图、古典概率、条件概率及文科的直方图等进行了系统的考查.

(4) 设计选做题. 2007年高考广东卷、海南与宁夏卷在文、理试卷中均首次尝试设计了选做题,充分体现了数学新课程"适应个性选择"的基本理念,这种变化无论以什么形式体现,都反映了新课程背景下数学高考命题的一种走向,值得关注!

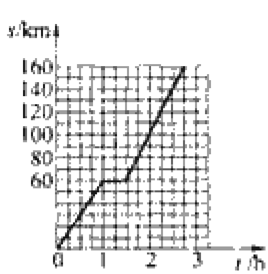
2. 全国新课程高考数学备考展望

笔者认为,2008年高考新课标区数学命题趋向:考查内容基础全面,命题形式新颖别致,题型格局不断创新,选拔功能充分体现. 适当增加开放性的试题数量,探究性、应用性将成为新高考试题的基本特征. 命题更加注重知识的网络化,仍然不刻意追求知识的覆盖面,但将会强化新增内容与传统内容的关联和融通,并且随着高中数学课程选择性的加大,试题还将打破单一题型中"多中取少"的命题格局,充分挖掘"能体现课程选择性"的有效空间. 试题科学、试卷平稳仍将是新高考命题的首要目标,同时展露新意、闪现亮点在高考命题时也不会放松,并且笔者可以斗胆预测新高考中的新意题、亮点题将具备以下特征:(1) 多属新信息迁移题(应对方略:在教学中既要适当拓展学生的数学知识视野,也要加强自主获取知识能力的训练与培养);(2) 常规考点经过适当包装(应对方略:告诫学生不为表象所惑,要善于抓住问题本质);(3) 常规考点组合联袂(应对方略:提示学生在解答时只需抓住基本知识,加以合适组合,问题便可迎刃而解);(4) 能力立意型(知识虽新颖,能力不超纲)(应对方略:在教学中不但强调知识的获取,而且还要注意对学生能力的培养).

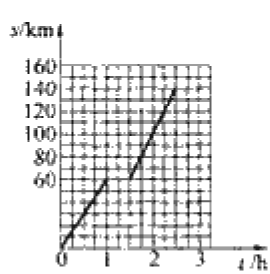
3. 2007年全国高考广东数学特色试题品评

综观2007年全国高考广东数学文、理全卷,试题成功地平移到了新课标的舞台上,处处体现着新课标,几乎每个新考点都有所体现,探究创新是整套试题的灵魂,也是对考生的基本要求,试卷中除了增加了新课标的试题外,在创新方面也作了大胆尝试,出现了不少新颖试题,现摘录部分进行品评.

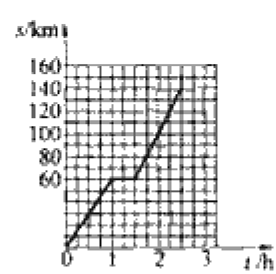
【例1】　客车从甲地以60 km/h的速度匀速行驶1 h到达乙地,在乙地停留了0.5 h,然后以80 km/h的速度匀速行驶1 h到达丙地. 下列描述客车从甲地出发,经过乙地,最后到达丙地所经过的路程s与时间t之间关系的图象中,正确的是(　　)



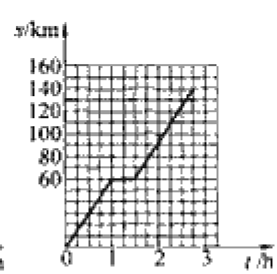
A.



B.



C.



D.

解析　客车共走 140 km,所用时间为 2.5 h,因此可排除 A、D,而 B 中在乙地休息时没有显示出来,故选 C.

点评　该题通过创设一个速度与路程的新问题情景来考查考生的应用意识,重点考查了考生对函数概念的理解和读图识图能力.

【例 2】　如图 1,是某县参加 2007 年高考的学生身高条形统计图,从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$(如 A_2 表示身高(单位:cm)在[150,155)内的学生人数).图 2 是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图.现要统计身高在 160 ~ 180 cm(含 160 cm,不含 180 cm)的学生人数,那么在流程图中的判断框内应填写的条件是(　　)

A. $i<6$　　B. $i<7$　　C. $i<8$　　D. $i<9$

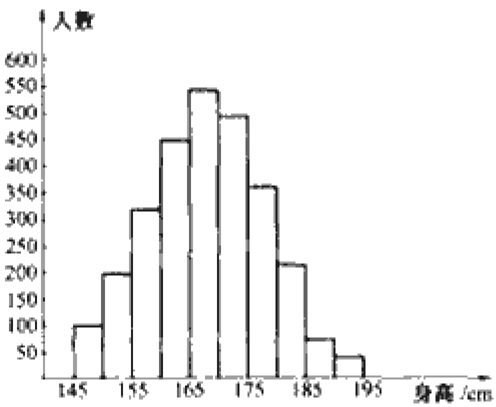


图 1

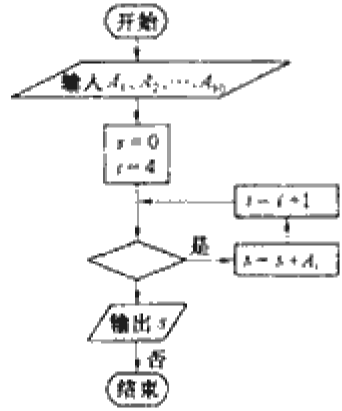


图 2

解析　$S=A_4+A_5+A_6+A_7$,故选 C.

点评　该题注重对数据处理能力的考查,数据处理能力是实施新课程标准后新增加的一种数学基本能力.此题将统计图和算法框图综合在一起,试题新颖,具有较高的思维要求.还考查了算法思想、读图识图能力和推理论证能力.

【例 3】　已知某几何体的俯视图是图 3 所示的矩形,正视图(或称主视图)是一个底边长为 8,高为 4 的等腰三角形,侧视图(或称左视图)是一个底边长为 6,高为 4 的等腰三角形.

(Ⅰ)求该几何体的体积;(Ⅱ)求该几何体的侧面积 S.

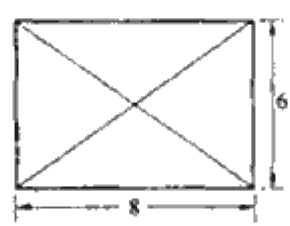


图 3

解析　由已知可得该几何体是一个底面为矩形,高为 4,顶点在底面的射影是矩形中心的四棱锥 $V-ABCD$.

(Ⅰ)$V=\frac{1}{3}\times(8\times6)\times4=64$.

(Ⅱ)该四棱锥有两个侧面 VAD、VBC 是全等的等腰三角形,且 BC 边上的高为 $h_1=\sqrt{4^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2}=4\sqrt{2}$,另两个侧面 VAB、VCD 也是全等的等腰三角形,AB 边上的高为

$$h_2=\sqrt{4^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2}=5$$

因此

$$S=2\left(\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times8\times5\right)=40+24\sqrt{2}$$

点评　本题是一个三视图问题,解答起来并不困难,但从一个新的角度考查了考生对数学语言的转换技能,考生首先需要将文字语言转化为图形语言,再运用符号语言计算出结论,这种考查方式也符合文科学生实际.

【例4】 如图4,等腰△ABC的底边$AB = 6\sqrt{6}$,高$CD = 3$,点E是线段BD上异于B、D的动点,点F在BC边上,且$EF \perp AB$,现沿EF将△BEF折起到△PEF的位置,使$PE \perp AE$,记$BE = x$,$V(x)$表示四棱锥$P-ACEF$的体积.

(Ⅰ)求$V(x)$的表达式;

(Ⅱ)当x为何值时,$V(x)$取得最大值?

(Ⅲ)当$V(x)$取得最大值时,求异面直线AC与PF所成角的余弦值.

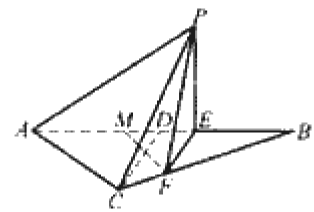


图4

解析 略.

点评 本题是一个折叠立体的问题,综合考查了立体几何、函数、导数和极值等相关知识,思维要求和知识综合度均较高,解法也灵活多样,其特色是比较全面地考查了考生的空间想象能力、推理论证能力和求解运算能力,以及创新意识和数学地分析、解决问题的能力.

【例5】 已知a是实数,函数$f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a$,如果函数$y = f(x)$在区间$[-1,1]$上有零点,求实数$a$的取值范围.

解法1 函数$y = f(x)$在区间$[-1,1]$上有零点,即方程$f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a = 0$在$[-1,1]$上有解,当$a = 0$时,不符合题意,所以$a \neq 0$. 方程$f(x) = 0$在$[-1,1]$上有解$\Leftrightarrow f(-1) \cdot f(1) \leqslant 0$或

$$\begin{cases} af(-1) \geqslant 0 \\ af(1) \geqslant 0 \\ \Delta = 4 + 8a(3+a) \geqslant 0 \\ -\dfrac{1}{a} \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant a \leqslant 5 \text{ 或 } a \leqslant \frac{-3-\sqrt{7}}{2} \text{ 或 } a \geqslant 5 \Leftrightarrow a \leqslant \frac{-3-\sqrt{7}}{2} \text{ 或 } a \geqslant 1.$$

所以实数a的取值范围是$a \leqslant \dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$或$a \geqslant 1$.

解法2 当$a = 0$时,不符合题意,所以$a \neq 0$. 又$f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a = 0$在$[-1,1]$上有解$\Leftrightarrow (2x^2 - 1)a = 3 - 2x$在$[-1,1]$上有解$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{2x^2-1}{3-2x}$在$[-1,1]$上有解,问题转化为求函数$y = \dfrac{2x^2-1}{3-2x}$在$[-1,1]$上的值域. 设$t = 3 - 2x$,$x \in [-1,1]$,则$2x = 3 - t$,$t \in [1,5]$,$y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(t-3)^2-2}{t} = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{7}{t} - 6\right)$. 设$g(t) = t + \dfrac{7}{t}$,$g'(t) = \dfrac{t^2-7}{t^2}$,当$t \in [1,\sqrt{7})$时,$g'(t) < 0$,此函数$g(t)$单调递减,当$t \in (\sqrt{7},5]$时,$g'(t) > 0$,此函数$g(t)$单调递增,所以$y$的取值范围是$[\sqrt{7}-3,1]$,所以$f(x) = 2ax^2 + 2x - 3 - a = 0$在$[-1,1]$上有解$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \in [\sqrt{7}-3,1] \Leftrightarrow a \geqslant 1$或$a \leqslant -\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

点评 此题是一个含参数的一元二次函数零点问题,主要考查二次函数及其性质、一元二次方程、函数应用、解不等式等基础知识,考查数形结合、分类与整合的思想方法,以及抽象概括能力、运算求解能力,对思维的严谨性和全面性要求较高,解法多样,通过对参数的讨论和概括,深入地考查了考生的抽象概括能力.

【例6】 已知函数$f(x) = x^2 + x - 1$,α、β是方程$f(x) = 0$的两个根($\alpha > \beta$),$f'(x)$是$f(x)$的导数;设$a_1 = 1$,$a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$($n = 1,2,\cdots$).

(Ⅰ)求α、β的值;

(Ⅱ)证明:对任意的正整数n,都有$a_n > \alpha$;

(Ⅲ)记$b_n = \ln \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$($n = 1,2,\cdots$),求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

解析 （Ⅰ）因为 $f(x)=x^2+x-1$，α、β 是方程 $f(x)=0$ 的两个根（$\alpha>\beta$），所以 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

（Ⅱ）
$$f'(x)=2x+1$$

$$a_{n+1}=a_n-\frac{a_n^2+a_n-1}{2a_n+1}=a_n-\frac{\frac{1}{2}a_n(2a_n+1)+\frac{1}{4}(2a_n+1)-\frac{5}{4}}{2a_n+1}=$$

$$\frac{1}{4}(2a_n+1)+\frac{\frac{5}{4}}{2a_n+1}-\frac{1}{2}$$

因为 $a_1=1$，所以由基本不等式可知 $a_2\geqslant\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}>0$（当且仅当 $a_1=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时取等号），所以 $a_2>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}>0$，同样 $a_3>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，…，$a_n>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\alpha(n=1,2,\cdots)$.

（Ⅲ）
$$a_{n+1}-\beta=a_n-\beta-\frac{(a_n-\alpha)(a_n-\beta)}{2a_n+1}=\frac{a_n-\beta}{2a_n+1}(a_n+1+\alpha)$$

而 $\alpha+\beta=-1$，即 $\alpha+1=-\beta$，$a_{n+1}-\beta=\dfrac{(a_n-\beta)^2}{2a_n+1}$，同理

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{(a_n-\alpha)^2}{2a_n+1},b_{n+1}=2b_n$$

又
$$b_1=\ln\frac{1-\beta}{1-\alpha}=\ln\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=2\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

所以
$$S_n=2(2^n-1)\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

点评 本题的特色是综合性极强，交汇考查了函数、导数、一元二次方程、对数、数列、数学归纳法等基础知识，考查转化与化归、特殊与一般的思想方法，考查推理论证能力和运算求解能力以及创新意识.

(五)2008年全国高考数学大纲版试题全分析

2008年高考数学全国卷Ⅰ和卷Ⅱ均紧扣考试大纲，立足现行高中数学教材，注重对基础知识的考查，突出能力立意．与2007年同类考卷相比，试题总体相对稳定，能区分出不同考生对基本概念掌握的层次或效果，强化应用意识，倡导理性思维，体现创新意识的考查．理科卷呈现出题目灵活、综合性、创新性增强等特点，对计算能力的要求提高，起点容易落脚难．文科卷总体保持2007年的标准还略显简单．文、理科试题都没有偏题、怪题，而且题目多是立意新颖，“把关点”多，在难度设置顺序上更显科学、合理，更加符合考生的思维方式．同时试题也具有很强的导向功能，对推动中学数学教学改革，具有重大的现实意义．

[redacted]

(1) 重点知识重点考，保持稳定有创新

2008年全国高考数学全国卷Ⅰ、卷Ⅱ，考查内容与前两年基本一致，保持考查内容稳定的风格，对数学的基本概念的理解，要求更高了，解题思维量更大了．除了个别题目看起来比较新颖，大部分题目是大家比较熟悉的问题．对支撑数学学科知识体系的主干知识，考查时保证较高的比例并保持必要的深度．试题涉及的知识点覆盖面广、难度分散，充分重视到难度适中，没有出现超出考试大纲的情况．

全国卷Ⅰ文、理科除了集合与简易逻辑、统计涉及的内容较少外，其他大部分知识点都有考查．其中，解析几何所占比重较大，从这一点来看，这份试题体现出重点知识重点考查的原则．试题涉及：

函数与导数内容的有5道选择题、1道解答题，共占37分；

数列内容的有1道选择题、1道解答题，共17分；

三角内容的有1道选择题、1道解答题，共15分；

平面向量内容的有1道选择题，共5分；

不等式内容的有1道选择题，共5分；

解析几何的有3道填空题、1道解答题，共占27分；

立体几何内容的有1道选择题、1道填空题、1道解答题，共22分；

排列组合和概率内容的有1道选择题、1道解答题，共17分；

复数内容的有1道选择题，共5分．

上面考查的内容及分值显示，全国卷Ⅰ中代数、立体几何、平面解析几何三部分所占分值比例为101∶22∶27．

与此相仿，2008年的全国卷Ⅱ文、理科考查了高中数学内容75%的主干知识点．教材各章内容所占分值分别为：集合与简易逻辑占5分、函数占10分、数列占12分、三角函数

占 15 分、平面向量占 5 分、直线与圆的方程占 10 分、圆锥曲线占 22 分、立体几何占 27 分、排列组合概率占 22 分、导数占 17 分、复数占 5 分. 从上面分值情况看，试卷仍然加强对圆锥曲线、立体几何、排列组合和概率的重点考查，而函数、数列、三角函数、直线与圆的方程、导数也保持相当比例. 整卷突出知识主干的考查，解析几何所占比重仍较大. 对于极限和统计试卷没有涉及，不等式在数列和导数的解答题中有所考查. 同时基础知识还变换形式考查，例如第 8 题“若动直线 $x=a$ 与函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 的图象分别交于 M、N 两点，则 $|MN|$ 的最大值是多少”，此题的本质是求 $y=\sin x-\cos x$ 的最大值.

另一方面，从具体的命题情况来看，2008 年全国卷 Ⅰ 和全国卷 Ⅱ 都是在去年的基础上保持了相对稳定的命题思路，是在 2007 年所考查的知识点的基础上进行了适当调整变形命制而成. 以全国卷 Ⅱ 为例：

2007 年在数列方面考查“$2a_n=3-a_{n-1}$ 两边同减 2，可得数列 $\{a_n-1\}$ 成等比数列，设 $b_n=a_n\sqrt{3-2a_n}$，证明：$b_n<b_{n+1}$”，2008 年考查“$a_{n+1}=S_n+3^n$ 变形为 $S_{n+1}=2S_n+3^n$，两边同减 3^{n+1}，可得数列 $\{S_n-3^n\}$ 成等比数列，若 $a_{n+1}\geqslant a_n$，去求 a 的取值范围”.

2007、2008 年两年都考了利用自然对数的单调性进行大小比较；

2007、2008 年连续两年三角函数题都考查了应用正弦定理解斜三角形；

2007、2008 年两年都通过设置选择题考了求双曲线的离心率；

2007、2008 年两年都考了与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点和焦半径相关的问题；

2007、2008 年两年都考了两个不同次方的因式的二项式展开式；

2007 年的立体几何是棱锥，而 2008 年是棱柱，但都很容易建立空间直角坐标系来解决.

2007 年考查球体内部正四棱柱中的有关线段与球的直径的关系，2008 年考查球体中与两个互相垂直平面相截的圆心与半径的关系.

2007 年的概率设问方式为已知“取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品的概率是 0.96”，求任取出 1 件 产品是二等品的概率；2008 年的概率设问方式为已知“保险公司在一年内至少支付赔偿 10 000 元(有 1 人出险)的概率是 $1-0.999^{10^4}$”，求 1 年内有 1 人出险的概率. 其共同点是给出几个互斥事件的概率和来求其中某一事件的概率.

还有 2008 年的全国卷 Ⅱ 第 16 题是根据平行四边形的充要条件来探索研究平行六面体的充要条件，这一题型在 2003 年的全国高考数学试卷中已经考过，例如把“平面勾股定理”拓广为“空间勾股定理”，研究三棱锥侧面互相垂直的侧面面积与底面面积的关系.

2008 年全国卷 Ⅰ 和卷 Ⅱ 既注意全面考查，更注意突出重点，对支撑数学科知识体系的主干知识，考查时保证较高的比例并保持了必要的深度.

① 函数作为高中代数最基本、最重要的内容，所占卷面总分的比值都较大幅度地超过了教学大纲中规定的相应课时比值. 在全国卷 Ⅰ 文、理科试卷第 1、2、6、8、9、19(文 21)题中，从不同侧面进行了考查，特别是试卷强化了导数在函数中的工具作用，利用导数研究函数的单调性、极值、最值等问题占较重分值，全国卷 Ⅱ 也是如此.

②2008 年全国高考数学全国卷 Ⅰ、卷 Ⅱ 中 6 道解答题考查的主体与去年完全一致，依然是以函数、三角函数、数列、立体几何、解析几何、导数为主要载体，考查学生的综合数

学思维能力.以全国卷Ⅰ为例:

在解答题中,文、理科第17题都是考查斜三角形问题,理科考生要求会熟练地运用正弦函数的图象与性质,并且要熟悉三角函数的恒等变形.第18题是空间直线位置关系的证明,二面角的计算仍采用"一题两法"的命题原则,用向量方法研究解决平行、垂直、夹角等问题更容易上手.圆锥曲线问题,还是沿袭向量知识融入解析几何中考查的高考命题指向,以双曲线为载体,构筑成知识网络型综合问题,运用知识之间的交叉、渗透和组合,是基础性与综合性的最佳表现形式.目标就是将几何问题坐标化、符号化、数量化,从而将推理转化为大家熟悉的代数运算.文、理科导数试题是常见题型.文科的概率、理科离散型随机变量的分布列与数学期望等问题,虽说是这部分内容的常见题型,但是阅读量大,对审题要求高,读不懂题,不理解题意,就无从下手,此题要比前两年难度大.

其次,2008年有些试题看似一般,但实际上还是挺有新意的,比如说全国卷Ⅰ第10题是把直线和三角以及不等式串在一起的一道题.这种考法在以往的考试中不常见.如果考生沿"不等式"这条路去走,可以走通;如果用三角换元也可以做;把三角改写成圆的参数方程,也可以解决.这确实称得上是一道让人眼前为之一亮的题目.它对不同层次的考生提出了不同的要求,也符合新课标对中学数学教学的有关要求.

以上所述特征对于我们今后的高中数学教育教学应该具有很强的导向作用.

(2) 试题原型在教材,设问形式均变脸

2008年全国卷Ⅰ、卷Ⅱ中好多题目都能在课本上找到影子,是课本题的变形和转化,考生第一眼就看到非常熟悉的课本题,对于稳定考生情绪,鼓舞答卷士气具有强烈的推进作用.大部分题目可在教材中找到原型,如全国卷Ⅰ文科第3题、理科第5题,在教材向量章节的例题中可以找到原型;全国卷Ⅰ文理科第13题,在线性规划这一节当中,到处可见这种题型.像这样"有原型"的题目在今年的全国卷Ⅰ、卷Ⅱ中大约占到试题总量的三分之一左右.

(3) 选择填空送分少,上手容易得分难

选择题和填空题侧重考查数学的基本概念、基本知识和基本计算、基本的解题方法,与前两年高考试卷中的填空题相比,2008年的选择、填空题,"送分题"相对少了.整个试题基本上没有一道题一看就可以得出结果的,这也是对学生心理素质的一种考查,是学生感觉试题较难的原因之一.最典型的是前五道题相对于2007年前五道题来说难度都增加了,比如在全国卷Ⅰ中,有一些考生就会把第1题中的"0解"丢掉.还有函数图象的问题,以往都是放在偏后一点,这一次放在第2题的位置,所以使学生拿到试卷把握不住,而且它是一个与实际生活结合比较紧密的问题(是一道看图题,要求学生通过汽车的运动方式找出路程s与时间t的函数图象的关系),需要一定的思维量,这方面学生常常会感到比较困难.此外,理科试卷的第6题是一个反函数问题,过去我们对反函数的考查就是在图象和概念上做文章.这次既考了概念,同时,也考了指数与对数的互化.这些概念只要有一点疏忽,就会造成错解.理科的第4题是一道复数试题,在2007年的复数考题中,仅考了概念,2008年把运算改成了乘法运算,同时还要判定实数a的符号,这也是一个难点.这就使得学生感到很容易上手,但得高分不易.第14题出的比较活,在"抛物线和平移两个知识点处"出题目,学生往往因为考虑不周全而丢分.试卷中的第11题、16题都是关于立体几

何的问题，如果考生不能透彻分析问题的实质，只单纯地进行计算，可能容易算错，而且计算量很大. 若能挖掘出来，第 11 题是一个平行六面体，各个面都是锐角为 60° 的菱形，截下一半以后，就很好解决. 对于第 16 题，若清楚是一个正八面体，由上半面各个侧面都是全等的正三角形，作正三角形相应的某一边侧棱上的中线，问题很快解决. 否则计算量就比较大，容易算错，这也是 2008 年试卷的一大特点，几何内容的考查偏重立体几何，立体几何的题目难度大了一点. 即使解答题也是如此，例如全国卷 Ⅰ 文、理科的第 18 题，第(1)问比较容易，仅考查三垂线定理，但第(2)问就考查空间想象能力，要求比较高；文科第 21 题、理科第 19 题，第(1)问仅考查函数的单调性，相对容易，但第(2)问就不那么简单了，不但考查学生的基本运算能力，还要考查考生的逆向思维能力，以及数形结合的数学思想方法等，要求比较高.

(4) 数学思想贯始终，解题方法多样性

数学思想和数学方法蕴含于数学基础知识的形成之中，它们与数学知识的形成同步发展，同时又贯穿于数学知识的学习、理解和应用过程之中. 因此，数学解题的过程，是个体的思维能力作用于数学活动的心理过程，考生解题的切入点不同，运用的数学思想方法也不同，这就体现出不同的思维水平. 2008 年全国高考试题全国卷 Ⅰ、卷 Ⅱ，注意研究题目信息的配置，考虑从不同角度运用不同的思想方法，创设多条解题路径，使不同思维层次的考生都有得以表现的机会，从而有效地区分出考生不同的数学能力. 比如说分类与整合这个思想在全国卷 Ⅰ 中相对比较突出. 很多题目都涉及这个问题，如第 1、9、12、19、20 题，这些题目都涉及分类与整合的数学思想. 全国卷 Ⅰ 第 19 题是一道函数的求导问题，对文科生来说，要求跟理科生不一样. 这道题第一要对判别式进行讨论，这一点有个别学生会感到不适应，但是它的第(2)问却不难. 还有全国卷 Ⅰ 理科第 9 题，就需要把抽象函数变成具体函数或者进行数形转化，若平时没有强化这方面的训练，此类问题得分是不易的. 还有全国卷 Ⅰ 理科第 22 题是数列与函数、不等式的综合，考查了函数与方程、化归与转化等数学思想. 今年的全国卷 Ⅱ 也是如此，理科的第 5、8、11、22 题涉及数形结合思想，理科的第 22 题涉及分类与整合思想，理科的第 16 涉及类比方法，理科的第 15、21 题涉及函数与方程思想，理科的第 9、18、20 题涉及化归与转化思想，理科的第 17 题涉及消元法，理科的第 10、19 题涉及坐标法，理科的第 22 还涉及换元法.

另外在这里面，解题方法也呈现多样性，如全国卷 Ⅰ 中，文、理科第 17 题，既可以从正弦、余弦定理入手，也可以从三角形中的射影定理入手；文科第 22 题、理科第 21 题，既可以运用点到直线的距离公式，又可以通过求交点、求距离的方法解题，用角平分线定理求解更简捷. 就位置来说，这是一道相对比较难的题目，可是这道题考查的是一条直线与两条直线相交，把数列揉进了线之中. 如果从计算的角度理解这道题，完全是一道计算题，所以它的计算量非常大. 但是如果我们仔细观察，该题又可以借助解析几何与平面几何的关系，找到其中线段 AB 和 $\triangle AOB$ 之间的线段和角的关系，我们可以借助平面三角形来解决问题. 这样计算量将大大降低，不需要求焦点坐标了，这道题也就不难了. 很多考生往往做完了回头看，才能发现这个特征. 实际上在解题过程中，未必就能发现这个巧妙的地方. 此题的第(2)问反而比较容易，这是一个常规性的问题，是要求学生必须比较会做的计算问题. 从这道题的感觉来说，还是符合高考大纲要求的. 就是要求考生无论采用什么样的做

法，都应该能够把它做出来，也体现了一题多解的特征.

总的来说，从全国卷Ⅰ和卷Ⅱ来看，涉及数形结合、函数与方程等数学思想方法的题目很多.这样一来，灵活多变的题目就增多了，"陈题"、"旧题"相应也就变少了，考前有些好心老师给学生的种种猜题、押题的方法也就不那么"灵验"了.这就是说，实际上，更应注重的是，进一步强化考生的数学基础知识、基本方法的掌握.

数学思想与数学方法的合理选择表现出考生的思维敏捷性，把多样的数学思想方法，置于"平凡"的数学问题之中，可以瞬间抓住问题本质，简便、快捷地把问题转化，减少错漏且赢得后续的解题时间，展现其较高的数学素养.重视数学思想方法的考查是高考命题的主导思想，把基本的数学思想方法融入不同层次的试题中来检测学生对数学知识的判断、理解、掌握情况，同时也考查学生解决问题的应变能力.以上说明，数学不仅仅是一种重要的"工具"或者"方法"，更重要的是一种思维模式，表现为数学思想.高考数学学科提出"以能力立意命题"，正是为了更好地考查数学思想，促进考生数学理性思维的发展.

(5) 计算加大难度增，考点集中也是因

2008年全国卷Ⅰ、卷Ⅱ的选择、填空题较2006、2007年运算量有所提高，这是考生们感觉试题较难的原因之一.此外，压轴题综合性较强，还对考生的运算能力、推理能力提出了更高的要求.

在文理两卷的22个题中选择题有5道不一样，填空题有2道不一样，解答题有5道不一样，这绝非偶然，而是命题人的匠心独具，体现了命题人尊重学生的主体思维差异，是人文教育在数学教育中的体现，为今后的数学教学起着高屋建瓴的导航作用.相对来说，2008年理科试卷难度要大一些，文科试卷还是比较适中.可以看到，在2008年的试卷中，选择题和填空题，尤其是选择题，文理的差距比较大.所以，理科考生会感到理科试卷相对比较难，但是文科试卷就没有特别的难，这也符合文理考生对各自的内容和层次要求不同，提高了试卷对文科考生的适应程度.由于今年试卷关于立体几何的试题都是考查有关角的问题，最后一道立体几何题考的是二面角.所以三道关于立体几何的问题都考到了角，考的知识点相对集中，难度就一定会增加.另外说函数和不等式的难度增加也有类似的问题.

尽管试题普遍运算量比较大，但如果方法适当，并且合理运用数学公式，运算量就会大大减小.比如全国卷Ⅰ文、理科第17题，运用三角形中的射影定理就比较简单，运算量还很小；全国卷Ⅰ文科第22题、理科第21题，运用角平分线定理和圆锥曲线定义解答，运算量就很小了.

(6) 学科内部增联系，交汇知识考查密

2008年的全国卷Ⅰ、卷Ⅱ进一步强调了知识间的内在联系，注意从学科的整体高度出发，注重各部分知识的综合性、相互联系及在各自发展过程中各部分知识间的纵向联系，新增内容已成为支撑数学学科知识体系的重点知识，从而构成数学试题主题的重要知识板块，以新教材所添加的新内容构筑高考热点题型.以知识网络的交汇点设计的高考解答题，运用知识之间的交叉、渗透、迁移和组合，是基础性与综合性的最佳表现形式.在知识网络交汇点设计试题成为新高考一道靓丽的风景线，试题大都涉及两个或两个以上的知识点.

以全国卷Ⅱ为例，如第20题既考查数列的转化变形知识，又在第(2)问中渗透不等式、指数函数的单调性问题. 第21题综合了定比分点、椭圆方程、直线方程、一元二次方程、点到直线距离、两点间的距离公式、均值不等式等知识. 第22题综合了三角函数的导数、分式的导数、解三角不等式求单调区间、三角函数式的化简、整体换元成二次函数、分类与整合数学思想等. 部分题目(例如第8题)条件呈现新颖，第20题回避常规考法两边同减或同加常数，而是 $S_{n+1}=2S_n+3^n$ 两边同减 3^{n+1}，3^{n+1} 是与 n 有关的变量. 第22题在导数考查方面一改常态考三角函数的导数给学生以措手不及，因为平时训练主要是幂函数、指数函数、对数函数以及分式的复合求导. 从这一点说明高考复习一定要全面，不留任何漏洞. 根据以上分析可以看出，数学各知识点间的纵横联系非常紧密，在知识网络交汇处设计试题有利于考生多角度、多渠道解决问题，为考生解题思维提供广阔的空间.

全国卷Ⅰ也是如此，例如理科第7题为解析几何与导数的交汇，第9题为函数与不等式、第10题为解析几何、三角与不等式，第19题是函数与导数综合，第20题是概率与统计的应用题，第21题是解析几何、数列和平面向量的综合题，第22题是函数、数列、不等式、导数的综合题，它们有着一定的理论或实际背景及文化内涵，沟通着高等数学与中学数学的联系等. 文科第2题，既考查变量与变量之间的关系，又考查变量和图象之间的关系，像这样的题目还有很多，比如文科第4、10、14、15、21、22题等.

高考作为重要的选拔性考试，要在有限时间内通过有限的试题，特别是有限的解答题进行考查，必然要"提纲挈领"地抓住知识网络的交汇点，设计出具有综合性的新颖试题，以达到较全面地考查考生的数学基础和数学素养的目标. 高考命题正在向能力型、综合性、开放型等各个方向扩展，这就要求学生提高发现问题、分析问题和解决问题的技能，提升社会生活和人际交往的能力. 还充分体现了倡导在高中数学教学中推广研究性学习、强化素质教育的导向.

(7) 生活问题数学化，创新发展重课改

2008年全国卷Ⅰ的一个变化就是将前几年比较容易的概率和统计的应用题放到了第四道大题(第20题)，排列组合的应用题也放到了选择题的最后一题(第12题)，提高了应用题的难度，说明今年的高考全国卷在知识与能力考查的同时，体现了对新课改新理念的创新与发展. 它要求考生应主动地从事观察、实验、猜测、验证与交流等数学活动，理论联系实际，能综合应用所学数学知识、思想和方法，通过一定的逻辑分析和推理，对问题做出符合实际的解释，掌握动手实践、自主探索与合作交流等学习数学的重要方式，实际上是考查学生数学建模的能力，即既考查从数学的角度观察、思考和分析实际问题的能力，又考查相关知识和技能的理解和掌握程度，从而能比较好地反映考生对信息的接收、加工和输出能力，达到有效考查综合素质的目的. 全国卷Ⅱ第18题购买保险是学生每一年都要做的事，他们非常熟悉，十分贴近现实生活. 但是如何把自己知道的和题目提供的条件结合起来，列出数学式子解决问题却不是件容易的事，这直接体现出学生的阅读理解和提炼信息、加工、整理、转化等能力.

[illegible]

以上通过对2008年全国高考试题全国卷Ⅰ、卷Ⅱ的对比分析和深入思考，笔者认为

在高三复习时应注意以下几个问题:

(1) 知识点要全面覆盖

按照我们大多地区的教学进度,高中数学教材所有新的内容在高一高二都已经全部结束了.所以高三一轮复习对所有知识应该全部都覆盖.尤其是今年的高考题,要求概念一定要深入理解.绝对不能只知其然,而不知其所以然.

(2) 要重视教材的基础作用与导向作用

因为课本是考试内容的载体,是高考命题的直接依据,是学生智能的生长点,在学习的过程中要吃透教材,以课本为核心,详细认真地复习每一个知识点.以知识点为基础,以习题为载体,抓好每一环节的复习十分必要.从近几年全国高考数学试题看,试题形式、考试热点、难点及方向年年有所变化,但有一点是不变的,即考试的目标是考核考生对基础知识、基本技能、基本思想和方法的掌握.纵观各年的高考数学试题,运用基础知识和基本方法求解的题目占 60% 以上,相当数量的考题就是教材基础知识的组合、加工和深化,这充分说明教材的基础作用、示范作用和权威性不容置疑.只要在此基础上,学会灵活综合运用就可以了.因为教材具有完备的知识体系,又具有绝对的权威性,因此,在复习中一定不要脱离课本,应充分挖掘课本例、习题的潜能.要细心领会课本中的观点和方法,重视知识的发生、发展过程,特别是定理、公式的推导过程,例题求解过程中的数学思想和数学方法,切实做好消化、转化和内化,最终达到变化.在掌握教材的基础上,把各个局部知识按照一定的观点和方法组织成整体,形成一个条理化、有序化和网络化的知识体系.将分散在例题、习题中的相关知识、数学思想方法等集中整理,从中探寻出解题经验和规律,并把它积累到自己的知识结构网络中,做到融会贯通,熟练运用.

(3) 注重新旧知识的结合

我们在复习中不要将落脚点放在这些知识的简单运用上,要进行深层次的挖掘.新教材与旧教材的结合内容,命题时都采用新旧结合,以新带旧或以新方法解决进行.例如在解决立体几何、解析几何问题时告诫学生不要忘了空间向量、平面向量,在解决函数问题和有关解析几何问题时不要忘了导数.还有概率与统计作为研究随机现象统计规律性的内容在优化问题中有着广泛的应用,是考查学生分析、解决实际问题能力的好素材,也值得关注.

(4) 从技术层面提升学生综合素质

因为数学不光是要学生了解知识、了解概念,更多的时候是体现了一种思维,它是对人思维能力的一个训练.所以,思维往往与对问题的了解是否深入、看问题是否看到实质,给出正确的判断和采用适合的方法去解决问题有很大关系.所以,教师在复习课教学中,不应该就题论题,就题解题,应该提高学生解题的技术含量.例如全国 Ⅰ 卷中,第 20 题是一道动物血液化验方案的题目,题目文字冗长,8 行将近 230 个字符,考生一看到如此长的题目,心理上首先就感到害怕,会影响解决问题的思路.好多考生反映读不懂题,不理解题意,从而无从下手,真正理解了题意,才发现这道题其实一点儿也不难,很多考生放弃跳过了这一题.其实这道题,只要考生静心找出关键词,是不难解决的.理科的第 19 题和文科的第 21 题,都是函数求导的题目,第(1)问是送分的,很好入手;第(2)问,只要注意数形结合,利用二次函数的图象来帮助解题,也是很快可以得出结果的.还有全国卷 Ⅰ 第 12 题

中，有4种作物要种在环形的4块地上，每块地种一种作物，但是相邻两块地不能种同样的作物，这样的考题在考前很多学校的复习资料中就出现过的，但是这道题还是做得不好，究其原因就是有些老师处理问题的时候只想以题代替方法，很少注意在解题过程中学生得到什么，结果学生只解决对和不对，但却不懂，这样的题给我们一个信息就是说像全国卷这样的题，学生只要会最基本的方法，最基本的加法原理，画上一个竖形的图就可以做得很清楚，其实没有什么灵活的技巧，如果要把这道题用一点递推方式来做可能会更轻松.

(六)2008年全国高考数学新课程卷对比分析

随着江苏卷的加盟，2008年全国高考数学新课程卷继2007年广东、山东、海南和宁夏四省区进入新课程高考后增加到了4套8份，其中广东、山东、江苏自主命题，海南、宁夏共用教育部考试中心统一命制的新课标卷，无论自主命题的高考，还是教育部考试中心统一命题的高考，都按照"考查基础知识的同时，注重考查能力"的原则，确立以能力立意命题的指导思想，将知识、能力与素质融为一体，并全面检测考生的数学素养，大力体现新课程理念要求是这4套试卷的共同点．通过对这4套8份高考新课程卷的特点进行纵横比较分析，笔者认为2008年高考数学新课程卷的命题有以下特征．

[redacted]

从表1可以看出，2008年全国高考新课程卷整体结构发生了部分变动．

表1 题型结构

卷 别	题型结构		
	Ⅰ卷(选择题)	Ⅱ卷(非选择题)	
		填空题	解答题
广东卷	理科：8题，40分 文科：10题，50分	7题(9～12必做，13～15选2题)30分 5题(11～13必做，14～15选1题)20分	6题，80分
山东卷	文理：12题，60分	文理：4题，16分	文理：6题，74分
宁夏 海南卷	文理：12题，60分	文理：4题，20分	理科：8题(22～24选1题)，70分 文科：7题(22～23选1题)，70分
江苏卷	—	14题，70分	6题，90分，理科附加题：21题A、B、C、D选2题，22、23题为必做题

广东卷、山东卷及海南卷、宁夏卷与2007年高考同类卷完全相同．

江苏卷与2007年相比，发生了很大变化，成为今年的热议试卷，这套试卷分填空和解答两种结构形式的试题，理科还设有附加题．填空题共14道(1～14题)，各5分；解答题共6道(15～20题)，理科附加卷则全部为解答题，其中第21题为4选2的题，其余22、23都是必做题，总分也由原来的150分增至160分，这套试卷严格按照2008年江苏省高考数学考试大纲说明的要求进行了试题编拟．

从2008年江苏卷的整体难度上看，总体难度贯彻了"易：中：难＝4：4：2"的特征(这是根据考试大纲说明进行的调整)；附加卷因为只有30分钟的做答时间，所以以简单及中等题为主，只是在最后一题的最后一问上设置了难度，这也坚持了近年高考试题"多设问，

缓梯度，有效增设难度"的命题思路．今年江苏卷与往年难度上最大的不同是，不再按从易到难的顺序排列，而且填空题和解答题都坚持了这种风格：如填空题的第11题比第12题难，第13题比第14题难，解答题中的第16题比第18题难，因此，考前留设一段时间的审题，不是随意象征性的安排（高考每场提前5分钟发卷但要求阅读试卷而不准答卷），考生要充分利用好这个时间审题，按照习惯的"从易到难，所以不审题"的思路是要吃大亏的（这有可能代表以后的一种命题结构方向）．

另外值得一提的是，今年高考宁夏、海南卷最后一道填空题还打破往年常规设置了两空，而且是一道开放性试题，可谓独树一帜．

[redacted]

分析表2、表3、表4，从各知识点的考查分布情况来看，有着明显的规律．

表2　选择题知识考点分布（以理科为例）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
广东卷	复数模的概念	等差数列前 n 项和	分层抽样方法及概率	线性规划	三视图	复合命题的真假	导数极值、对数	向量的加减法				
山东卷	两集合间的关系和交集运算	复数运算	复合函数的图象	函数图象对称性	三角函数化简求值	三视图	概率基本知识	统计基本知识	二项展开式的通项公式	椭圆及双曲线的基本知识	直线和圆的位置关系	线性规划
宁夏、海南卷	三角函数的图象及周期性	复数的基本运算	余弦定理	等比数列前 n 项和公式及通项公式	程序框图	不等式的解法及恒成立问题	三角函数式的化简	向量共线的充要条件	排列组合	定积分	抛物线的定义及标准方程	线面角、三角函数式变形、均值不等式
江苏卷	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

表3　填空题的知识考点分布（以理科为例）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
广东卷	程序框图	二项展开式项的系数	圆的标准方程及点斜式直线方程	三角函数的化简及周期性	（选做题）极坐标方程曲线求交点坐标	（选做题）绝对值不等式的解法	（选做题）平面几何中线与圆的关系							

续表 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
山东卷	程序框图	定积分	平面向量数量积和正、余弦定理	绝对值不等式										
宁夏、海南卷	空间向量模的计算	双曲线的标准方程及渐近线方程	棱柱性质及球的截面性质	平均长度、数据分散与集中、中位数、对称性										
江苏卷	三角函数周期	古典概率	复数除法	集合运算、二次不等式	向量运算	古典概型和数学图象	框图分析	导数几何意义	直线方程	等差数列求和	二元基本不等式	圆和圆锥曲线	三角形面积公式、余弦定理	函数单调性

表 4 解答题的知识考点分布(以理科为例)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
广东卷	三角函数性质和同角三角函数的基本关系、三角恒等变换	随机变量的分布列、数学期望、不等式	椭圆、抛物线、圆、直线、函数导数、直角三角形	函数的概念、单调性、导数	空间线面关系、体积变换求距离、线面角	一元二次方程、数列的通项公式、数列前 n 项和	平面几何中线与圆的关系		
山东卷	三角函数变换公式、三角函数图象变换及性质	相互独立事件同时发生的概率、独立重复试验、分布列和期望	等差数列和等比数列的基本知识、数列求和	线线垂直、线面垂直、二面角	函数的极值、导数的应用	直线与抛物线的位置关系、弦长公式			

续表 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
宁夏、海南卷	等差数列通项公式、前 n 项和公式、二次函数最值	线线角、线面角	期望、方差、二次函数最值	椭圆与抛物线的标准方程、向量、直线与圆锥曲线的位置关系	导数、奇函数、切线方程	(选做题)相似三角形知识	(选做题)圆与椭圆的参数方程、直线与椭圆的位置关系	(选做题)分段函数的图象、利用图象解不等式	
江苏卷	三角函数定义、两角和的正切、二倍角的正切	线面、面面位置关系	函数表达式和最值	二次函数图象和性质、圆的方程	等差数列与等比数列	充要条件、指数函数、含绝对值的函数	(选做题)A. 三角形、圆的知识;B. 曲线在矩阵变化下的特点;C. 曲线的参数方程;D. 均值不等式	空间向量的基本知识和运算	组合数、二项式定理、导数、积分

以江苏卷为例(括号中前面数字是题号,后面是考查的知识点):

卷 1:集合(4. 集合的运算和解一元二次不等式),函数(14. 函数单调性及恒成立问题;17. 函数最值的应用;20. 充要条件、指数函数与绝对值、不等式的综合运用),立体几何(16. 线面平行、面面垂直),直线与圆(18. 二次函数图象与性质、圆的方程),三角(1. 三角函数的周期;13. 三角形面积公式;15. 三角函数的定义、两角和的正切、二倍角的正切公式);平面向量(5. 向量的线形运算),算法,概率(2、6 古典概型),统计(7. 统计与算法),数列(10. 等差数列求和归纳推理;19. 等差数列与等比数列的综合运用),不等式(11. 二元基本不等式的运用),圆锥曲线(12. 椭圆的基本量和直线与圆相切的位置关系),导数(8. 导数的几何意义),推理与证明(9. 直线方程的求法和归纳推理),简易逻辑,复数(3. 复数的除法运算).

卷 2(附加题):选做题(A. 选修 4—1 几何证明选讲　B. 选修 4—2 矩阵与变换　C. 选修 4—4 参数方程与极坐标　D. 选修 4—5 不等式证明选讲);必做题(22. 立体几何和代数知识联合;23. 三角函数、导数、二项式定理等多个知识联合).

从以上考查的知识点分布情况不难发现,今年首次实行新课程高考的江苏卷和其他课改区以及还在延续老教材省区高考一样,其命题规律与全国自 2000 年高考以来,不侧重知识点面面俱到的思路仍相吻合.

[redacted]

2008年高考数学新课程卷体现了数学新课程的理念，关注了不同版本的教材，关注了必修和选修的比例和文理试卷的差异，以达到支持新课程改革，进一步深化和正确引导中学数学教学的目的．例如山东理科试卷中第7、8、18题等都是有着不同应用背景的题目，尤其是理科第19题，大胆地改革了传统数列的命题模式，用古朴典雅的题目考查应用意识．今年的新课程卷中体现数学应用，关注社会生活的试题还有不少，再如江苏卷第19题以污水处理为背景，体现试卷设计问题背景的公平性，对推动数学教学中关注身边的数学起到良好的导向作用；第17题考查的是与最小距离有关的一个实际问题，重点考查考生对现实问题的数学理解．山东卷及海南、宁夏卷对新课程中增加的内容：函数的零点、三视图、算法框图、概率等进行了系统的考查．与去年相比，广东卷今年对新增内容的考查明显加大了力度，如三视图、命题、算法线性规划等一些新增内容都得到了体现．江苏卷在新课标增加内容的考核上力度也较大：复数分值在5分(小题)，考查复数的加减乘除运算；统计与算法初步，分值在5分(小题)，要理解流程图中每个符号的意义并作简单计算和判断；古典概型和几何概型各一题，两小题分值在10分，概率考查学生应用概率知识解决实际问题的能力；推理与证明和数列联合出题，体现了推理与证明运用的过程．新增内容的分值总分超过了25分，超过了对应课时所占的分值比例，也符合以考促教的精神．

[redacted]

上述表2、表3、表4已经明确显示，2008年高考数学新课程卷全面考查了2008年考试大纲及对应省的考试说明中各部分内容，可以说教材中各章的内容都有所涉及，如复数、旋转体、随机变量及其分布、概率等教学课时较少的内容，在试卷中也都有所考查．在全面考查的前提下，重点考查了高中数学知识的主干内容，如函数、三角函数、不等式、数列、直线与平面、圆锥曲线等仍是支撑这几份试卷的主体内容．尤其是在每份试卷的6个解答题中，每题所涉及的具体内容都是高中数学的重点内容，要求层次恰当，大多数试题既有常规解法，同时在知识的应用上又有一定的灵活性．一些试题在考查的题型、情景设置、设问方式等方面也体现了稳中有变的设计思路．

(1)4套新课程卷均遵循了2008年高考数学考试大纲及对应省的考试说明的各项要求，坚持以能力立意的指导思想，充分发挥了数学作为基础学科的作用，立足基础，使知识考查切实服务于能力考查，保障了高考突出能力与学习潜能考查的要求．例如山东卷文科第10、12题，理科第11、12题，只有在较强的转化能力的基础上才能发现问题的实质，突出了能力考查的要求．广东卷理科第18题、文科第20题综合了椭圆、抛物线、圆、直线、函数、导数、平面向量、直角三角形等多块知识，联合考查了数形结合、分类与整合、函数与方程等数学思想方法，以及推理论证能力、运算能力和创新意识，其中第(Ⅱ)问设计了探究性的问题，以此来考查学生的探究能力，而探究能力正是新课程教学的重点．还有对“创新意识”的考查，无论对命题者还是对老师教学而言，把握都不容易，以往基本保持了回避的态度，应该说2008年的新课程卷在这方面进行了一些尝试，这一尝试从思路及难度而言还是比较成功的．如江苏卷第17题第(Ⅰ)问先建立两个函数关系式，第(Ⅱ)问从

第(Ⅰ)问中选一个关系式求函数最值,进行横向探究,既照顾到了考生的实际,也使问题变得比较平缓;第19题,对数列进行从特殊到一般的纵向探究;附加卷第23题,用导数与积分方法证明,这是高等学校常用的一种方法,设置时先通过一个样板来减缓难度,以此来考查继续学习的潜能.

(2) 考查重点立足基础.试题特别注重考查高中数学的基础知识,但并不刻意追求知识的覆盖率,着重考查了支撑学科知识体系的知识主干,以重点知识为主线组织全卷的内容,对重点知识的考查力求深入和综合.例如,山东卷代数重点考查了函数的基本概念、性质和图象等,如理科第3、4、14、17、21题;解析几何重点考查了直线和二次曲线的位置关系,如理科第22题;立体几何仍以多面体的有关线面关系和角为考查重点,如理科第20题.

再如江苏卷第4题将集合与不等式有机地结合在一起考查,不是单独地考查集合的基本运算或不等式的解法;第7题将统计与算法结合在一起考查,这是吸取了2007年高考广东试题的经验;第9题,通过类比b、c相互"代换"来考查证明中常用的术语"同理"的内涵及过程,以此来反应推理能力;第14题,对应了新课标要求中突出函数图象的作用.这种渗透性考查贯彻了2001年以来全国高考命题的"重点内容重点考查,非重点内容(与模拟及考试说明样题)反向操作并适当串串门"的思路.

另外江苏卷对考试说明的C级要求全部考到:基本不等式、一元二次不等式、直线方程、圆的方程、三角公式、等差数列、等比数列、向量的数量积等知识点在试卷中均以不同形式进行了考核,而且要求考生能综合运用这些知识.

(3) 综合考查基础知识,还体现在新旧内容的结合上,体现在使用新观点、新方法来解决传统问题上,体现在函数与导数的综合、用导数的方法研究解决函数的单调性与最大值及最小值等问题,如立体几何解答题的命制,在试卷中仍采用了"一题两法"(传统解法和向量解法)的命制办法.再如江苏卷必答题第26题虽是老题新编,但能与时俱进,把导数知识与之相结合,利用类比推理的方法去解决,具有很强的创新性.

(4) 综合性试题以知识网络的交汇点作为设计的起点和着力点,力图实现全面考查数学基础和数学素质的目标.如山东卷文、理科第21题是函数的解答题,考查导数有关的概念、计算和应用.利用导数工具研究函数的有关性质,不仅体现教材改革的一种理念,也是初等数学与高等数学一个很好的衔接点.该题解法中应用到了函数与方程思想,转化与化归思想,分类与整合思想都是考试大纲要求较高的思想方法.该题达到了知识内容考查与思想方法考查相结合的目的;文科第22题是解析几何的解答题,综合、全面地考查了直线与椭圆的位置关系,通过用代数的方法,处理几何问题的深入考查,使函数、方程和不等式与解析几何的内容有机结合.该题具备了较强的综合性,有效地考查了考生综合运用知识、分析问题和解决问题的能力以及理性思维的能力.其他新课程卷也如此,如江苏卷第13、14题,第19题第(Ⅰ)问中的第②小问,第19题、20题两题的第(Ⅱ)问难度大,考生难于理解;广东卷第21题将二次方程和数列综合起来考查;海南、宁夏卷第21题将函数和曲线等知识交汇考查,有一定新意和难度.这几道题对综合能力要求较高,重点考查了考生进一步学习的潜能,有利于高校选拔人才.

(5)2008年新课程卷难度与2007年相比有所加大,但层次分明.试卷在三种题型中体

现出明显的层次性，选择题、填空题、解答题，层层递进．例如山东卷理科的选择题第1～11题，着重考查了基础知识、基本技能，第12题考查了学生的理性思维能力和分析问题、解决问题的能力；填空题第16题考查了不等式的整数解问题，要求稍高．解答题基本上是一题多问，入口容易；第21、22题是把关题，对思维能力，尤其是理性思维有较高要求．考查的试题就比较灵活，体现了"注重考查能力，考查数学思想，突出理性思维"的基本指导思想．如果学生解题方法单一，思路狭窄，不善于联想思维，就会浪费很多时间，可能还会有不少错误，直接影响试卷的顺利解答．特别是选择题和填空题不是解答题，小题应该不必大做．事实上，现在数学理性思维的考查越来越体现在其中，解答选择题和填空题也需要解题机智．下面以江苏卷填空题后6题（相对前8题较难些）为例做详细剖析，如：

【第9题】 如图1，在平面直角坐标系 xOy 中，设 $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(0,a)$、$B(b,0)$、$C(c,0)$，点 $P(0,p)$ 在线段 AO 上（异于端点），这里 a、b、c、p 为非零常数．设直线 BP、CP 分别与边 AC、AB 交于点 E、F．某同学已正确算出 OE 的方程：$\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$，请你完成直线 OF 的方程：(　　) $x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$．

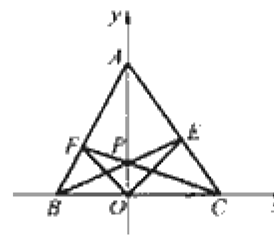


图1

解析 本题主要考查直线方程的求法．直线方程的要求为C级，有一定难度．如果将 CP 和 AB 的方程联立，求点 F 坐标，计算量会很大，且不易算出．

解法1 可画出图形，由给出的 OE 方程，可猜想 OE、OF 的斜率存在某种特殊的关系，如互为相反数等，可猜想填：$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$．事实上，由截距式可得直线 AB：$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$，直线 CP：$\frac{x}{c}+\frac{y}{p}=1$，两式相减得 $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)x+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)y=0$，显然直线 AB 与 CP 的交点 F 满足此方程，又原点 O 也满足此方程，故为所求直线 OF 的方程，所以猜想正确．

解法2 实际上 E、F 仅仅是横坐标不同，一个为 c，另一个为 b，从而所得到的 OF 的方程也就是原 OE 的方程中 b、c 互换．

【第10题】 将全体正整数排成一个三角形数阵：

$$\begin{array}{c}1\\2\quad 3\\4\quad 5\quad 6\\7\quad 8\quad 9\quad 10\\\cdots\end{array}$$

根据以上排列的规律，数阵中第 $n(n\geqslant 3)$ 行的从左至右的第3个数是________．

解析 有的考生可能从关注每一行的第一个数入手，构成二阶等差数列，然后用叠加的方法求出通项，这当然可以，但是，明显增加了解题时间，小题大做了．放眼全局，前 $n-1$ 行共有正整数 $1+2+\cdots+(n-1)$ 个，即 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个，因此第 n 行第3个数是全体正整数中第 $\frac{n(n-1)}{2}+3$ 个，即为 $\frac{n(n-1)}{2}+3$．

【第11题】 设 x、y、z 为正实数，满足 $x-2y+3z=0$，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值是________．

解析 只要抓住条件和式子结构，准确消元即可．将原式变为只有两个变量的关系处理较简单，由 $x-2y+3z=0$ 得 $y=\frac{x+3z}{2}$，代入 $\frac{y^2}{xz}$，得 $\frac{x^2+9z^2+6xz}{4xz}\geqslant\frac{6xz+6xz}{4xz}=3$，当且仅当 $x=3z$ 时等号成立，所以 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值为3．

【第12题】 在平面直角坐标系 xOy 中，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2c$．以点 O 为圆心，a 为半径作圆 M，若过点 $P\left(\frac{a^2}{c},0\right)$ 所作圆 M 的两切线互相垂直，则该椭圆的离心率为______．

解析 有的考生通过求切线方程和切点坐标来找 a 和 c 的关系，而没有注意到图形的本质特征，浪费了很多宝贵时间．画出图形，设切线 PQ、PK 互相垂直，由切线性质很容易得到四边形 $MKPQ$ 是正方形，边长为 a，对角线长 $\frac{a^2}{c}$，故 $\frac{a^2}{c}=\sqrt{2}a$，解得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

【第13题】 满足条件 $AB=2$，$AC=\sqrt{2}BC$ 的 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是______．

解析 从条件看和解三角形有关，于是有的考生从正弦、余弦定理入手，结合不等式入手，给出如下解法：设 $BC=x$，则 $AC=\sqrt{2}x$，由面积公式得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=x\sqrt{1-\cos^2 B}$，根据余弦定理得 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4+x^2-2x^2}{4x}=\frac{4-x^2}{4x}$，代入上式得

$$S_{\triangle ABC}=x\sqrt{1-\left(\frac{4-x^2}{4x}\right)^2}=\sqrt{\frac{128-(x^2-12)^2}{16}}$$

由三角形三边关系有 $\begin{cases}\sqrt{2}x+x>2\\x+2>\sqrt{2}x\end{cases}$，解得 $2\sqrt{2}-2<x<2\sqrt{2}+2$，故当 $x=2\sqrt{3}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取得最大值 $2\sqrt{2}$．这样做，绝大多数考生在短时间内是难以完成的，或根本不敢往下做．面积的表达式太复杂，次数又高，只好放弃．换一个角度，用解析法较好（一般学生不易想到）．回归过去，用我们很早就熟悉的三角形面积公式 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot h$，$h$ 为 AB 边上的高，求 h 的最大值，转化为求点 C 轨迹即可．于是以边 AB 所在直线为 x 轴，边 AB 的中点为坐标原点，建立平面直角坐标系．根据 $AC=\sqrt{2}BC$，列方程，很容易求得 C 的轨迹方程为 $(x-3)^2+y^2=8$（除去与直线 AB 的两个交点），可见顶点 C 到边 AB 的最大距离为 $2\sqrt{2}$，从而 $S_{\triangle ABC}$ 最大值 $2\sqrt{2}$．这种解法计算量要少很多，其解题难度也大大降低．

【第14题】 设函数 $f(x)=ax^3-3x+1(x\in\mathbf{R})$，若对于任意 $x\in[-1,1]$，都有 $f(x)\geqslant 0$ 成立，则实数 a 的值为______．

解法1 求不等式恒成立问题，一般的方法就是分离变量，转化为求函数的最值问题．因此本题容易找到解题思路，但不易上手，难在不知道要对 x 进行分类讨论，如何通过单调性的讨论来求最值．

(1) 若 $x=0$，则不论取何值，$f(x)\geqslant 0$ 显然成立．

(2) 当 $x>0$ 即 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant 0$ 可化为 $a\geqslant\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$．设 $g(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，则 $g'(x)=\frac{3(1-2x)}{x^4}$，所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减．因此 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=4$，从而 $a\geqslant 4$．

(3) 当 $x<0$ 即 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant 0$ 可化为 $a\leqslant\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，$g'(x)=\frac{3(1-2x)}{x^4}>0$，$g(x)$ 在区间 $[-1,0)$ 上单调递增，因此 $g(x)_{\min}=g(-1)=4$，从而 $a\leqslant 4$，所以 $a=4$．

解法2 也可通过研究函数 $f(x)=ax^3-3x+1$ 本身的性质，如单调性、极值等，再讨论区间 $[-1,1]$ 和单调区间的关系，从而找到 a 所满足的条件．显然，$a=0$ 不符合题意．令 $f'(x)=3ax^2-3=0$，得 $x^2=\frac{1}{a}$．由于 $a\neq 0$，$f(x)=ax^3-3x+1$ 一定有极值点，故 $a>0$，则 $f(x)=ax^3-3x+1$ 在 $\left[-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right]$ 递减，在 $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{a}}\right]$ 及 $\left[\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$ 上增，$f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 为极大值，$f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 为极小值．又 $f(0)=1$，所以

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \geq 1$.

(1) 若 $1 \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$,即 $a \leq 1$,只须 $f(1) \geq 0$,解得 $a = 2$,舍去.

(2) 若 $1 \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$,即 $a > 1$,则只须 $\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \geq 0 \end{cases}$,解得 $a = 4$.

综上可知 $a = 4$.

解法3 另外,有不少考生认为最后一道填空题肯定难,考前可能就做好放弃的准备.其实,即使你不愿意做下去,你也要把题目仔细地看一看、想一想,说不定会在很短的时间内凭直觉思维能"蒙"出来.由于是求 a 的值,一般来说个数是确定的,1个或2个.显然 $a \neq 0$,三次函数 $f(x) = ax^3 - 3x + 1$ 有极值,令 $f'(x) = 3ax^2 - 3 = 0$,得 $x^2 = \frac{1}{a}$,所以 $a > 0$.观察 $f(x)$ 的系数,猜 $a = 4$,验证是可以的.至于是否还有其他值,就等你考完试再认真研究吧!这总比放弃不填要好得多吧!所以"蒙"(直觉思维)也可算是一种考试策略.

解法4 用导数知识求解,需讨论且不容易做,将原式变为 $ax^3 \geq 3x - 1$,画 $y = ax^3$ 及 $y = 3x - 1$ 的图象很快可以得到解答,比求导数要快捷得多.

(6) 试卷的入口题和每种题型的入口题都较好地把握了难度.4套文、理科试卷选择题的前5个小题(江苏卷是填空题)基本上着重考查基础知识、基本运算和识别能力.这对稳定考生的心态也有较好的作用.不仅如此,填空题的前2个小题,解答题中的前2个小题也相对容易.较难的解答题采用分步设问、分步给分的设计方法.试卷中后面的几个解答题较难,采用分步设问的办法使其逐步深入,在一定程度上化解了试题的难度.在引导学生正确思维的同时,也给每一个层面的学生提供了施展才华的平台.

[redacted]

突出理性思维和思想方法的考查,倡导通性通法,有效区分不同思维层次的考生.数学思想方法是对数学知识的最高层次的概括与提炼,是适用于中学数学全部内容的通法,是高考考查的核心.在2008年4套新课程卷中都能体现出突出重点,重在通性通法,淡化特殊技巧的特点.

(1) 数形结合的思想方法是试卷考查的一大重点.如山东卷理科第4、12、14题是以无图考图的形式考查数形结合的思想,还有海南、宁夏卷第1题,广东卷文、理第16、20题,理科第18题等.

(2) 方程的思想是试卷重点考查的对象,例如理科解析几何题中的曲线方程及韦达定理的应用都是方程思想最佳体现.又如文、理两科的函数题在求导后判断单调性和极值点时都用到了方程的理论和思想,如广东卷理科第18题、21题,文科第20题等.

(3) 分类与整合的思想在高考中常考不衰.在2008年高考的新课程卷中,尤为突出.如山东卷理科第21题,针对参数的取值对函数单调区间及对函数的极值产生影响的讨论;海南、宁夏卷第24题解不等式中的分段讨论,还有广东卷理科第18、19、21题,文科第20、21题等.

(4) 化归与转化思想也是新课程卷考查的一大重点,如广东卷理科第16、20、21题,文科第16、18、21题等.

还有或然与必然数学思想(广东理科第 17 题等),特殊与一般数学思想(广东卷理科第 21 题等).

(5) 数学解题过程是个体的思维能力作用于数学活动的心理过程,是思维活动. 考生解题的切入点不同,运用的思想方法不同,体现出不同的思维水平. 2008 年新课程卷很好地注意研究题目信息的配置,考虑从不同角度运用不同的思想方法,创设多条解题路径,使不同思维层次的考生都有表现的机会,从而有效地区分出考生不同的数学能力. 例如山东卷理科第 4 题,可以正面判断,也可以用排除法判断. 详见特征四第(5)条.

[redacted]

2008 年新课程卷贴近中学实际,平衡文理试卷难度. 由于考生和教学内容的特殊情况,数学科考试分为文、理两卷. 既保证了数学成绩在文科考试中的权重,又有利于选拔人才. 在能力考查中注意文理科考生的实际情况,文科试卷的难度低于理科,突出共性,反映个性,文理两卷分合明显,体现层次差别,这样的处理方法比较切合中学教学的实际. 广东文科卷还减少了题干的长度,便于学生理解把握.

自从国家有了高考以来,模拟与反模拟的竞争就没有停止过,所以能否既不出纲又有效地防止模拟,还要针对社会对此的各种反应,是命题者必须要考虑的问题,甚至有可能成为社会对高考试题评价的标准. 做到这点的确不易,可喜的是 2008 年高考部分新课程卷在这种艰难的情况下做到了这一点. 如立体几何几年来的难度都是"不难",带来的模拟及课堂也是坚持"不难"的惯性,但今年的江苏卷第 16 题第(2)问应该说,还是有难度的;在模拟试题中,数列与不等式模拟难度往往是"超标"、"失控",但今年江苏卷第 10、19 题并没有那么难;在数学附加卷中,由于多年的惯性使然,模拟常常在数学归纳法上下很大功夫,但这次根本没有在此方面命题.

如江苏卷第 18 题"对于一元二次方程的根是两个相等的根还是一个实数根"就存在争议,该试卷采用了"二次函数 $f(x)=x^2+2x+b$ 与两个坐标轴有三个交点,过此三个点的圆为 C"来说明是与 x 轴有两个不同的交点;附加卷第 22 题,习惯的思路重点是用"法向量"法求二面角的平面角,但法向量所成的角与二面角的平面角是相等还是互补的关系是比较难于确定的一个问题,该题设置为两个向量的成角而求一个参数 λ 的范围来回避争议.

[redacted]

2007 年高考广东卷,海南、宁夏卷在文、理试卷中均首次尝试设计了选做题,2008 年广东,海南、宁夏卷此举风格依旧,江苏卷又增加了附加题,这些都充分体现了数学新课程"适应个性选择"的基本理念,这种变化无论以什么形式体现,都反映了新课程背景下数学高考命题的一种走向,值得我们关注!

[redacted]

1. 提升综合素质

因为数学不光是要求学生了解知识、了解概念,更多的时候是体现了一种思维,它是

对人思维能力的一个训练.所以,思维往往与对问题的了解是否深入、看问题是否看到实质,给出正确的判断和采用适合的方法去解决问题有很大关系.所以,教师在复习课教学中,不应该就题论题,就题解题,应该提高学生解题的技术含量.有些考题在考前很多学校的复习资料中就出现过的,但是这样的试题在高考时还是做得不好,究其原因就是有些老师处理问题的时候光想以题代替方法,很少注意在解题过程中学生得到什么,结果学生只解决对和不对,但却根本不懂.因此要注意认真研究复习课的教学,提高课堂效率,例如对一套试卷的评讲,应包括以下基本项目:

① 本题考查了哪些知识点?② 怎样审题?怎样打开思路?③ 主要运用了哪些方法和技巧?关键步骤在哪里?最本质的步骤有哪些?④ 指出学生答题中的典型错误,分析其知识、逻辑上、心理上和策略上的原因;⑤ 介绍、表扬学生中的优秀、新颖解法;⑥ 试题评分标准及分步得分要领;⑦ 应试策略和技巧;⑧ 题目的纵横联系,等等.

2. 深化教学改革

从2007、2008两年新课程高考的试题中可以看出,对学生的探究能力、思辨能7力、求新思维等提出了要求,课程的内容一定要与社会及生活联系起来,教师要帮助学生在社会发展的背景中思考问题,要注重夯实基础和学生动手能力的培养,同时要培养学生思考的深度和学习的意志品质.

新课程高考试题对推进素质教育,对学生全面发展和教学的导向性很明显.高中数学教师要多研究课程,在教学管理中,必须有一些办法,如集体备课要更加发挥群体智慧.学生用一本教材,但是教师不能只用一本教材,教师必须广泛阅读,大量涉猎,才能组织好教学.课程改革不仅要坚持,而且要深化;课程改革不仅要在教材上下功夫,而且要在课程设置、课程结构调整及实施的科学性上动脑筋.高考要求学生要关注时政、关注社会、关注生活,教师就得改变观念,先行一步,只有在大的社会背景下考虑教学与备考,才能跟得上新课程高考的步子,也才能在高考中胜出.

（七）近几年全国高考数学热点题型完全检索

1. 函数定义域与值域的性质
2. 原函数与反函数的关系
3. 利用函数的周期性求函数值
4. 函数的奇偶性及单调性
5. 函数与方程的综合应用
6. 函数的综合应用
7. 一元二次不等式及恒成立问题
8. 均值不等式及其应用
9. 绝对值不等式、分式不等式与简单高次不等式的解法
10. 对数不等式、指数不等式与绝对值不等式的综合
11. 不等式在实际中的应用
12. 利用导数研究函数的单调性
13. 利用导数研究函数的极值和最值
14. 导数与不等式恒成立问题
15. 利用导数证明不等式
16. 利用导数研究方程的根
17. 导数在实际中的应用
18. 等差数列、等比数列的性质
19. 等差数列、等比数列的通项公式的求法
20. 判断或证明一个数列是等差(比)数列
21. 等差数列、等比数列的求和
22. 等差(比)数列前几项和的最(极)值
23. 数列与方程、函数的综合应用
24. 数列与不等式的综合应用
25. 数列与极限的综合应用
26. 数列与导数的综合应用
27. 数列与其他知识的综合应用
28. 与数列有关的应用题
29. 与数列有关的新信息问题
30. 数列的极限
31. 函数的极限
32. 极限的综合应用

33. 极限的创新问题
34. 数学归纳法的应用
35. 归纳、猜想、证明(用数列归纳法证明探索性问题)
36. 已知三角函数求值
37. 非特殊角的求值与化简
38. 三角函数与扇形的综合计算
39. 利用正弦定理和余弦定理解决三角形面积问题
40. 利用正余弦定理判断三角形的形状
41. 向量与解三角形的综合应用
42. 三角函数图象的平移与伸缩变换
43. 三角函数的图象与解析式
44. 三角函数的单调性、周期性以及最值
45. 轴对称和中心对称问题
46. 三角函数与向量的综合运算
47. 直线的倾斜角与斜率
48. 两条直线的平行与垂直关系
49. 两条直线的夹角及点到直线的距离
50. 与直线有关的对称问题
51. 简单的线性规划及应用
52. 曲线方程与轨迹问题
53. 直线与曲线的交点问题
54. 直线与圆的位置关系
55. 圆锥曲线的第一定义与标准方程
56. 圆锥曲线的第二定义及应用
57. 圆锥曲线的离心率及双曲线的渐近线
58. 直线与圆锥曲线的位置关系
59. 与圆锥曲线有关的综合应用问题
60. 向量的基本运算及应用
61. 与向量有关的垂直与平行问题
62. 定比分点公式的应用
63. 用向量的平移公式平移函数图象
64. 向量与解析几何的综合问题
65. 几何体的相接、相切、割补问题
66. 折叠问题
67. 展开问题
68. 射影问题
69. 截面问题
70. 证明空间中的一些位置关系

71. 利用空间向量求空间角和距离
72. 利用空间向量求解探索性问题
73. 排列、组合基本问题
74. 排列、组合综合问题
75. 二项式定理
76. 二项式定理的综合应用
77. 概率基本问题
78. 概率综合问题
79. 随机变量的分布列、数学期望、方差及其应用
80. 抽样方法、频率分布直方图
81. 正态分布
82. 复数的计算

(八)全国高考数学基础知识考前130问
——大纲版,适合高考前一个月学生使用

1. 研究集合问题,一定要抓住集合的代表元素,如$\{x \mid y = \lg x\}$,$\{y \mid y = \lg x\}$和$\{(x,y) \mid y = \lg x\}$三者的差别.

2. 进行集合的交、并、补运算时,不要忘了集合本身和空集的特殊情况,不要忘了借助于数轴和文氏图进行求解.

3. 你会用补集的思想解决有关问题吗?

4. 映射的概念了解了吗?映射:$f: A \to B$中,你是否注意到了A中元素的任意性和B中与它对应元素的唯一性?

5. 映射与排列组合小题是否会做?

6. 求不等式(方程)的解集,或求定义域时,你按要求写成集合形式了吗?

7. 求一个函数的解析式或一个函数的反函数时,你注明函数的定义域了吗?

8. 求一个函数的反函数时,你是按照"先求反函数,后求值"这条原则解题的吗?例如,已知$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,求$f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

9. 几种命题的真值表记住了吗?充要条件的概念记住了吗?

10. 不等式$|ax + b| < c$,$|ax + b| > c(c > 0)$的解法掌握了吗?$|f(x)| > g(x)$与$|f(x)| > g(x)$如何解?

11. 三个二次(哪三个二次)的关系及应用掌握了吗?

12. 如何利用二次函数求最值?注意到对二次项系数进行讨论了吗?

13. 特别提醒:二次方程$ax^2 + bx + c = 0$的两根即为不等式$ax^2 + bx + c > 0(< 0)$解集的端点值,也是二次函数$y = ax^2 + bx + c$的图象与x轴的交点的横坐标.

14. 求反函数的步骤掌握了吗?(①反解x;②互换x、y;③注明定义域(此定义域如何求?)原函数$y = f(x)$在区间$[-a, a]$上单调递增,则一定存在反函数,且反函数也单调递增;但一个函数存在反函数,此函数在整个定义域内不一定单调,如分段函数$f(x) = \begin{cases} 1 + x(x \geqslant 0) \\ -x(x < 0) \end{cases}$.

15. 判断函数的奇偶性时,注意到定义域的特点了吗?(关于原点对称这个必要非充分条件)

16. 函数单调性的证明方法是什么?(定义法、导数法)$f(x)$、$g(x)$在$[a, b]$都是增函数,$f(x) - g(x)$是否为增函数?

17. 特别注意函数单调性与奇偶性的逆用了吗?(①比较大小;②解不等式;③求参数的范围)

18. $y = x + \frac{p}{x}(p > 0)$的图象及单调区间掌握了吗?如何利用它求函数的最值?与利用不等式求函数的最值的联系是什么?

19. 研究函数问题注意到“数形结合”了吗?

20. 研究函数的性质注意在定义域内进行了吗?

21. 解对数函数问题时注意到真数与底数的限制了吗?

22. 指数、对数函数的图象与性质明确了吗?

23. 你还记得对数恒等式($a^{\log_a N} = N$)和换底公式吗?

24. 三角函数(正弦、余弦、正切)图象的草图能迅速画出吗?能写出它们的单调区间及其取最值时的 x 值的集合吗?(别忘了 $k \in \mathbf{Z}$)

25. 三角函数中的和、差、倍、降次公式及其逆用、变形都掌握了吗?

26. 会用五点法画 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的草图吗?哪五点?会根据图象求参数 A、ω、φ 的值吗?

27. 正弦定理、余弦定理的各种表达形式你还记得吗?会用它们解斜三角形吗?如何实现边角互化?

28. 你对三角变换中的几大变换清楚吗?(① 角的变换:和差、倍角公式;② 名的变换:切割化弦;③ 次的变换:升、降次公式;④ 形的变换:统一函数形式)

29. 在三角函数中求一个角时,注意考虑两方面了吗?(先求出某一个三角函数值,再判定角的范围)

30. 形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, $y = A\tan(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期会求吗?有关周期函数的结论还记得多少?

31. $y = a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \varphi)$ 的用途掌握了吗?

32. 在解含有正余弦函数的问题时,你深入挖掘正余弦函数的有界性了吗?

33. 以下几个结论你记住了吗?① 如果函数 $f(x)$ 的图象同时关于直线 $x = a$ 和 $x = b$ 对称,那么函数 $f(x)$ 是周期函数,周期是 $T = 2|a - b|$;② 如果函数 $f(x)$ 满足 $f(x - a) = f(x - b)$,那么函数 $f(x)$ 是周期函数,周期是 $T = 2|a + b|$;③ 如果函数 $f(x)$ 的图象既关于直线 $x = a$ 成轴对称,又关于点 (b, c) 成中心对称,那么函数 $f(x)$ 是周期函数,周期是 $T = 4|a - b|$.

34. 三角不等式或三角方程的通解一般式你注明 $k \in \mathbf{Z}$ 了吗?

35. 你还记得弧度制下的弧长公式和扇形公式吗?($l =$ ________, $S =$ ________.)

36. 在用反三角表示直线的倾斜角、两条直线所成的角、二面角的平面角、直线与平面所成的角时,是否注意到了它们的范围?

37. 常用的图象变换有几种(平移、伸缩和对称)?具体变换步骤还记得吗?

38. 平面向量的基本定理、空间向量的基本定理各是什么?把定理的思想作为向量法解题的基本思想运用到解法之中了吗?

39. 什么叫模、两向量的夹角?如何求模?[(1) $|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$;(2) 坐标方法.]

40. 如何求两向量的夹角?(夹角公式)

41. 两向量垂直、平行的充要条件是什么?

42. a 在 b 上的投影是如何定义的?射影是如何定义的?

43. 向量之间的运算符合什么"运算律","内积"与平常的乘法有什么不同与相同、几何意义是什么?

44. 数乘 λa 在几何上如何解释?向量加、减在几何上如何解释?

45. 什么叫 e_1、e_2 共线?其共线的充要条件是什么?

46. 如何判定 A、B、C 三点共线?

47. 零向量的定义是什么?长度?方向?零向量与任意 a(非零)是否平行?垂直?零向量的书写规则是什么?

48. 线段定比分点公式记住了吗?λ 的取值及符号与分点 P 和P_1P_2 的位置有何关系?

49. 斜三角形的三大公式,正弦、余弦、面积、三角形的存在性,余弦定理中角的大小判断,这些课本基本内容是否清晰?解三角形少用正弦值的道理在哪里?

50. 重要不等式是指哪几个不等式?由它们推出的不等式链是什么?

51. 不等式证明的基本方法都掌握了吗?(比较法、分析法、综合法、数学归纳法)

52. 利用重要不等式求函数的最值时,是否注意到:① 都是正值;② 等号成立;③ 其中之一为定值.

53. 不等式解集的规范格式是什么?(一般要写成区间或集合的形式)

54. 解分式不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)} > a(a \neq 0)$ 应注意什么问题?(不能去分母而要移项通分)

55. 解含参数不等式怎样讨论?注意解完之后要写上:"综上,原不等式的解集是……"

56. 诸如 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,求 a 的范围,你讨论二次项函数系数为零了吗?

57. "序轴标根法"解不等式的注意事项是什么?

58. 会用不等式 $|a|-|b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|$ 证一些简单问题吗?

59. 不等式恒成立问题有哪几种处理方法?

60. 等差、等比数列的重要性质有哪些?(等差:$m+n=p+q \to$ ________;等比:$m \cdot n = p \cdot q \to$ ________.)

61. 用等比数列求前 n 项和时应注意什么?(当 $q=1$ 时,$S_n=$ ________;当 $q \neq 1$ 时,$S_n=$ ________.)

62. 数列求和中的错位相减法,拆项叠加相消法掌握了吗?还有哪些求和方法?

63. 由 $a_n = S_n - S_{n-1}$,求数列通项时注意到 $n \geqslant 2$ 了吗?

64. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Leftrightarrow$ ________($|q|<1$)掌握了吗?若 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ 存在,q 满足什么条件?($|q|<1$ 或 $q=1$)若 q 是公比,还要注意什么?($q \neq 0$)

65. 求无穷数列和(积)的极限时,你是"先求数列和(积),后取极限"的吗?

66. 在数学归纳法的证明中,把归纳假设当已知条件用了吗?

67. 复数相等的充要条件 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d(a、b、c、d \in \mathbf{R})$.

68. 立何几何中平行、垂直关系证明的思路明确了吗?每种平行、垂直转换的条件是什么?(线 // 线 $\Leftrightarrow$ 线 // 面 $\Leftrightarrow$ 面 // 面,线 $\perp$ 线 $\Leftrightarrow$ 线 $\perp$ 面 $\Leftrightarrow$ 面 $\perp$ 面)

69. 作二面角的平面角的主要方法是什么?(定义法、三垂线定理、垂面法)

70. 求线面角的关键是什么?(找直线的射影) 范围是什么?

71. 异面直线所成的角如何求?范围是什么?

72. 如何用向量法求异面直线所成的角、线面角、二面角的平面角?并且应注意什么问题?

73. 平移公式记准确了吗?平移前函数的解析式、平移向量、平移后函数的解析式,三者知二求另外一个.

74. 能否利用平移公式写出非标准形式圆锥曲线的焦点、准线方程?

75. 函数图象按向量平移与平常"左加右减"有何联系?

76. 向量平移具有坐标不变性,可别忘了啊!

77. 直线的斜率公式、点到直线的距离公式、到角公式、夹角公式记住了吗?

78. 何为直线的方向向量?直线的方向向量与直线的斜率有何关系?

79. 在用点斜式、斜截式求直线方程时,你是否注意到不存在的情况?

80. 直线和圆的位置关系利用什么方法判定?(圆心到直线的距离与圆的半径的大小比较)

81. 直线与圆锥曲线的位置关系怎样判断?

82. 利用圆锥曲线第二定义解题时,你是否注意到定义中的定比前后项的顺序?

83. 用圆锥曲线方程与直线方程联立求解时,在得到的方程中你注意到这一条件了吗?注意到要讨论二次项系数是否为零吗?圆锥曲线本身的范围你注意到了吗?

84. 解析几何问题求解中,平面几何知识利用了吗?题目中是否已经有坐标系了,是否需要建立直角坐标系?

85. 截距是距离吗?"截距相等" 意味着什么?

86. 解析几何中的对称问题有哪几种?(中心对称、轴对称) 分别如何求解?

87. 弦长公式记住了吗?

88. 圆锥曲线的焦半径公式分别是什么?会推导吗?如何应用?

89. 换元的思想、逆求的思想、从特殊到一般的思想、方程的思想、整体的思想都做好准备了吗?

90. 解应用题应注意的最基本要求是什么?(审题,找准题目中的关键词,设未知数,列出函数关系式,代入初始条件,注明单位,写好答语)

91. 二项展开式的通项公式是什么?它的主要用途有哪些?二项式系数的相关结论有哪些?

92. 隔板法还记得吗?哪些问题可用此法?

93. 数列极限描述了数列的一种什么性质? $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 各是什么意思?

94. 什么叫极限不存在?试举出两种极限不存在的例子.

95. 什么叫无穷递缩等比数列? $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=$? S 与 S_n 的区别与联系?如何用此解决循环小数化分数的问题?

96. 极限四则运算有哪些法则,其中有什么限制?

97. 极限运算中出现不定式有哪些，如何化解(常用手段)？

98. 函数极限有$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，几何上有何意义？$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$如何影响图形的走向？$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在与否如何影响$y=f(x)$在$x_0$处的图象？

99. 连续性定义是什么？$f(x)$在x_0连续，$f(x)$在$x=x_0$有极限与$f(x)$在x_0可导三者之间有何关系？

100. 函数极限中，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

101. 导数的定义，与函数在点的极限是同一概念吗？有何不同？

102. 导数的物理、几何意义是什么？举例说明.(力与功、位移与时间、速度、加速度、切线斜率、单调性、极值与凸凹性，文科的边际成本)

103. 是否记住了常见函数求导公式(如$y=a^x$，$y=\log_a x$)及四则运算？

104. 复合函数如何求导？

105. 利用连续性了解函数的可去间断点与不可去间断点，总结我们课本中所学各种函数的连续性.

106. 导数为零的点一定是极值点吗？极值点一定是导数为零的点吗？最大(小)值点一定是极值点吗？

107. 掌握闭区间上处处连续函数的最值理论.

108. $y=f(x)$在$[a,b]$上单调增，是否$y'=f'(x)$在$[a,b]$上恒正？(答案是不成立)

109. 理解导函数的概念，能利用导函数的图象形状判断原函数的图象形状吗？

110. 已知原函数的图象，能画出导函数的示意图吗？

111. 分段函数断口处的左、右导数的概念的表达式是什么？

112. 是否知道二阶导数与函数图象凸凹性关系？

113. (文科)边际成本的概念是什么，如何求边际成本？

114. 组合数有哪些公式？你是否都记住了？

115. 二项式定理如何应用于近似计算？

116. 能记住在证明不等式中用二项式定理吗？

117. 知道杨辉三角形吗？

118. 记住了用对立事件的概率来求概率吗？

119. 什么是离散型、连续型随机变量？各用什么方法描述其分布？

120. 离散型分布列的性质是什么？

121. 能否写出二项分布列，什么是二项分布？其期望与方差是什么？

122. 了解二点分布、几何分布，其用途、期望与方差.

123. 随机变量的一次函数$\eta=a\xi+b$，$E\eta$用$E\xi$表出：________，$D\eta$用$D\xi$表出：________.

124. 放回抽样与不放回抽样是如何影响分布列的？

125. “独立”与“互斥”是什么概念，在计算概率时各种情况应如何处理？

126. $E\xi$、$D\xi$、标准差描述ξ的什么性质？

127.频率直方图、累计频率曲线的纵、横坐标分别是什么?它表示什么意义?如何用以解题?

128.什么为总体密度曲线,几何意义是什么?如何用以解题?

129.正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 如何转化为 $N(0,1)$,其中 $\varphi(x_0)$、$F(x_0)$ 是什么意思?$F(x)=\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ 如何用于计算概率?

130.回归直线 $\hat{y}=50+80x$,$\hat{y}$ 是什么,如何用于简单估计、预测?

第三编

专题研究



●对高考数学重点专题的深入研究，应立足于对高中数学教材的基础知识在高考试题中的考查进行分析把握；对思想和方法的指导，应引申概念外围的规律、方法，以及解题思考规律等.

●从多年的教学实践中笔者认为教好、学好数学必须站在系统的角度看问题，勤于思考，正确引导学生运用数学思想方法学习数学，力求一题多解、多解归一(结论唯一)、多题归一(勤于总结)，用“动”的观点思考问题，……，这些对开展我们老师的数学教学、开启学生的数学智慧，掌握科学的数学学习方法、思维规律，提高学习效率等都有很大的帮助.

(一)函数解析式的求法探究

求函数解析式的问题是高考的常考题型，特别是已知 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$，求 $f(x)$ 或 $g(x)$，或已知 $f(x)$ 或 $g(x)$，求 $f[g(x)]$ 或 $g[f(x)]$ 等的解析式的问题，学生在解决这些问题时感到比较棘手，本文对此举例探究.

一、函数性质法

【例1】 已知函数 $f(x)$ 的图象与函数 $h(x)=x+\frac{1}{x}+2$ 的图象关于点 $A(0,1)$ 对称，求 $f(x)$ 的解析式.

解析 设 $f(x)$ 图象上任一点坐标为 (x,y)，点 (x,y) 关于点 $A(0,1)$ 的对称点 $(-x,2-y)$ 在 $h(x)$ 的图象上，所以 $2-y=-x+\frac{1}{-x}+2$，即 $y=x+\frac{1}{x}$，即 $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

点评 本题利用函数图象上点的对称性构式，进而获解.

【例2】 设函数 $f(x)$ 存在反函数，$g(x)=f^{-1}(x)$，$h(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $x+y=0$ 对称，则函数 $h(x)=$（　　）

A. $-f(x)$　　B. $-f(-x)$　　C. $-f^{-1}(x)$　　D. $-f^{-1}(-x)$

解析 要求 $y=h(x)$ 的解析式，实质上就是求 $y=h(x)$ 图象上任一点 $P(x_0,y_0)$ 的横、纵坐标之间的关系. 点 $P(x_0,y_0)$ 关于直线 $y=-x$ 的对称点 $(-y_0,-x_0)$ 适合 $y=f^{-1}(x)$，即 $-x_0=g(-y_0)$. 又 $g(x)=f^{-1}(x)$，所以 $-x_0=f^{-1}(-y_0)\Rightarrow -y_0=f(-x_0)\Rightarrow y_0=-f(-x_0)$，即 $h(x)=-f(-x)$，故选 B.

点评 本题利用函数图象的对称性和反函数的性质求解得出.

【例3】 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，周期 $T=5$，函数 $y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是奇函数，又知 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一次函数，在 $[1,4]$ 上是二次函数，且在 $x=2$ 时，函数取得最小值 -5.（Ⅰ）证明：$f(1)+f(4)=0$；（Ⅱ）试求 $y=f(x),x\in[1,4]$ 的解析式；（Ⅲ）试求 $y=f(x)$ 在 $[4,9]$ 上的解析式.

解析 （Ⅰ）因为 $y=f(x)$ 是以 5 为周期的周期函数，所以 $f(4)=f(4-5)=f(-1)$，又 $y=f(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是奇函数，所以 $f(1)=-f(-1)=-f(4)$，所以 $f(1)+f(4)=0$.

（Ⅱ）当 $x\in[1,4]$ 时，由题意，可设 $f(x)=a(x-2)^2-5(a\neq 0)$，由 $f(1)+f(4)=0$，得 $a(1-2)^2-5+a(4-2)^2-5=0$，解得 $a=2$，所以 $f(x)=2(x-2)^2-5(1\leqslant x\leqslant 4)$.

（Ⅲ）因为 $y=f(x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是奇函数，所以 $f(0)=-f(-0)$，所以 $f(0)=0$，又 $y=f(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 是一次函数，所以可设 $f(x)=kx(0\leqslant x\leqslant 1)$.

因为 $f(1)=2(1-2)^2-5=-3$，$f(1)=k\cdot 1=k$，所以 $k=-3$.

所以当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-3x$，当 $-1\leqslant x<0$ 时，$f(x)=-3x$.

当 $4\leqslant x\leqslant 6$ 时，$-1\leqslant x-5\leqslant 1$，所以 $f(x)=f(x-5)=-3(x-5)=-3x+15$.

当 $6<x\leqslant 9$ 时，$1<x-5\leqslant 4$，$f(x)=f(x-5)=2[(x-5)-2]^2-5=2(x-7)^2-5$.

所以 $f(x)=\begin{cases}-3x+15, & 4\leqslant x\leqslant 6\\ 2(x-7)^2-5, & 6<x\leqslant 9\end{cases}$.

点评 本题利用函数的奇偶性和周期性求解得出.

2.定义法

【例4】 已知 $f(2-\cos x)=\cos 2x+\cos x$,求 $f(x-1)$.

解析 $f(2-\cos x)=2\cos^2 x-\cos x-1=2(2-\cos x)^2-7(2-\cos x)+5$

所以 $f(x)=2x^2-7x-5(1\leqslant x\leqslant 3)$,即 $f(x-1)=2x^2-11x+14(2\leqslant x\leqslant 4)$.

【例5】 若 $f(\sin x)=2-\cos 2x$,则 $f(\cos x)$ 等于(　　).

A. $2-\sin 2x$　　B. $2+\sin 2x$　　C. $2-\cos 2x$　　D. $2+\cos 2x$

解析 因为 $f(\sin x)=2-(1-2\sin^2 x)=1+2\sin^2 x$,所以 $f(\cos x)=f[\sin(\frac{\pi}{2}-x)]=1+2\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)=1+2\cos^2 x=2+\cos 2x$.故选 D.

点评 例4、例5都是由已知条件 $f[g(x)]=F(x)$,先将 $F(x)$ 改写成为 $g(x)$ 的表达式,然后以 x 代 $g(x)$,便得 $f(x)$ 的表达式.

3.换元法

【例6】 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$,则 $f(x)$ 的解析式可取为(　　)

A. $\frac{x}{1+x^2}$　　B. $-\frac{2x}{1+x^2}$　　C. $\frac{2x}{1+x^2}$　　D. $-\frac{x}{1+x^2}$

解析 令 $\frac{1-x}{1+x}=t$,则 $x=\frac{1-t}{1+t}$,所以 $f(t)=\frac{2t}{t^2+1}$,所以 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.故选 C.

点评 由已知条件 $f[g(x)]=F(x)$,可令 $t=g(x)$,然后反解出 $x=g^{-1}(t)$,代入 $F(x)$ 即可得 $f(t)$ 的表达式.本题考查函数的定义及换元思想.本题还有一个陷阱

$$t=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2-1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1\neq -1$$

故准确地讲应为

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1},x\neq -1$$

[redacted]

1.已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}(x-\frac{1}{x})$(其中 $a>0,a\neq 1,x>0$),求 $f(x)$ 的表达式.

解析 令 $t=\log_a x(a>1,t>0;0<a<1,t<0)$,则 $x=a^t$,因此

$$f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$$

所以

$$f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x}),a>1,x>0;0<a<1,x<0$$

2.已知 $f(e^{x-1})=2x^2-1$,求 $f(x)$.

解析 设 $t=e^{x-1}>0$,则 $x=1+\ln t$,代入已知条件,得

$$f(t)=2(\ln t+1)^2-1=2\ln^2 t+4\ln t+1$$

所以

$$f(x)=2\ln^2 x+4\ln x+1$$

3.已知 $f(x)+2f(-x)=3x-2$,求 $f(x)$ 的解析式.

解析 将

$$f(x)+2f(-x)=3x-2 \quad ①$$

的 x 换为 $-x$ 得

$$f(-x)+2f(x)=-3x-2 \quad ②$$

所以②×2-①得

$$3f(x)=-6x-4-3x+2=-9x-2$$

所以
$$f(x)=-3x-\frac{2}{3}$$

点评 本题所给出的是一个函数方程，即由函数 $f(x)$ 构成的方程．其中所涉及的函数解析式包含了两个变量形式 $x,-x$，这正是我们进行换元构造新方程的入手之处．很多同学不能把换元与方程思想相结合来考虑问题，从而出现不敢把方程 $f(x)+2f(-x)=3x-2$ 的 x 换元为 $-x$ 的情况．另一个方程也就构造不出来，导致把一个原本较简单问题复杂化．

4．若 $f(\sin x)=3-\cos 2x$，则 $f(\cos x)=($　　$)$

A．$3-\cos 2x$　　B．$3-\sin 2x$　　C．$3+\cos 2x$　　D．$3+\sin 2x$

分析 求三角函数解析式时把三角恒等变换的思想渗透于其中，这是求三角函数解析式独有的特征．本题考查求函数的解析式、函数值和余弦倍角公式的基础题．

解法 1
$$f(\sin x)=3-\cos 2x=2+2\sin^2 x$$

故
$$f(x)=2+2x^2,\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

所以
$$f(\cos x)=2+2\cos^2 x=3+\cos 2x$$

故选 C．

解法 2 $f(\cos x)=f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=3-\cos 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=3-\cos(\pi-2x)=3+\cos 2x$

点评 本题一般采用先求出函数的解析式，再求函数值的方法．但如能巧用诱导公式，变成已知条件模式，则可减少计算量．

4．待定系数法

【例 7】 设 $f(x)$ 是一次函数，且 $f[f(x)]=4x+3$，求 $f(x)$．

解析 设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$，则 $f[f(x)]=af(x)+b=a^2x+ab+b$，从而 $\begin{cases}a^2=4\\ab+b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-2\\b=-3\end{cases}$，所以 $f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$．

点评 若已知函数的特征求函数的解析式，则通常用待定系数法来求．

[redacted]

已知二次函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图象在 y 轴上的截距为 1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求函数 $y=f(x)$ 的解析式．

分析 二次函数的表达形式有 3 种——一般式：$f(x)=ax^2+bx+c$；顶点式：$f(x)=a(x-m)^2+n$；零点式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$．要会根据已知条件的特点，灵活地选用二次函数的表达形式．

解法 1 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则由 y 轴上的截距为 1 知 $f(0)=1$，即
$$c=1 \qquad ①$$

所以
$$f(x)=ax^2+bx+1$$

由 $f(x-2)=f(-x-2)$ 知
$$a(x-2)^2+b(x-2)+1=a(-x-2)^2+b(-x-2)+1$$

整理得 $(4a-b)x=0$，即
$$4a-b=0 \qquad ②$$

由被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ 知 $|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$，即
$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=8$$

得
$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{1}{a}=8$$

整理得

$$b^2-4a=8a^2 \qquad ③$$

由②③得 $a=\frac{1}{2}, b=2$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

解法 2　由 $f(x-2)=f(-x-2)$ 知二次函数的对称轴为 $x=-2$，所以设 $f(x)=a(x+2)^2+k(a\neq 0)$，以下从略.

解法 3　由 $f(x-2)=f(-x-2)$ 知二次函数的对称轴为 $x=-2$；由被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$ 知，$|x_1-x_2|=2\sqrt{2}$；易知函数与 x 轴的两交点为 $(-2-\sqrt{2},0),(-2+\sqrt{2},0)$，所以设 $f(x)=a(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})(a\neq 0)$，以下从略.

点评　若已知函数为某种基本函数，可设出解析式的表达形式的一般式，再利用已知条件求出系数.

【例 8】　已知 $f(x)=\lg\frac{2x}{ax+b}$，且 $f(1)=0$，当 $x>0$ 时，总有 $f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\lg x$. 求 $f(x)$ 的解析式.

解析　由 $f(1)=0$ 得

$$a+b=2 \qquad ①$$

又

$$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=\lg x$$

所以

$$\lg\frac{2x}{ax+b}-\lg\frac{2}{a+bx}=\lg x$$

从而

$$\frac{(a+bx)x}{ax+b}=x$$

因为 $x>0$，所以 $(a-b)(x-1)=0$. 对 $x>0$ 总成立，则

$$a=b \qquad ②$$

由①②解得 $a=b=1$，所以 $f(x)=\lg\frac{2x}{x+1}$.

点评　运用方程思想求解参数是求参数常用的基本方法.

【例 9】　已知 $f(x)=x^2+c$，且 $f[f(x)]=f(x^2+1)$，设 $g(x)=f[f(x)]$，求 $g(x)$ 的解析式.

解析　由题意得

$$f[f(x)]=f(x^2+c)=(x^2+c)^2+c, f(x^2+1)=(x^2+1)^2+c$$

因为

$$f[f(x)]=f(x^2+1)$$

所以

$$(x^2+c)^2+c=(x^2+1)^2+c$$

所以

$$x^2+c=x^2+1$$

所以 $c=1$，所以

$$f(x)=x^2+1, g(x)=f[f(x)]=f(x^2+1)=(x^2+1)^2+1$$

点评　由 $f[f(x)]=f(x^2+1)$ 求出 c，进而得到函数的解析式.

[redacted]

1.（Ⅰ）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)(a>0,a\neq 1,x>0)$，求 $f(x)$ 的表达式.

（Ⅱ）已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $|f(1)|=|f(-1)|=|f(0)|=1$，求 $f(x)$ 的表达式.

解析　（Ⅰ）(换元法)　令 $t=\log_a x(a>1,t>0;0<a<1,t<0)$，则 $x=a^t$. 因此

$$f(t)=\frac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$$

所以 $$f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x}),a>1,x>0;0<a<1,x<0$$

（Ⅱ）（待定系数法） 由 $f(1)=a+b+c,f(-1)=a-b+c,f(0)=c$，得

$$\begin{cases}a=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)]-f(0)\\b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)]\\c=f(0)\end{cases}$$

并且 $f(1)$、$f(-1)$、$f(0)$ 不能同时等于 1 或 -1，所以所求函数为 $f(x)=2x^2-1$ 或 $f(x)=-2x^2+1$ 或 $f(x)=-x^2-x+1$，或 $f(x)=x^2-x-1$ 或 $f(x)=-x^2+x+1$ 或 $f(x)=x^2+x-1$.

点评 本题主要考查函数概念中的三要素定义域、值域和对应法则，以及计算能力和综合运用知识的能力解题时需利用函数基础知识，特别是对"f"的理解，用好等价转化，注意定义域，此题对思维能力要求较高，对定义域的考查、等价转化易出错.

2. 设 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的偶函数，当 $x\leqslant-1$ 时，$y=f(x)$ 的图象是经过点$(-2,0)$，斜率为 1 的射线，又在 $y=f(x)$ 的图象中有一部分是顶点在$(0,2)$，且过点$(-1,1)$的一段抛物线，试写出函数 $f(x)$ 的表达式，并在图中作出其图象.

解析 ① 当 $x\leqslant-1$ 时，设 $f(x)=x+b$，因为射线过点$(-2,0)$，所以 $0=-2+b$，即 $b=2$，所以 $f(x)=x+2$.

② 当 $-1<x<1$ 时，设 $f(x)=ax^2+2$，因为抛物线过点$(-1,1)$，所以 $1=a\cdot(-1)^2+2$，即 $a=-1$，所以 $f(x)=-x^2+2$.

③ 当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=-x+2$.

综上可知，$f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant-1\\2-x^2,-1<x<1\\-x+2,x\geqslant1\end{cases}$，作图由读者来完成.

点评 本题主要考查函数基本知识、抛物线、射线的基本概念及其图象的做法，对分段函数的分析需要较强的思维能力.因此，分段函数是今后高考的热点题型，解题中函数的奇偶性是桥梁，分类讨论是关键，待定系数求出曲线方程是主线.本题对思维能力要求很高，分类讨论、综合运用知识易发生混乱，关键是要合理进行分类，并运用待定系数法求函数表达式.

3. 已知 $f(2-\cos x)=\cos 2x+\cos x$，求 $f(x-1)$.

解法 1（换元法） 因为 $f(2-\cos x)=\cos 2x-\cos x=2\cos^2x-\cos x-1$，令 $u=2-\cos x(1\leqslant u\leqslant3)$，则 $\cos x=2-u$.所以

$$f(2-\cos x)=f(u)=2(2-u)^2-(2-u)-1=2u^2-7u+5,\quad 1\leqslant u\leqslant3$$

所以 $$f(x-1)=2(x-1)^2-7(x-1)+5=2x^2-11x+4,\quad 2\leqslant x\leqslant4$$

解法 2（配凑法） $f(2-\cos x)=2\cos^2x-\cos x-1=2(2-\cos x)^2-7(2-\cos x)+5$

所以 $$f(x)=2x^2-7x-5,\quad 1\leqslant x\leqslant3$$

即 $$f(x-1)=2(x-1)^2-7(x-1)+5=2x^2-11x+14,\quad 2\leqslant x\leqslant4$$

5. 函数方程法

【例 10】 函数 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，若 $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求 $f(x)$.

解析 因为函数 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，且

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1} \quad ①$$

所以 $$f(-x)+g(-x)=\frac{1}{-x-1}$$

即
$$f(x)-g(x)=\frac{1}{-x-1} \quad ②$$

①+②得
$$f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

【例 11】　设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx$(其中 a,b,c 均不为 0,且 $a\neq\pm b$),求 $f(x)$.

解析
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=cx \quad ①$$

用 $\frac{1}{x}$ 来代替 x,得
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=c\cdot\frac{1}{x} \quad ②$$

由 $a\times①-b\times②$ 得
$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{acx^2-bc}{x}$$

因为 $a\neq\pm b$,所以
$$f(x)=\frac{acx^2-bc}{(a^2-b^2)x}$$

【例 12】　若
$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x \quad ①$$

求 $f(x)$.

解析　在式①中以 $\frac{x-1}{x}$ 代替 x 得
$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}\right)=1+\frac{x-1}{x}$$

即
$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{2x-1}{x} \quad ②$$

又以 $-\frac{1}{x-1}$ 代替式①中的 x 得
$$f\left(-\frac{1}{x-1}\right)+f(x)=\frac{x-2}{x-1} \quad ③$$

①+③-②得
$$2f(x)=1+x+\frac{x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x}=\frac{x^3-x^2-1}{x(x-1)}$$

所以
$$f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$$

点评　以上例10、例11、例12,均是将 $f(x)$ 作为一个未知函数来考虑,建立函数方程(组),消去另外的未知函数便得 $f(x)$ 的解析式.本题用方程思想,建立函数方程(组),求 $f(x)$ 的解析式.

6. 参数法

【例 13】　已知 $f(3\sin x)=\cot^2 x$,求 $f(x)$ 的表达式.

解析　令 $\begin{cases}x=3\sin\theta\\y=\cot^2\theta\end{cases}$,即 $\begin{cases}x=3\sin\theta\\y=\csc^2\theta-1\end{cases}$,消去 θ 便得 $y=\left(\frac{3}{x}\right)^2-1$,于是得
$$f(x)=\frac{9-x^2}{x^2},\quad -3\leqslant x\leqslant 3,\text{且 } x\neq 0$$

点评　该题通过引入参数 θ,然后写出用这个参数表示变量的式(即参数方程),再消去参数便得

$f(x)$ 的表达式.

7. **特殊值法**

【例 14】 函数 $y=f(x)$ 满足①$f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$,②$f(4)=16$,m、n 为互质整数,$n\neq 0$,求 $f(\frac{m}{n})$ 的值.

解析 因为 $f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0)=f^2(0)$,$f(0)=0$ 或 1.若 $f(0)=0$,则

$$f(4)=16=f(0+4)=f(0)\cdot f(4)=0$$

矛盾,所以 $f(1)=1$.因为

$$f(4)=f(2)\cdot f(2)=f(1)\cdot f(1)\cdot f(1)\cdot f(1)=16,f(1)=f^2\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$$

所以 $f(1)=2$.仿此可证得 $f(a)\geqslant 0$,即 $y=f(x)$ 是非负函数

$$f(0)=f(a+(-a))=f(a)\cdot f(-a)$$

所以 $f(-a)=\dfrac{1}{f(a)}$,因为 $n\in \mathbf{N}^*$ 时

$$f(n)=f^n(1)=2^n,f(-n)=2^{-n},f(1)=f\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个}\Big)=f^n\left(\frac{1}{n}\right)=2$$

所以 $$f\left(\frac{1}{n}\right)=2^{\frac{1}{n}}$$

所以 $$f\left(\frac{m}{n}\right)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m=2^{\frac{m}{n}}$$

【例 15】 已知 $f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$,且 $f(0)=1$,求 $f(x)$ 的表达式.

解析 可令 $x=0$,$f(-y)=1-y(-y+1)$,再以 x 代 $-y$,便得 $f(x)=1+x(x+1)$,即 $f(x)=x^2+x+1$.

点评 例 14、例 15 是在已知条件中将某些字母(变量)取特殊值,使问题具体化、简单化,从而求得 $f(x)$ 的表达式.

8. **递推法(求和相消法)**

【例 16】 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{N}^*$ 上的函数,满足 $f(1)=1$,对于任意正整数 x,y,均有 $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy$,求 $f(x)$.

解析 由

$$f(1)=1$$

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy$$

令 $y=1$ 得 $$f(x)+1=f(x+1)-x$$

即 $$f(x+1)-f(x)=x+1$$

在上式中,x 分别用 $1,2,3,\cdots,t-1$ 代替,然后各式相加可得

$$f(t)=\frac{1}{2}(t+2)(t-1)+1=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x,\quad x\in \mathbf{N}^*$$

【例 17】 若 $f(1)=\lg\dfrac{1}{a}$,且当 $x\geqslant 2$ 时,满足 $f(x-1)=f(x)-\lg a^{x-1}(a>0,x\in \mathbf{N}^*)$,求 $f(x)$.

解析 因为 $f(x)=f(x-1)+\lg a^{x-1}(a>0,x\in \mathbf{N}^*)$,递推得

$$f(x-1)=f(x-2)+\lg a^{x-2}$$

$$f(x-2)=f(x-3)+\lg a^{x-3}$$

$$\cdots$$

$$f(3)=f(2)+\lg a^2$$
$$f(2)=f(1)+\lg a$$

以上$(x-1)$个等式两边分别相加，得

$f(x)=f(1)+\lg a+\lg a^2+\cdots+\lg a^{x-2}+\lg a^{x-1}=$

$$f(1)+\lg a^{1+2+\cdots+(x-2)+(x-1)}=\lg\frac{1}{a}+\lg a^{\frac{x(x-1)}{2}}=\lg a^{\frac{x(x-1)}{2}-1}=\left[\frac{x(x-1)}{2}-1\right]\lg a$$

点评 例16、例17是由已知条件构建递推式如$f(x+1)-f(x)=g(x)$，反复利用求和而求得$f(x)$的表达式.

9.图象法

【例18】 设$f(x)$为定义在**R**上的偶函数，当$x\leqslant -1$时，$y=f(x)$的图象是经过点$(-2,0)$，斜率为1的射线，又在$y=f(x)$的图象中有一部分是顶点在$(0,2)$，且过点$(-1,1)$的一段抛物线，试写出函数$f(x)$的表达式.

解析 略.

点评 函数的图象是函数表示的一种形式，在解题过程中通常把函数图象改写成$f(x)$的表达式，数形结合是数学解题中常用的思想方法.本题主要考查运用待定系数法求函数表达式以及分段函数图象的做法.分段函数是高考的热点题型之一，对分段函数的分析需要较强的思维能力.注意函数是分段函数时，不要把它确定为3个函数，分段函数仍然是1个函数.

10.归纳法

【例19】 已知$f(x+1)=2+\frac{1}{2}f(x)(x\in \mathbf{N}^*)$，且$f(1)=a$，求$f(x)$.

解析 因为

$$f(1)=a,f(2)=2+\frac{1}{2}f(1)=2+\frac{1}{2}a=4-2+\frac{1}{2}a$$

$$f(3)=2+\frac{1}{2}f(2)=2+\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2}a)=4-2^0+\frac{1}{2^2}a$$

$$f(4)=2+\frac{1}{2}f(3)=2+\frac{1}{2}(3+\frac{1}{4}a)=4-2^{-1}+\frac{1}{2^3}a$$

$$f(5)=2+\frac{1}{2}f(4)=2+\frac{1}{2}(3\frac{1}{2}+\frac{1}{8}a)=4-2^{-2}+\frac{1}{2^4}a$$

$$\cdots$$

依此类推，得

$$f(x)=4-2^{3-x}+\frac{1}{2^{x-1}}a$$

再用数学归纳法证明.

【例20】 已知$g(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，并记$f(x)=g_n(x)=\underbrace{g\{g[\cdots g}_{n个g}(x)]\}$，求$f(x)$的表达式.

解析

$$g_1(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$g_2(x)=g[g_2(x)]=\frac{g(x)}{\sqrt{1+g^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$g_3\{g[g(x)]\} = g[g_2(x)] = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

假设 $g_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$,那么

$$g_{k+1}(x) = g[g_k(x)] = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}})^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

所以
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

点评　例 19、例 20 说明,对比较复杂的函数解析式的求解,有时不妨先猜测函数的解析式,再用数学归纳法证明.

[redacted]

求解函数解析式是高考重点考查的内容之一,需引起重视.要在深刻理解函数定义的基础上,掌握求函数解析式的几种方法,并形成能力.

特别注意求解函数解析式的几种常用方法:

1.待定系数法,在已知所求函数类型的情况下,可以通过待定系数把所求函数设出来,然后由题设条件把所设系数求出,从而确定函数.

2.换元法或配凑法,已知形如 $f(g(x))$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式,可用换元法,采用的解法是先设 $t=g(x)$,变形 $t=g(x)$ 得出 $x=h(t)$,代入 $f(g(x))$ 得 $f(t)$,要注意 t 的取值范围.当表达式较简单时也可用配凑法.

3.消参法,若已知抽象函数表达式,则用解方程组消参的方法求解 $f(x)$,即已知条件是含有 $f(x)$ 及另外一个函数的等式,可抓住等式的特征对等式进行赋值,从而得到关于 $f(x)$ 及另外一个函数的方程组.

另外,在解题过程中经常用到分类讨论、等价转化等数学思想方法.

(二) $y=f(a+x)$ 与 $y=f(x)$

函数 $y=f(a+x)$（$a\neq 0$，以下不特别说明都要求 $a\neq 0$）是由函数 $y=f(x)$ 经过简单的函数复合而成，它们之间从性质到图象都有着密不可分的关系. 此类试题常常以告诉 $y=f(a+x)$ 的性质，研究 $y=f(x)$ 以及 $y=f(x)$ 的其他复合函数的性质的形式命制，那么 $y=f(a+x)$ 的特征决定了 $y=f(x)$ 的哪些性质？

1. 函数 $y=f(a+x)$ 的奇偶性对函数 $y=f(x)$ 图象对称性的确定

(1) 若函数 $y=f(a+x)$ 是偶函数，即 $f(a+x)=f(a-x)$，则函数 $y=f(x)$ 满足：

(Ⅰ) $f(x)=f(2a-x)$；

(Ⅱ) $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

证明　(Ⅰ) 只要用 $x-a$ 替换 x，代入 $f(a+x)=f(a-x)$ 即得.

(Ⅱ) 设 $P(x,y)$ 是函数 $y=f(x)$ 上任意一点，则其关于直线 $x=a$ 的对称点为 $P'(2a-x,y)$. 由性质(Ⅰ)知 $f(2a-x)=f(x)=y$，即 P' 也在函数 $y=f(x)$ 的图象上，所以函数的图象关于直线 $x=a$ 对称.

【例 1】　(2007 年重庆理第 9 题) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 为减函数，且函数 $y=f(8+x)$ 为偶函数，则(　　)

A. $f(6)>f(7)$　　　B. $f(6)>f(9)$

C. $f(7)>f(9)$　　　D. $f(7)>f(10)$

解析　因为 $y=f(8+x)$ 是偶函数，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=8$ 对称，因为函数 $y=f(x)$ 在 $(8,+\infty)$ 为减函数，所以其在 $(-\infty,8)$ 为增函数，可以用图 1 所示来表示它的图象. 故选 D.

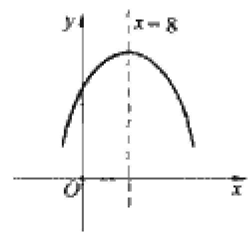


图 1

(2) 若函数 $y=f(a+x)$ 是奇函数，即 $f(a+x)=-f(a-x)$，则函数 $y=f(x)$ 满足：

(Ⅰ) $f(x)=-f(2a-x)$；

(Ⅱ) $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,0)$ 成中心对称.

【例 2】　已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 1\}$，$f(x+1)$ 是奇函数，当 $x<1$ 时，$f(x)=2x^2-x+1$，则 $x>1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是(　　)

A. $\left[\frac{5}{4},+\infty\right)$　　　B. $\left(1,\frac{5}{4}\right]$

C. $\left[\frac{7}{4},+\infty\right)$　　　D. $\left(1,\frac{7}{4}\right]$

解析　因为函数 $f(x+1)$ 是奇函数，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $(1,0)$ 成中心对称，所以函数 $y=f(x)$ 的图象如图 2 所示. 所以当 $x>1$ 时，函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(1,\frac{7}{4}\right]$.

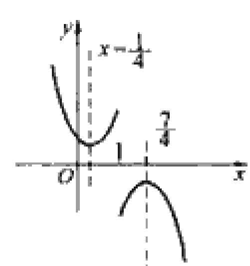


图 2

(3) 若 $f(a+x)=f(b-x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称；若 $f(a+x)=-f(b-

x)，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ 成中心对称.

【例 3】 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x-\frac{3}{2})=f(x+\frac{1}{2})$ 恒成立，当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，则当 $x\in(-2,0)$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式为(　　)

A. $|x-2|$　　B. $|x+4|$　　C. $2+|x+1|$　　D. $3-|x+1|$

解析 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x-\frac{3}{2})=f(\frac{3}{2}-x)$，所以 $f(\frac{3}{2}-x)=f(x+\frac{1}{2})$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，所以 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数(道理在后边解释). 当 $x\in[-2,-1]$ 时，$x+4\in[2,3]$，所以 $f(x)=f(x+4)=x+4$；当 $x\in[0,1]$ 时，$x+2\in[2,3]$，所以 $f(x)=f(x+2)=x+2$，所以 $x\in[-1,0]$ 时，$f(x)=f(-x)=2-x$. 即 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\in[-1,0)\\ x+4, & x\in(-2,-1)\end{cases}$. 故选 D.

2. 函数 $y=f(a+x)$ 的特征表达式对函数 $y=f(x)$ 周期性的确定

(1) 若函数 $y=f(a+x)$ 满足下列表达式之一，则 $y=f(x)$ 是以 $2a$ 为周期的函数.

(Ⅰ) $f(a+x)=-f(x)$；

(Ⅱ) $f(a+x)=\frac{1}{f(x)}$；

(Ⅲ) $f(a+x)=-\frac{1}{f(x)}$；

(Ⅳ) $f(a+x)=\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$；

(Ⅴ) $f(a+x)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$.

这里，我们给出(Ⅳ)的证明，其他可以模仿这一方法进行.

证明 因为

$$f(2a+x)=f(a+(a+x))=\frac{f(a+x)+1}{f(a+x)-1}=\frac{\frac{f(x)+1}{f(x)-1}+1}{\frac{f(x)+1}{f(x)-1}-1}=f(x)$$

即 $f(2a+x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 $2a$ 为周期的周期函数.

【例 4】 设偶函数 $f(x)$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+3)=-\frac{1}{f(x)}$ 成立，且当 $x\in[-3,-2]$ 时，$f(x)=2x$，则 $f(113.5)$ 的值是(　　)

A. $-\frac{2}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $-\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

解析 因为 $f(x+3)=-\frac{1}{f(x)}$，所以 6 是函数 $f(x)$ 的一个周期，所以

$$f(113.5)=f(19\times 6-0.5)=f(-0.5)=-\frac{1}{f(3-0.5)}=-\frac{1}{f(2.5)}=-\frac{1}{f(-2.5)}=\frac{1}{5}$$

应选 D.

【例 5】 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，满足 $f(2+x)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$.

(Ⅰ) 求证：直线 $x=1$ 是函数 $y=f(x)$ 图象的一条对称轴；

(Ⅱ) 当 $x\in[1,5]$ 时，求 $f(x)$ 的解析式；

(Ⅲ) 当 $A=\{x \mid |f(x)|>a, x\in\mathbf{R}\}$，$A\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解析 (Ⅰ) 因为 $f(2+x)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$，所以 4 是函数 $f(x)$ 的一个周期，所以 $f(2+x)=-f(x)$，设

$A(x,f(x))$ 是 $y=f(x)$ 图象上任意一点，其关于直线 $x=1$ 的对称点为 $A'(2-x,f(x))$. 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(2-x)=-f(2+x)=f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

(Ⅱ) 因为4是函数 $f(x)$ 的一个周期，且 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$，所以 $x\in[1,5]$ 时，其解析式为

$$y=f(x)=\begin{cases}-(x-2)^3, & x\in[1,3]\\ (x-4)^3, & x\in(3,5]\end{cases}$$

(Ⅲ) 当 $x\in[1,5]$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$，又 $f(x)$ 是以4为周期的周期函数，所以 $x\in\mathbf{R}$ 时，$|f(x)|\leqslant 1$，所以要使 $A\neq\varnothing$，则 $a<1$.

(2) 若 $f(a+x)$ 满足以下条件，则 $f(x)$ 为周期函数 $(a\neq b)$.

(Ⅰ) $f(a+x)=f(b+x)$，$|a-b|$ 为 $f(x)$ 的一个周期；

(Ⅱ) $f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=f(b-x)$，$2|a-b|$ 为 $f(x)$ 的一个周期；

(Ⅲ) $f(a+x)=-f(a-x)$ 且 $f(b+x)=-f(b-x)$，$2|a-b|$ 为 $f(x)$ 的一个周期；

(Ⅳ) $f(a+x)=f(a-x)$ 且 $f(b+x)=-f(b-x)$，$4|a-b|$ 为 $f(x)$ 的一个周期.

证明可以模仿(1)中的证明方法. 上述表达式中表明，若函数 $f(x)$ 有两条对称轴、两个对称点、一条对称轴和一个对称点时，函数 $f(x)$ 是周期函数. 在上述表达式中，若 a 或 b 为0时，则函数为奇函数或偶函数，即当函数为奇函数且有一个对称点或一条对称轴时，以及函数为偶函数且有一个对称点或一条对称轴时，函数均是周期函数. 从这一点出发，我们能够更深刻地理解函数的奇偶性，它是函数图象对称性的特殊情形.

【例6】　设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在 $[0,7]$ 上只有 $f(1)=f(3)=0$.

(Ⅰ) 试判断 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(Ⅱ) 试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2\,005,2\,005]$ 上根的个数.

解　(Ⅰ) 因为 $f(x)$ 在 $[0,7]$ 上只有 $f(1)=f(3)=0$，所以 $f(0)\neq 0$，所以 $f(x)$ 不是奇函数，因为 $f(2-x)=f(2+x)$，所以 $f(x)$ 图象关于直线 $x=2$ 对称. 所以 $f(-1)=f(5)$，而 $f(5)\neq 0$，所以 $f(1)\neq f(-1)$，即 $f(x)$ 不是偶函数，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(Ⅱ) 因为 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，所以 $f(x)$ 是以10为周期的函数.

因为 $f(7-x)=f(7+x)$，即函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=7$ 对称.

又因为 $f(x)$ 在 $[0,7]$ 上仅有 $f(1)=f(3)=0$，所以 $f(x)=0$ 在 $(7,10)$ 上没有根，即 $f(x)=0$ 在 $[0,10)$ 只有 $x=1$ 和 $x=3$ 两根. 于是 $f(x)=0$ 在 $[0,2\,000]$ 上有400个根，在 $[2\,000,2\,005]$ 有两个根，在 $[-2\,000,0]$ 上有400个根，在 $[-2\,005,-2\,000]$ 上没有根，所以方程在 $[-2\,005,2\,005]$ 上共有802个根.

3. $f(x+a)$ 和 $f^{-1}(x+a)$ 互为反函数吗?

按着反函数的求解步骤，对于函数 $y=f(x+a)$ 的反函数应该是 $y=f^{-1}(x)-a$，而不是 $y=f^{-1}(x+a)$. $y=f^{-1}(x+a)$ 和 $y=f^{-1}(x)-a$，它们都与函数 $y=f^{-1}(x)$ 有关. $y=f^{-1}(x+a)$ 的图象由 $y=f^{-1}(x)$ 的图象左或右平移得来，$y=f^{-1}(x)-a$ 的图象则是由 $y=f^{-1}(x)$ 上或下平移得来.

【例7】　设函数 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-3}$，函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(4)$ 的值为______.

解析　从反函数的概念入手，由 $y=f^{-1}(x+1)$ 得 $x+1=f(y)$，即 $x=f(y)-1$，所以 $g(x)=f(x)-1$，则 $g(4)=f(4)-1=12$.

【例8】　已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，它的反函数为 $f^{-1}(x)$，若 $f^{-1}(x-1)$ 与 $f(x-1)$ 也是互为反函数，且 $f(-1)=1$，则 $f(1)$ 的值为(　　)

A. 1　　B. -1　　C. -3　　D. 0

解析 由 $y=f^{-1}(x-1)$ 得 $x-1=f(y)$,所以 $y=f^{-1}(x-1)$ 的反函数为 $y=f(x)+1$,由题意知 $f(x)+1=f(x-1)$,令 $x=0$,则 $f(0)=f(-1)-1=-2$,令 $x=1$,则 $f(1)=f(0)-1=-3$.故选 C.

(三)新高考抽象函数分类概说

抽象函数(未给出具体的函数形式(或虽给出具体的形式,但其考查目的更具抽象意义)的函数)问题一直是近年高考常考不衰的热点题型.近几年全国高考数学试卷中出现了四类有关抽象函数的考题,以下对此分类概说.

1.概念类

已知条件中涉及抽象函数的有关概念,如函数的定义、函数的奇偶性、函数的单调性等,此类问题称为概念类.

【例1】 若函数 $y=f(x)$ 的定义域是[0,2],则函数 $g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是(　　)

A.[0,1]　　B.[0,1)　　C.[0,1)∪(1,4]　　D.(0,1)

解析 因为函数 $y=f(x)$ 的定义域是[0,2],所以,要使函数 $g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$ 有意义,必满足 $\begin{cases}x-1\neq 0\\ 0\leqslant 2x\leqslant 2\end{cases}$,解得 $0\leqslant x<1$,即函数 $g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域为[0,1).故选B.

点评 本题主要考查函数定义域的定义,要注意使式子有意义的限制条件.

【例2】 若定义在R上的函数 $f(x)$ 满足:对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$,则下列说法一定正确的是(　　)

A.$f(x)$ 为奇函数　　B.$f(x)$ 为偶函数　　C.$f(x)+1$ 为奇函数　　D.$f(x)+1$ 为偶函数

解析 令 $x_2=x_1=0$,则 $f(0+0)=f(0)+f(0)+1$,所以 $f(0)=-1$.令 $x_2=-x_1$,则 $f(x_1-x_1)=f(x_1)+f(-x_1)+1$,即 $f(-x_1)+1=-(f(x_1)+1)$,所以 $f(x)+1$ 为奇函数.故选C.

点评 本题主要考查抽象函数的奇偶性判断,关键是学会用赋值法解题.

【例3】 "函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 存在反函数"是"函数 $f(x)$ 在R上为增函数"的(　　)

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

解析 若函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 存在反函数,则函数 $f(x)$ 在R上是单调的,但不一定是增函数,但反之成立.所以,"函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 存在反函数" $\overset{\nRightarrow}{\Leftarrow}$ "函数 $f(x)$ 在R上为增函数".所以,"函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 存在反函数"是"函数 $f(x)$ 在R上为增函数"的必要而不充分条件.故选B.

点评 本题考查反函数的相关知识,关键是要把握好具备什么条件的函数才有反函数这一具体知识.

2.性质类

主要是涉及抽象函数的"四性"(即函数的奇偶性、单调性、周期性、对称性)的试题,称为性质类.

【例4】 设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,且 $f(1)=0$,则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为(　　)

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

解析　因为函数 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，所以 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\frac{f(x)+f(x)}{x}<0$，即 $xf(x)<0$.

因为奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数.

又 $f(1)=0$，所以 $f(-1)=-f(1)=0$. 所以 $xf(x)<0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(0,1)$，即不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(0,1)$. 故选 D.

点评　本题主要考查奇函数的性质，函数单调性的应用以及不等式的解法.

【例 5】　若函数 $f(x)$、$g(x)$ 分别为 **R** 上的奇函数、偶函数，且满足 $f(x)-g(x)=e^x$，则有（　　）

A. $f(2)<f(3)<g(0)$　　B. $g(0)<f(3)<f(2)$

C. $f(2)<g(0)<f(3)$　　D. $g(0)<f(2)<f(3)$

解析　因为函数 $f(x)$、$g(x)$ 分别为 **R** 上的奇函数、偶函数，所以

$$f(-x)-g(-x)=-f(x)-g(x)=e^{-x}$$

即

$$f(x)+g(x)=-e^{-x}$$

联立

$$\begin{cases}f(x)-g(x)=e^x\\ f(x)+g(x)=-e^{-x}\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\\ g(x)=-\frac{1}{2}(e^{-x}+e^x)\end{cases}$$

所以

$$f(2)=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})=\frac{e^4-1}{2e^2},\quad f(3)=\frac{1}{2}(e^3-e^{-3})=\frac{e^6-1}{2e^3},\quad g(0)=-\frac{1}{2}(e^{-0}+e^0)=-1$$

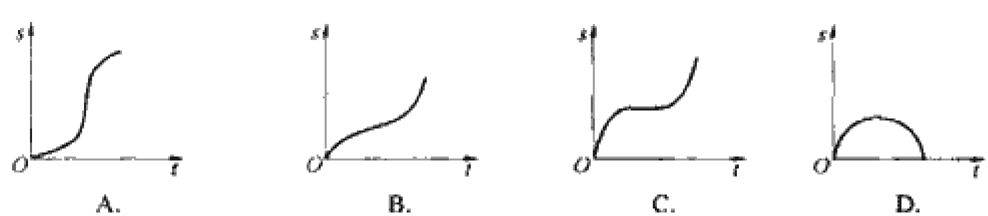
又因为 $-1<\frac{e^4-1}{2e^2}<\frac{e^6-1}{2e^3}$，所以 $g(0)<f(2)<f(3)$. 故选 D.

点评　本题主要考查函数的奇偶性以及利用单调性与有界性比较大小的知识.

3. 图象类

图象类是指给出抽象函数图象的试题.

【例 6】　汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车，若把这一过程中汽车的行驶路程 s 看作时间 t 的函数，其图象可能是（　　）



解析　由导数的几何意义可知：汽车启动、停车所对应的起点、终点的切线的斜率为 0，所以排除 B，C，D. 故选 A.

点评　本题以物理中的位移与时间的图象为载体，考查了变化率问题，求解时应明确当汽车匀速行驶时，体现在 s、t 图象上是一条直线，但不是平行于 t 轴的直线.

【例 7】　已知函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的导函数的图象如图 1 所示，那么 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的图象可能是（　　）

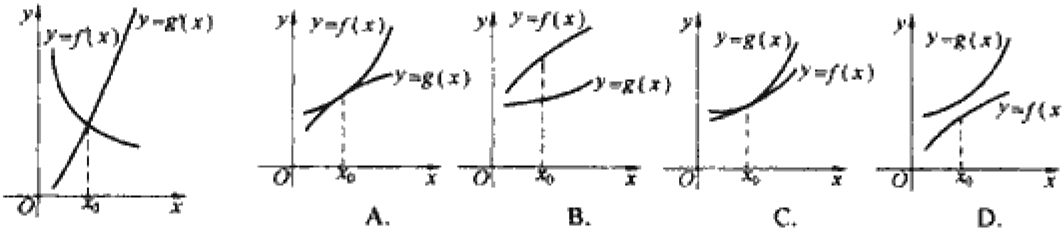


图 1

解析　由函数 $y = f(x)$，$y = g(x)$ 的导函数的图象可知，当 $x = x_0$ 时，函数 $y = f(x)$，$y = g(x)$ 的导函数值相等，由导数的几何意义可知：两函数在此点处的切线斜率相等，所以 $y = f(x)$，$y = g(x)$ 的图象可能是 D.

点评　本题考查原函数与导函数图象的关系，做题时紧紧抓住导函数的值是原函数相应点的切线的斜率.

【例 8】　设函数 $y = f(x)$ 存在反函数 $y = f^{-1}(x)$，且函数 $y = x - f(x)$ 的图象过点(1,2)，则函数 $y = f^{-1}(x) - x$ 的图象一定过点_______.

解析　因为函数 $y = x - f(x)$ 的图象过点(1,2)，所以 $2 = 1 - f(1)$，所以 $f(1) = -1$，所以 $f^{-1}(-1) = 1$.

当 $x = -1$ 时，$y = f^{-1}(x) - x = f^{-1}(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$，所以，函数 $y = f^{-1}(x) - x$ 的图象一定过点(-1,2).

点评　本题考查了原函数与反函数间图象的位置关系及点与点间的位置关系在抽象函数解析式间的变换. 此类题目多为客观题，主要根据两者图象关于直线 $y = x$ 对称对某些问题进行分析和解决. 很多反函数的图象考查题常考查抽象函数的反函数及其点坐标的变化关系，对于抽象解析式中需要注意整体变量的替换理解，其主要原理为 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$.

4. 综合类

同时涉及函数的多项概念和性质的综合题，称为综合类.

【例 9】　设 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 是单调函数，则满足 $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和为(　　)

A. -3　　B. 3　　C. -8　　D. 8

解析　因为 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 是单调函数，所以当 $x < 0$ 时 $f(x)$ 也是单调函数.

因为 $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$，所以 $|x| = \left|\frac{x+3}{x+4}\right|$，即 $x^2 + 5x - 3 = 0$ 或 $x^2 + 3x + 3 = 0$.

因为 $x^2 + 5x - 3 = 0$ 的两根之和为 $-\frac{5}{1} = -5$，$x^2 + 3x + 3 = 0$ 的两根之和为 $-\frac{3}{1} = -3$，满足 $f(x) = f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和为 $-5 + (-3) = -8$. 故选 C.

点评　本题考查函数的性质及推理论证能力，易错之处是只考虑 $x = \frac{x+3}{x+4}$，而忽视了 $x + \frac{x+3}{x+4} = 0$，从而会误选 A.

【例 10】　已知 $f(x)$ 在 R 上是奇函数，且满足 $f(x+4) = f(x)$，当 $x \in (0,2)$ 时，$f(x) = 2x^2$，则 $f(7) = $(　　)

A. -2　　B. 2　　C. -98　　D. 98

解析 因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$. 因为 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 又因为当 $x\in(0,2)$ 时,$f(x)=2x^2$,所以 $f(7)=f(7-2\times4)=f(-1)=-f(1)=-2\cdot1^2=-2$. 故选 A.

点评 本题主要考查函数的周期性和奇偶性.

【例 11】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x,y\in\mathbf{R})$,$f(1)=2$,则 $f(-3)$ 等于(　　)

A.2　　B.3　　C.6　　D.9

解析 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x,y\in\mathbf{R})$,$f(1)=2$,所以

$$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)+2\cdot1\cdot1=2+2+2=6$$

所以

$$f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)+2\cdot2\cdot2=6+6+8=20$$

又

$$f(4+(-3))=f(4)+f(-3)+2\cdot4\cdot(-3)=f(1)$$

所以

$$f(-3)=f(1)-f(4)+24=2-20+24=6$$

故选 C.

点评 本题主要考查抽象函数的有关运算和性质,如何将 -3 分解是本题解题的关键,也是难点.

[redacted]

以上四类抽象函数是近几年高考数学试题中最常见的抽象函数,通过这些实例的解答,读者不难发现,每类抽象函数虽然变化无穷,但都有一些常规的处理策略,例如:概念类抽象函数的求解策略是紧扣有关概念,充分利用定义即可解决;性质类抽象函数的求解策略是充分利用它们的性质来解决;图象类抽象函数的求解策略是充分挖掘图象信息,运用数形结合思想来解决问题;综合类抽象函数的求解策略不仅要注意概念和性质的准确运用,也要充分利用“四化”策略(即具体化、熟悉化、特殊化、直观化)来解决问题.

（四）全国高考函数在考查什么

函数作为高中数学的重要内容，其观点和方法贯穿整个高中代数的全过程，同时也大量应用于数学其他分支之中．作为高中代数最基本、最重要的内容，近几年高考函数所占卷面总分的比值都较大幅度地超过了教学大纲中规定的相应课时比值．函数的概念及性质、函数的图象及变换、以基本函数形式出现的综合题和应用题等一直是高考常考不衰的热点问题．

本文对近几年全国高考函数考查的内容进行全面分析．

1．考查函数的定义及求值问题

【例1】　定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x,y\in \mathbf{R})$，$f(1)=2$，则 $f(-3)$ 等于（　　）．

A．2　　B．3　　C．6　　D．9

解析　因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x,y\in \mathbf{R})$，$f(1)=2$，所以

$$f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)+2\cdot 1\cdot 1=2+2+2=6$$

所以
$$f(4)=f(2+2)=f(2)+f(2)+2\cdot 2\cdot 2=6+6+8=20$$

又
$$f(4+(-3))=f(4)+f(-3)+2\cdot 4\cdot(-3)=f(1)$$

所以
$$f(-3)=f(1)-f(4)+24=2-20+24=6$$

故选 C．

点评　对于函数求值的考查，一般都涉及函数的周期性、奇偶性等性质．具体函数的求值问题要先求出函数解析式，再求解；而对于抽象函数的求值问题，则是通过递推关系式的变形，利用已知函数值进行求解即往往需要对某些变量进行适当的赋值，这是一般向特殊转化的必要手段．（本题用高一的知识就可以求解，难度指数★★★）

[redacted]

已知 $f(3^x)=4x\log_2 3+233$，则 $f(2)+f(4)+f(8)+\cdots+f(2^8)$ 的值等于________．

解析　因为
$$f(3^x)=4x\log_2 3+233=4\log_2 3^x+233$$

所以
$$f(x)=4\log_2 x+233$$

所以
$$f(2)+f(4)+f(8)+\cdots+f(2^8)=$$
$$(4\log_2 2+233)+(4\log_2 4+233)+(4\log_2 8+233)+\cdots+(4\log_2 2^8+233)=$$
$$4(1+2+3+\cdots+8)+8\times 233=2008$$

故填 2 008．（高一，★★）

2．考查函数定义域问题

【例2】　函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x-2|-1}}{\log_2(x-1)}$ 的定义域为________．

解析 由题意得$\begin{cases}|x-2|-1\geqslant 0\\x-1>0\\x-1\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant 3\text{或}x\leqslant 1\\x>1\\x\neq 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant 3$，即函数的定义域为$\{x\mid x\geqslant 3\}$.

点评 函数定义域是高考的重点内容，一般情况下，函数的定义域就是指使这个式子有意义的所有实数x的集合，但实际问题的定义域必须具有实际意义，对含参数的函数定义域必须对字母参数分类讨论.在一些具体函数综合问题中，函数定义域往往具有隐蔽性，所以在研究这些问题时，必须树立"定义域优先"的原则.（本题用高一的知识就可以求解，难度指数★）

[redacted]

1.函数$f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$的定义域为（　　）

A.$(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　　B.$(-4,0)\cup(0,1)$

C.$[-4,0)\cup(0,1]$　　D.$[-4,0)\cup(0,1)$

解析 要使函数$f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$有意义，必满足

$$\begin{cases}x\neq 0\\\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}>0\end{cases}$$

解得$-4\leqslant x<0$或$0<x<1$.

所以，函数$f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$的定义域为$[-4,0)\cup(0,1)$.故选D.（高一，★★）

2.若函数$y=f(x)$的定义域是$[0,2]$，则函数$g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$的定义域是（　　）

A.$[0,1]$　　B.$[0,1)$　　C.$[0,1)\cup(1,4]$　　D.$(0,1)$

解析 因为函数$y=f(x)$的定义域是$[0,2]$，所以，要使函数$g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$有意义，必满足$\begin{cases}x-1\neq 0\\0\leqslant 2x\leqslant 2\end{cases}$，解得$0\leqslant x<1$，即函数$g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$的定义域为$[0,1)$.故选B.（高一，★★）

3.考查函数值域（最值）问题

【例3】 若函数$y=f(x)$的值域是$[\frac{1}{2},3]$，则函数$F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$的值域是（　　）

A.$\left[\frac{1}{2},3\right]$　　B.$\left[2,\frac{10}{3}\right]$　　C.$\left[\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right]$　　D.$\left[3,\frac{10}{3}\right]$

解析 因为函数$y=f(x)$的值域是$\left[\frac{1}{2},3\right]$，所以$\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 3$.又因为函数$F(t)=t+\frac{1}{t}$，$t\in[\frac{1}{2},3]$，在区间$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递减，在区间$[1,3]$上单调递增，所以当$f(x)=1$时，函数$F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$取得最小值2.

又当$f(x)=\frac{1}{2}$时，函数$F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$的值为$\frac{5}{2}$；当$f(x)=3$时，函数$F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$的值为$\frac{10}{3}$，所以函数$F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$的最大值为$\frac{10}{3}$，所以函数$F(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}$的值域是$\left[2,\frac{10}{3}\right]$.故选B.

点评 函数值域（最值）问题是高考考查频率很高的内容，几乎每年高考在选择题或填空题中都会涉及求函数最值问题一般需要借助于函数值域的常用方法，此类问题要注意函数定义域在求最值中的

制约作用. 利用函数的单调性可以求函数的值域、最大值、最小值, 此种方法用得巧妙, 可以达到化难为易、化繁为简的效果.(本题要用到高二的知识求解, 难度指数 ★★(中))

[redacted]

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ 的最大值为(　　)

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

解析　函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$, 因为

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{2}$$

当且仅当 $\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 即当 $x=1$ 时上式等号成立. 所以函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$. 故选 B.(高一、高二, ★)

2. 已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 $\dfrac{m}{M}$ 的值为(　　)

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析　函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的定义域为 $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 1\}$, 因为

$$y^2=(\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3})^2=4+2\sqrt{-x^2-2x+3}=4+2\sqrt{-(x+1)^2+4}$$

所以当 $x=-1$ 时, $y^2_{\max}=4+2\sqrt{-(-1+1)^2+4}=8$, 所以 $y_{\max}=2\sqrt{2}$, 即 $M=2\sqrt{2}$.

所以当 $x=-3,1$ 时, $y^2_{\min}=4+2\sqrt{-(-3+1)^2+4}=4+2\sqrt{-(1+1)^2+4}=4$.

所以 $y_{\min}=2$, 即 $m=2$, 所以 $\dfrac{m}{M}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.(高一, ★★)

4. 考查函数图象问题

【例 4】　设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数, 且 $f(1)=0$, 则不等式 $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为(　　)

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty)\cup(-10,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

解析　在由题意知, $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\dfrac{2f(x)}{x}<0$, 即 $x\cdot f(x)<0$, 且 $f(1)=0$, 从构造满足题意的函数示意图(图 1)可知, $\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为 $(-1,0)\cup(0,1)$, 故选 D.

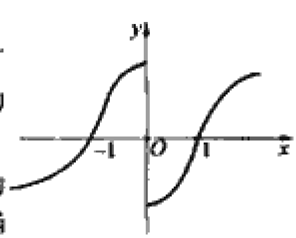


图 1

点评　由于近年来高考试题加强了数形结合思想的考查, 最突出的是高考试卷中函数图象考题明显增多. 要掌握一次函数、二次函数、指数函数、对数函数的图象和性质, 在此基础上, 理解掌握常见的图象平移、对称及伸缩变换, 通过对图象的识别来考查函数的性质. 函数图象形象地显示了函数的性质, 为研究数量关系提供了"形"的直观性, 它是探求解题途径, 获得解题方法的重要工具, 通过借助于图形的直观性, 以图助算, 就可避免繁琐的计算. 因此, 以数形结合为切入点, 化难为易, 让抽象的问题转化得直观明白.(高一, ★★)

5. 考查求函数解析式问题

【例 5】 设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数. 若当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \lg x$, 则满足 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围是________.

解析 当因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = \lg x$.

所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = -\lg(-x)$.

因为 $f(x) > 0$, 所以 $\begin{cases} x > 0 \\ \lg x > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ -\lg(-x) > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$ 或 $-1 < x < 0$.

点评 此题的主要过程是求函数的解析式, 要注意所求解析式的定义域, 要在相关定义域下通过化抽象为具体的方法, 把问题转化. (高一, ★★)

[illegible]

若函数 $y = f(x-1)$ 的图象与函数 $y = \ln\sqrt{x} + 1$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 则 $f(x) = ($　　$)$

A. e^{2x-1}　　B. e^{2x}　　C. e^{2x+1}　　D. e^{2x+2}

解析 因为函数 $y = f(x-1)$ 的图象与函数 $y = \ln\sqrt{x} + 1$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称, 所以函数 $y = f(x-1)$ 与函数 $y = \ln\sqrt{x} + 1$ 互为反函数, 所以 $y^{-1} = e^{2(x-1)}$, 所以函数 $y = f(x-1) = e^{2(x-1)}$, 所以 $f(x) = e^{2x}$. 故选 B. (高一, ★★)

6. 考查抽象函数的奇偶性问题

【例 6】 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足对任意 $x_1, x_2 \in$ R 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1$, 则下列说法一定正确的是(　　)

A. $f(x)$ 为奇函数　　B. $f(x)$ 为偶函数　　C. $f(x) + 1$ 为奇函数　　D. $f(x) + 1$ 为偶函数

解析 令 $x_1 = x_2 = 0$, 得 $f(0) = 2f(0) + 1 \Rightarrow f(0) = -1$.

再令 $x_1 = -x_2$, 得 $f(x_1 - x_1) = f(x_1) + f(-x_1) + 1$, 即 $f(0) = f(x_1) + f(-x_1) + 1$, 所以 $[f(x_1) + 1] + [f(-x_1) + 1] = 0$, 即 $f(x) + 1$ 为奇函数, 故选 C.

点评 此题主要考查函数奇偶性问题. 我们把未给出具体解析式的函数称为抽象函数. 由于这种表现形式的抽象性, 使得直接求解思路难寻. 通过赋予恰当的数值, 经过运算与推理, 最后得出结论. (高一, ★★)

相关链接

若函数 $f(x)$, $g(x)$ 分别为 R 上的奇函数、偶函数, 且满足 $f(x) - g(x) = e^x$, 则有(　　)

A. $f(2) < f(3) < g(0)$　　B. $g(0) < f(3) < f(2)$

C. $f(2) < g(0) < f(3)$　　D. $g(0) < f(2) < f(3)$

解析 因为函数 $f(x)$、$g(x)$ 分别为 R 上的奇函数、偶函数, 所以

$$f(-x) - g(-x) = -f(x) - g(x) = e^{-x}$$

即

$$f(x) + g(x) = -e^{-x}$$

联立

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = e^x \\ f(x) + g(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ g(x) = -\dfrac{1}{2}(e^{-x} + e^x) \end{cases}$$

所以

$f(2)=\frac{1}{2}(e^2-e^{-2})=\frac{e^4-1}{2e^2}$， $f(3)=\frac{1}{2}(e^3-e^{-3})=\frac{e^6-1}{2e^3}$， $g(0)=-\frac{1}{2}(e^{-0}+e^0)=-1$

又因为 $-1<\frac{e^4-1}{2e^2}<\frac{e^6-1}{2e^3}$，所以 $g(0)<f(2)<f(3)$，故选 D.（高一，★★）

7. 考查函数周期性问题

【例 7】 设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+2)=13$，若 $f(1)=2$，则 $f(99)=$（　　）.

A. 13　　B. 2　　C. $\frac{13}{2}$　　D. $\frac{2}{13}$

解析　因为 $f(1)=2$，$f(x)\cdot f(x+2)=13$，所以 $f(1)\cdot f(1+2)=13$，即 $f(3)=\frac{13}{2}$，且 $f(x+2)\cdot f(x+4)=13$，所以 $f(x)=f(x+4)$，即函数 $y=f(x)$ 是以 4 为周期的函数，所以 $f(99)=f(4\times 24+3)=f(3)=\frac{13}{2}$，故选 C.

点评　本题主要考查函数的周期性知识，同时考查理解和推理能力，求解时应首先判断出是周期函数，然后再继续. 对于函数 $f(x)$ 而言，若 $f(x)=f(x+T)$，则说明周期为 T，一般在三角函数中应用较多.（高一，★★）

[redacted]

已知 $f(x)$ 在 R 上是奇函数，且满足 $f(x+4)=f(x)$，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=2x^2$，则（　　）

A. -2　　B. 2　　C. -98　　D. 98

解析　因为 $f(x)$ 在 R 上是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$. 因为 $f(x)$ 满足 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 又因为当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=2x^2$，所以 $f(7)=f(7-2\times 4)=f(-1)=-f(1)=-2\cdot 1^2=-2$. 故选 A.（高一，★★）

8. 考查原函数与反函数的关系问题

【例 8】 已知函数 $f(x)=2^{x+3}$，$f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $mn=16(m,n\in \mathbf{R}^+)$，则 $f^{-1}(m)+f^{-1}(n)$ 的值为（　　）.

A. -2　　B. 1　　C. 4　　D. 10

解析　由原函数与其反函数的关系得 $2^{x+3}\cdot 2^{y+3}=16$，即 $2^{x+3}\cdot 2^{y+3}=2^2\cdot 2^2$，所以 $x=y=-1$，因此有 $f^{-1}(m)+f^{-1}(n)=-2$，故选 A.

点评　反函数是高考热点问题之一，在历年和各个省市的高考试题中，考查反函数的试题屡见不鲜. 只有在单调区间上才存在反函数. 在表示反函数的解析式时，要连同反函数的定义域写在一起，才是反函数的完整表示. 由于原函数的定义域和值域分别是其反函数的值域和定义域，因此，反函数的定义域不能仅由其解析式来求，而应该是原函数的值域. 此例主要是考查利用原函数与其反函数的关系解题，可以避开求反函数的麻烦，提高解题效率.（高一，★★）

[redacted]

1. 函数 $f(x)=(x-1)^2+1(x<1)$ 的反函数为（　　）

A. $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}(x>1)$　　B. $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}(x>1)$

C. $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$　　D. $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$

解析　由 $f(x)=(x-1)^2+1(x<1)$，得

$$x-1=-\sqrt{y-1}$$

所以

$$x=1-\sqrt{y-1}$$

所以 $$y=1-\sqrt{x-1}$$

所以反函数为 $y=1-\sqrt{x-1}$，即 $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}$. 再由 $x<1$ 知 $(x-1)^2+1>1$，所以 $f(x)>1$，所以 $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x-1}(x>1)$. 故选 B.（高一，★★）

2. 函数 $y=\begin{cases}x+1, & x<0\\ e^x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的反函数是________.

解析 当 $x<0$ 时，$y=x+1<1$，所以 $x=y-1$，所以 $y=x-1$，所以反函数为 $y=x-1, x<1$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$y=e^x\geqslant 1$，所以 $x=\ln y$，所以 $y=\ln x$，所以反函数为 $y=\ln x, x\geqslant 1$.

所以函数 $y=\begin{cases}x+1, & x<0\\ e^x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的反函数是 $y=\begin{cases}x-1, x<1\\ \ln x, x\geqslant 1\end{cases}$.（高一，★）

9. 考查函数单调性问题

【例 9】 设 $k\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<1\\ -\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$，$F(x)=f(x)-kx, x\in\mathbf{R}$，试讨论函数 $F(x)$ 的单调性.

解析 $F(x)=f(x)-kx=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-kx, & x<1\\ -\sqrt{x-1}-kx, & x\geqslant 1\end{cases}$，$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}-k, & x<1\\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-k, & x\geqslant 1\end{cases}$

（Ⅰ）当 $x<1$ 时，$F(x)=\dfrac{1}{1-x}-kx$.

① 当 $k\leqslant 0$ 时，函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上是增函数.

② 当 $k>0$ 时，令 $F'(x)=0$，得 $x=1-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. 因为函数 $F'(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上是增函数，所以函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,1-\dfrac{1}{\sqrt{k}})$ 上，$F'(x)<0$，在区间 $(1-\dfrac{1}{\sqrt{k}},1)$ 上 $F'(x)>0$，所以函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,1-\dfrac{1}{\sqrt{k}})$ 上是减函数，在 $(1-\dfrac{1}{\sqrt{k}},1)$ 上是增函数.

（Ⅱ）当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=-\sqrt{x-1}-kx$，所以 $F'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-k$.

① 当 $k>0$ 时，$F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为减函数.

② 当 $k\leqslant 0$ 时，令 $F'(x)=0$，得 $x=1+\dfrac{1}{4k^2}$，由于 $F'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，所以在区间在 $(1,1+\dfrac{1}{4k^2})$ 上，$F'(x)<0$，在区间 $(1+\dfrac{1}{4k^2},+\infty)$ 上 $F'(x)>0$.

所以函数 $F(x)$ 在 $(1,1+\dfrac{1}{4k^2})$ 上是减函数，在 $(1+\dfrac{1}{4k^2},+\infty)$ 上是增函数.

综上所知，当 $k>0$ 时，函数 $F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 和 $(-\infty,1-\dfrac{1}{\sqrt{k}})$ 上是减函数，在 $(1-\dfrac{1}{\sqrt{k}},1)$ 上是增函数.

当 $k\leqslant 0$ 时，函数 $F(x)$ 在 $(1,1+\dfrac{1}{4k^2})$ 上是减函数，函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1+\dfrac{1}{4k^2},+\infty)$ 上是增函数.

点评 本题在考查函数单调性的同时，侧重考查分类讨论思想在解题中的灵活应用. 因为要判断函数单调性，就必须先确定参数 a 的取值情况，分 $a=0$ 和 $a\neq 0$ 两种情况讨论. 函数单调性是高考热点问题之一，在历年的高考试题中，考查或利用函数单调性的试题屡见不鲜，既可以考查用定义判断函数

的单调性，用反例否定函数不是单调函数，求单调区间等问题，又可以考查利用函数的单调性求应用题中的最值问题.（高三，★★★）

10. 考查分段函数问题

【例10】　已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<0\\ x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，则不等式 $x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1$ 的解集是（　　）

A. $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant 1\}$

C. $\{x\mid x\leqslant \sqrt{2}-1\}$　　D. $\{x\mid -\sqrt{2}-1\leqslant x\leqslant \sqrt{2}-1\}$

解析　当 $x+1<0$，即 $x<-1$ 时

$$x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1\Rightarrow x+(x+1)[-(x+1)+1]\leqslant 1\Rightarrow x^2+1\geqslant 0\Rightarrow x\in\mathbf{R}$$

因此 $x<-1$. 当 $x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant -1$ 时

$$x+(x+1)f(x+1)\leqslant 1\Rightarrow x+(x+1)[(x+1)-1]\leqslant 1\Rightarrow x^2+2x-1\leqslant 0\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant -1+\sqrt{2}$$

所以不等式的解集是 $\{x\mid x\leqslant \sqrt{2}-1\}$，故选 C.

点评　在处理分段函数问题时，要注意每段函数的定义域，然后注意求问题的并集.（高一，★）

11. 考查对数函数问题

【例11】　设 $a>1$，若存在一个常数 c 使得对于任意的 $x\in[a,2a]$，都有 $y\in[a,a^2]$ 满足方程 $\log_a x+\log_a y=c$，这时 a 的取值的集合为________.

解析　由方程 $\log_a x+\log_a y=c$ 得 $y=\dfrac{a^c}{x}$，又 $x\in[a,2a]$ 且 $a>1$，所以 $y\in[\dfrac{1}{2}a^{c-1},a^{c-1}]$，因为对于任意的 $x\in[a,2a]$，都有 $y\in[a,a^2]$，所以 $[\dfrac{1}{2}a^{c-1},a^{c-1}]\subsetneqq[a,a^2]$，即 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}a^{c-1}\geqslant a\\ a^{c-1}\leqslant a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c-1\geqslant\log_a 2a\\ c-1\leqslant 2\end{cases}$，而满足条件的常数 c 仅有一个，因此有 $\log_a 2a=2$，解得 $a=2$.

点评　本题主要考查对数函数的单调性和简单的对数方程的解法. 在解题时，一定要注意不同的底，对数函数有不同的单调性. 函数最值是函数的主要内容，它在数学各个分支及实际问题中有着广泛的应用，特别是基本初等函数（二次函数、指数函数、对数函数）的最值问题，多年来一直是常考不衰的热点内容之一.（高一，★★）

12. 考查函数图象问题

【例12】　将函数 $y=2^x+1$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移得到函数 $y=2^{x+1}$ 的图象，则（　　）

A. $\boldsymbol{a}=(-1,-1)$　　B. $\boldsymbol{a}=(1,-1)$　　C. $\boldsymbol{a}=(1,1)$　　D. $\boldsymbol{a}=(-1,1)$

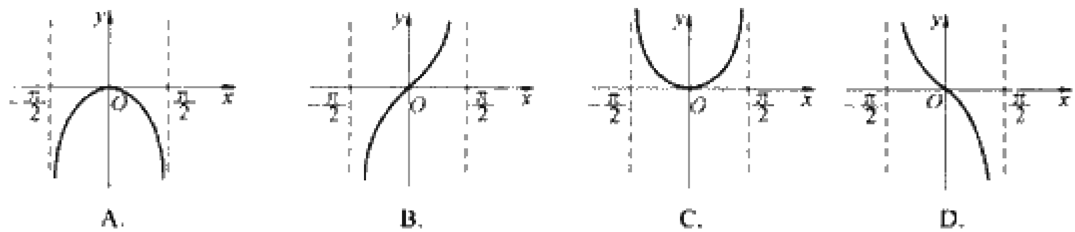
解析　将函数 $y=2^x+1$ 的图象向左平移 1 个单位得到函数 $y=2^{x+1}+1$ 的图象，再向下平移 1 个单位得函数 $y=2^{x+1}$ 的图象，即将函数 $y=2^x+1$ 的图象按向量 $\boldsymbol{a}=(-1,-1)$ 平移得到函数 $y=2^{x+1}$ 的图象. 故选 A.

点评　函数图象类试题，其求解策略是充分挖掘图象信息、运用数形结合思想来解决.（高一，★★）

[illegible]

1. 函数 $y=\ln\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象是（　　）

解析　令 $y=\ln u$，$u=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则函数 $y=\ln\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是由 $y=\ln u$，$u=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 复合而成的. 因为 $y=\ln u$ 在其定义域上是增函数，$u=\cos x$ 在区间



$(-\frac{\pi}{2},0)$ 上是增函数，在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是减函数，所以函数 $y=\ln\cos x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上是增函数，在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是减函数，所以函数 $y=\ln\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象是 A.（高一，★）

2. 如图 2，动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 上，过点 P 作垂直于平面 BB_1D_1D 的直线，与正方体表面相交于 M,N. 设 $BP=x$，$MN=y$，则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是（ ）

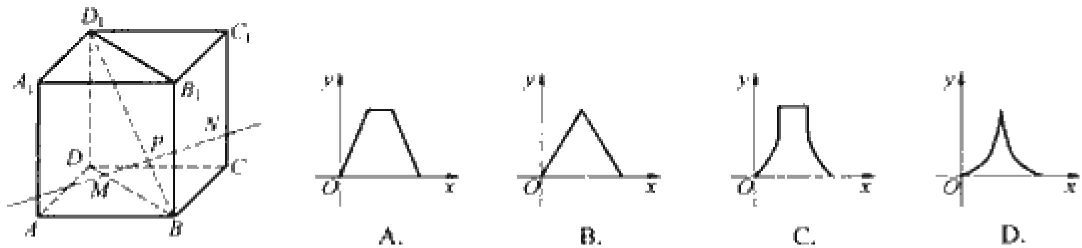


图 2

解析 过对角线 BD_1 作平面 BB_1D_1D 的垂面，设该垂面与 AA_1，CC_1 的交点分别为 E，F，则 E，F 分别为 AA_1、CC_1 的中点，所以当动点 P 在对角线 BD_1 上移动时，M，N 则在菱形 $EBFD_1$ 上移动.

设 $\angle D_1BF=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，当 $BP\leqslant\frac{1}{2}BD_1$ 时，$\frac{\frac{y}{2}}{x}=\tan\alpha$，即 $y=2x\tan\alpha$.

当 $\frac{1}{2}BD_1<BP\leqslant BD_1$ 时，$\frac{\frac{y}{2}}{BD_1-x}=\tan\alpha$，即 $y=2(BD_1-x)\tan\alpha$.

所以 $y=\begin{cases}2x\tan\alpha, & 0<x\leqslant\frac{1}{2}BD_1\\ 2(BD_1-x)\tan\alpha, & \frac{1}{2}BD_1<x\leqslant BD_1\end{cases}$，所以，函数 $y=f(x)$ 的图象大致是 B.（高二，★★）

13. 考查指数函数的综合问题

【例 13】 已知函数 $f(x)=2^x-\frac{1}{2^{|x|}}$.

（Ⅰ）若 $f(x)=2$，求 x 的值；

（Ⅱ）若 $2^tf(2t)+mf(t)\geqslant0$ 对于 $t\in[1,2]$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析 （Ⅰ）当 $x<0$ 时，$f(x)=0$；当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$. 由条件可知 $2^x-\frac{1}{2^x}=2$，即 $2^{2x}-2\cdot2^x-1=0$，解得 $2^x=1\pm\sqrt{2}$. 因为 $2^x>0$，所以 $x=\log_2(1+\sqrt{2})$.

（Ⅱ）当 $t\in[1,2]$ 时，$2^t\left(2^{2t}-\frac{1}{2^{2t}}\right)+m\left(2^t+\frac{1}{2^t}\right)\geqslant0$，即 $m(2^{2t}-1)\geqslant-(2^{4t}-1)$.

因为 $2^{2t}-1>0$，所以 $m\geqslant-(2^{2t}+1)$. 因为 $t\in[1,2]$，所以 $-(1+2^{2t})\in[-17,-5]$，故 m 的取值范围是 $[-5,+\infty)$.

点评 它以函数为依托，综合指数函数、方程、不等式知识交汇点上设计的试题，题型设计新颖，别

具一格，知识浑然一体，反映了知识间的内在联系，较好地体现了知识的整体性和综合性，突出对问题的方法及解决问题的能力的考查．函数、方程与不等式是高中数学的重要内容，它把中学数学各个分支紧紧地联系在一起，一些常见的解题技巧和思想方法都得到了比较充分的体现．（高一，★★）

14. 考查绝对值不等式与函数综合问题

【例 14】 已知函数 $f(x)=|x-8|-|x-4|$．

（Ⅰ）作出函数 $y=f(x)$ 的图象；

（Ⅱ）解不等式 $|x-8|-|x-4|>2$．

解析　（1）

$$f(x)=\begin{cases}4, & x\leqslant 4\\ -2x+12, & 4<x\leqslant 8\\ -4, & x>8\end{cases}$$

图象如图 3、图 4 所示．

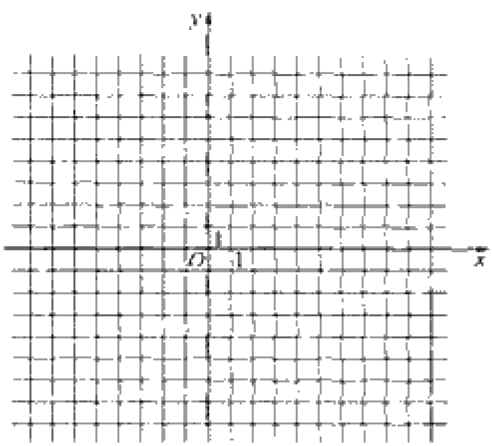


图 3

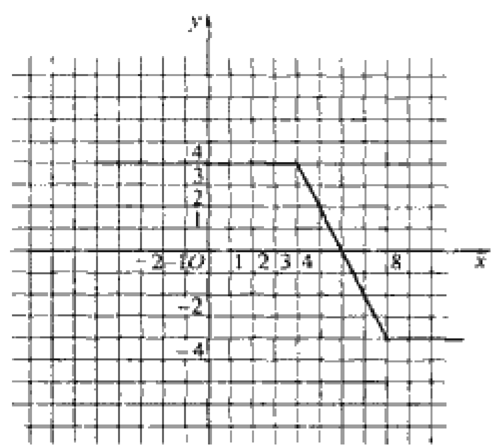


图 4

（2）不等式 $|x-8|-|x-4|>2$，即 $f(x)>2$，由 $-2x+12=2$ 得 $x=5$．

由函数 $f(x)$ 图象可知，原不等式的解集为 $\{x\mid x<5\}$．

点评　本题考查了绝对值的意义、分段函数及其图象、函数最值和不等式等知识，考查分类与整合的思想方法和数形结合的解题技巧．分段函数是自变量在不同的取值范围内，其对应法则也不同的函数．分段函数不是几个函数，而是一个函数．（高一，★★）

15. 考查函数应用问题

【例 15】 如图 5，某地有三家工厂，分别位于矩形 $ABCD$ 的两个顶点 A，B 及 CD 的中点 P 处．$AB=20$ km，$BC=10$ km．为了处理这三家工厂的污水，计划在矩形区域内（含边界）且与 A、B 等距的点 O 建污水处理厂，并铺设三条排污管道 AO，BO，PO．记铺设管道的总长度为 y km．

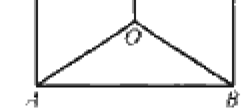


图 5

（Ⅰ）按下列要求建立函数关系式：

① 设 $\angle BAO=\theta$(rad)，将 y 表示成 θ 的函数．

② 设 $AO=x$ km，将 y 表示成 x 的函数．

（Ⅱ）请你选用(Ⅰ)中的一个函数关系式，确定污水处理厂 O 的位置，使三条污水管道的总长度最短．

解析 （Ⅰ）延长 PO 交 AB 于点 Q，则 $AQ=10$ km.

① 设 $\angle BAO=\theta(\text{rad})$，则 $AO=\dfrac{10}{\cos\theta}$，$OQ=10\tan\theta$，则 $PO=10-10\tan\theta$，显然有 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，即

$$y=\frac{20}{\cos\theta}+10-10\tan\theta=\frac{20-10\sin\theta}{\cos\theta}+10,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$$

② 设 $OA=x$ km，则

$$OQ=\sqrt{x^2-100},\quad 10\leqslant x\leqslant 10\sqrt{2}$$

所以
$$y=2x+10-\sqrt{x^2-100},\quad 10\leqslant x\leqslant 10\sqrt{2}$$

（Ⅱ）若选①，则

$$y'=\frac{-10\cos^2\theta-(20-10\sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=\frac{20\sin\theta-10}{\cos^2\theta}$$

令 $y'=0$，解得 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$. 经进一步研究知，当且仅当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时，y 取最小值 $10\sqrt{3}+10$.

即当 $\angle BAO=\dfrac{\pi}{6}$ 时，三条排污管道的总长度最短，最短长度为 $(10\sqrt{3}+10)$km.

若选②，则 $y'=2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-100}}$. 令 $y'=0$，解得 $x=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$. 经进一步研究知，当且仅当 $x=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ 时，y 取最小值 $10\sqrt{3}+10$. 即当 $OA=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ 时，三条排污管道的总长度最短，最短长度为 $(10\sqrt{3}+10)$km.

点评 近几年来，高考试题带动了一大批"以实际问题为背景，以函数模型为载体"的应用题问世，解此类问题建立函数模型是关键. 函数应用性问题，题源丰富，内容深刻，解法灵活多样，是历年高考应用性问题的一个热点. 解此题正确理解增长率是关键.（高三，★★）

16. 考查三个二次问题

【例 16】 已知函数 $f(x)=x^2+2x+a$，$f(bx)=9x^2-6x+2$，其中 $x\in\mathbf{R}$，a,b 为常数，则方程 $f(ax+b)=0$ 的解集为________.

解析 因为 $f(bx)=(bx)^2+2bx+a=9x^2-6x+2$，所以

$$\begin{cases}b^2=9\\2b=-6\\a=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-3\\a=2\end{cases}$$

所以
$$f(ax+b)=(2x-3)^2+2(2x-3)+2=4x^2-8x+5$$

又
$$\Delta=8^2-4\times4\times5=-16<0$$

所以方程 $f(ax+b)=0$ 无解，即解集为 $\varnothing$.

点评 二次函数、二次不等式、二次方程是高中数学的重要内容，它把中学数学各个分支紧紧地联系在一起. 以"三个二次"为载体，综合二次函数、二次不等式、二次方程交叉汇合处为主干，构筑成知识网络型代数推理题，在高考试题中出现的频率相当高，占据着令人瞩目的地位.（高一，★）

[illegible]

水库的蓄水量随时间而变化，现用 t 表示时间，以月为单位，年初为起点，根据历年数据，某水库的蓄水量（单位：亿 m^3）关于 t 的近似函数关系式为

$$V(t)=\begin{cases}(-t^2+14t-40)e^{\frac{t}{4}}+50, & 0<t\leqslant10\\4(t-10)(3t-41)+50, & 10<t\leqslant12\end{cases}$$

该水库的蓄水量小于 50 的时期称为枯水期. 以 $i-1<t<i$ 表示第 $i(i=1,2,\cdots,12)$ 月份，问一年内哪

几个月份是枯水期？

解析 ①当$0 < t \leqslant 10$时，$V(t) = (-t^2 + 14t - 40)e^{\frac{t}{4}} + 50 < 50$，化简得$t^2 + 14t - 40 > 0$，解得$t < 4$或$t > 10$，又$0 < t \leqslant 10$，故$0 < t < 4$.

②当$10 < t \leqslant 12$时，$V(t) = 4(t - 10)(3t - 41) + 50 < 50$，化简得$(t - 10)(3t - 41) < 0$，解得$10 < t < \frac{41}{3}$，又$10 < t \leqslant 12$，故$10 < t \leqslant 12$.

综上得$0 < t < 4$或$10 < t \leqslant 12$，故知枯水期为1月、2月、3月、4月、11月、12月共6个月.（高一，★★★）

17. 考查函数与方程问题

【例17】 方程$x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$的解可视为函数$y = x + \sqrt{2}$的与函数$y = \frac{1}{x}$的图象交点的横坐标.若方程$x^4 + ax - 4 = 0$的各个实根$x_1, x_2, \cdots, x_k (k \leqslant 4)$所对应的点$(x_i, \frac{4}{x_i})(i = 1, 2, \cdots, k)$均在直线$y = x$的同侧，则实数$a$的取值范围是________.

解析 方程$x^4 + ax - 4 = 0$的根可看作函数$y = x^3 + a$与函数$y = \frac{4}{x}$的图象交点的横坐标，且交点在$y = x$的同侧.

函数$y = \frac{4}{x}$与$y = x$的交点为$(2, 2)$，$(-2, -2)$，若函数$y = x^3 + a$也经过$(2, 2)$，即$2 = 2^3 + a$，则$a = -6$，此时$y = x^3 + a$与$y = \frac{4}{x}$图象交点，一个在$y = x$上，一个在$y = x$下方.

同理，若函数$y = x^3 + a$也经过$(-2, -2)$，即$-2 = (-2)^3 + a$，则$a = 6$，此时$y = x^3 + a$与$y = \frac{4}{x}$图象交点，一个在$y = x$上，一个在$y = x$上方.

由数形结合知，$y = x^3 + a$与$y = \frac{4}{x}$图象交点在$y = x$的同侧，则$a > 6$或$a < -6$.

点评 函数与方程是两个不同的概念，但它们之间有着密切的联系，一个函数若有解析表达式，那么这个表达式就可看作一个方程，这样，许多函数的问题可以用方程的方法来解决.也就是说，对于函数$y = f(x)$，当$y = 0$时，就转化为方程$f(x) = 0$；反之，也可以把函数式$y = f(x)$看作二元方程$y - f(x) = 0$，函数与方程这种相互转化的关系十分重要.（高一，★★★）

18. 考查函数的多向综合问题

【例18】 设函数$f(x) = \frac{1}{x\ln x}(x > 0$且$x \neq 1)$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）已知$2^{\frac{1}{x}} > x^a$对任意$x \in (0, 1)$成立，求实数a的取值范围.

解析 （Ⅰ）$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2\ln^2 x}$.令$f'(x) = 0$，则$x = \frac{1}{e}$.

列表如表1所示.

表1

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−
$f(x)$	单调增	极大值$f(\frac{1}{e})$	单调减	单调减

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,\frac{1}{e})$，单调减区间为 $(\frac{1}{e},1)$ 和 $(1,+\infty)$.

（Ⅱ）在 $2^{\frac{1}{x}} > x^a$ 两边取对数，得 $\frac{1}{x}\ln 2 > a\ln x$. 由于 $x\in(0,1)$，所以

$$\frac{a}{\ln 2} > \frac{1}{x\ln x} \qquad ①$$

由（Ⅰ）结果知，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{e}\right)=-e$.

为使式①对任意 $x\in(0,1)$ 成立，当且仅当 $\frac{a}{\ln 2}>-e$，即 $a>-e\ln 2$ 为所求范围.

点评 本题主要考查导数的概念和计算，利用导数研究函数的单调性，利用单调性求最值以及不等式的性质.（高三，★★）

[illegible]

设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；（Ⅱ）是否存在实数 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$？若存在，求 a 的取值范围；若不存在，试说明理由.

解析 （Ⅰ） $f'(x)=\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=-\frac{\ln x}{(1+x)^2}$

故当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减. 由此知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的极大值为 $f(1)=\ln 2$，没有最小值.

（Ⅱ）① 当 $a\leqslant 0$ 时，由于

$$f(x)=\frac{(1+x)\ln(1+x)-x\ln x}{1+x}=\frac{\ln(1+x)+x[\ln(1+x)-\ln x]}{1+x}>0$$

故关于 x 的不等式的解集为 $(0,+\infty)$.

② 当 $a>0$ 时，由

$$f(x)=\frac{\ln x}{1+x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

知

$$f(2^n)=\frac{\ln 2^n}{1+2^n}+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

其中 n 为正整数，且有

$$\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{a}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n}<e^{\frac{a}{2}}-1\Leftrightarrow n>-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1)$$

又 $n\geqslant 2$ 时

$$\frac{\ln 2^n}{1+2^n}=\frac{n\ln 2}{1+(1+1)^n}<\frac{n\ln 2}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2\ln 2}{n-1}$$

且

$$\frac{2\ln 2}{n-1}<\frac{a}{2}\Leftrightarrow n>\frac{4\ln 2}{a}+1$$

取整数 n_0 满足 $n_0>-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1)$，$n_0>\frac{4\ln 2}{a}+1$，且 $n_0\geqslant 2$，则

$$f(2^{n_0})=\frac{n_0\ln 2}{1+2^{n_0}}+\ln\left(1+\frac{1}{2^{n_0}}\right)<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$$

即当 $a>0$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集不是 $(0,+\infty)$.

综合①②知，存在 a，使得关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant a$ 的解集为 $(0,+\infty)$，且 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

点评 本小题主要考查函数的导数、单调性、极值、不等式等基础知识，考查综合利用数学知识分析问题、解决问题的能力.（高三，★★★）

（五）数列通项公式的求法综析

数列通项的求法是数列的重要题型，每年高考题均有所涉及，多数是以解答题形式出现，笔者拟就2008年高考题为素材，探究有关数列通项（与通项无关的部分省略）的求法，供各位读者参考.

1. 观察法

根据题意得到数列的前几项，通过观察猜想出通项公式，然后利用数学归纳法加以证明即可（除要求不需要证明外）.

【例1】（辽宁卷第21题）在数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中，$a_1=2$，$b_1=4$，且a_n、b_n、a_{n+1}成等差数列，b_n、a_{n+1}、b_{n+1}成等比数列（$n\in\mathbf{N}^*$）.求a_2、a_3、a_4及b_2、b_3、b_4，由此猜测$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式，并证明你的结论.

解析 由题意条件得$2b_n=a_n+a_{n+1}$，$a_{n+1}^2=b_nb_{n+1}$，由此可得$a_2=6$，$b_2=9$，$a_3=12$，$b_3=16$，$a_4=20$，$b_4=25$.猜测$a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$.

用数学归纳法证明.

① 当$n=1$时，由上可得结论成立.

② 假设当$n=k$时，结论成立，即$a_k=k(k+1)$，$b_k=(k+1)^2$.

那么当$n=k+1$时，$a_{k+1}=2b_k-a_k=2(k+1)^2-k(k+1)=(k+1)(k+2)$，$b_{k+1}=\dfrac{a_{k+1}^2}{b_k}=(k+2)^2$.

所以当$n=k+1$时，结论也成立.

由①②，可知$a_n=n(n+1)$，$b_n=(n+1)^2$对一切正整数都成立.

2. 公式法

根据题意求等差或等比数列的基本量，直接写出通项公式.

【例2】（江西卷第19题）数列$\{a_n\}$为等差数列，a_n为正整数，其前n项和为S_n，数列$\{b_n\}$为等比数列，且$a_1=3$，$b_1=1$，数列$\{b_{a_n}\}$是公比为64的等比数列，$b_2S_2=64$.求a_n、b_n.

解析 设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q，则d为正整数，$a_n=3+(n-1)d$，$b_n=q^{n-1}$，依题意有

$$\begin{cases}\dfrac{b_{a_{n+1}}}{b_{a_n}}=\dfrac{q^{3+nd}}{q^{3+(n-1)d}}=q^d=64=2^6\\ S_2b_2=(6+d)q=64\end{cases}\qquad ①$$

由$(6+d)q=64$知q为正有理数，故d为6的因子1、2、3、6之一，解①得$d=2$，$q=8$，故$a_n=3+2(n-1)=2n+1$，$b_n=8^{n-1}$.

3. 利用$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，$a_1=S_1$求数列的通项公式

【例3】（全国Ⅱ第20题）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.已知$a_1=a$，$a_{n+1}=S_n+3^n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）设$b_n=S_n-3^n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(Ⅱ) 若 $a_{n+1} \geqslant a_n, n \in \mathbf{N}^*$, 求 a 的取值范围.

解析　(Ⅰ) 依题意, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = S_n + 3^n$, 即 $S_{n+1} = 2S_n + 3^n$, 由此得 $S_{n+1} - 3^{n+1} = 2(S_n - 3^n)$. 因此, 所求通项公式为

$$b_n = S_n - 3^n = (a-3)2^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}^* \qquad ①$$

(Ⅱ) 由 ① 知

$$S_n = 3^n + (a-3)2^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$$

于是, 当 $n \geqslant 2$ 时

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n + (a-3) \times 2^{n-1} - 3^{n-1} - (a-3) \times 2^{n-2} = 2 \times 3^{n-1} + (a-3)2^{n-2}$$

$$a_{n+1} - a_n = 4 \times 3^{n-1} + (a-3)2^{n-2} = 2^{n-2}\left[12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + a - 3\right]$$

当 $n \geqslant 2$ 时

$$a_{n+1} \geqslant a_n \Leftrightarrow 12 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + a - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -9$$

又 $a_2 = a_1 + 3 > a_1$, 综上, 所求的 a 的取值范围是 $[-9, +\infty)$.

4. 构造等差或等比数列求通项公式

【例 4】 (山东卷第 19 题) 将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排列如下:

$$\begin{array}{llll} a_1 & & & \\ a_2 & a_3 & & \\ a_4 & a_5 & a_6 & \\ a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \cdots & & & \end{array}$$

记其中的第一列数 $a_1, a_2, a_4, a_7, \cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$, $b_1 = a_1 = 1$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $\dfrac{2b_n}{b_nS_n - S_n^2} = 1(n \geqslant 2)$. 证明: 数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列, 并求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解析　由已知 $\dfrac{2b_n}{b_nS_n - S_n^2} = 1(n \geqslant 2)$ 及 $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ 可得

$$\frac{2(S_n - S_{n-1})}{(S_n - S_{n-1})S_n - S_n^2} = 1$$

整理得

$$\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = \frac{1}{2}$$

又 $S_1 = b_1 = a_1 = 1$, 所以数列 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列.

由上可知

$$\frac{1}{S_n} = 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n+1}{2}, S_n = \frac{2}{n+1}$$

所以当 $n \geqslant 2$ 时

$$b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = -\frac{2}{n(n+1)}$$

所以

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ -\dfrac{2}{n(n+1)}, & n \geqslant 2 \end{cases}$$

【例 5】 (四川卷第 20 题) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $ba_n - 2^n = (b-1)S_n$.

(Ⅰ) 证明: 当 $b = 2$ 时, $\{a_n - n \cdot 2^{n-1}\}$ 是等比数列;

(Ⅱ)求$\{a_n\}$的通项公式.

解析 由题意知$a_1=2$,且$ba_n-2^n=(b-1)S_n$,$ba_{n+1}-2^{n+1}=(b-1)S_{n+1}$,两式相减得

$$b(a_{n+1}-a_n)-2^n=(b-1)a_{n+1}$$

即

$$a_{n+1}=ba_n+2^n \quad ①$$

(Ⅰ)当$b=2$时,由①知$a_{n+1}=2a_n+2^n$,于是

$$a_{n+1}-(n+1)\cdot 2^n=2a_n+2^n-(n+1)\cdot 2^n=2(a_n-n\cdot 2^{n-1})$$

又$a_1-1\cdot 2^{1-1}=1\neq 0$,所以$\{a_n-n\cdot 2^{n-1}\}$是首项为1,公比为2的等比数列.

(Ⅱ)当$b=2$时,由(Ⅰ)知$a_n-n\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$,即$a_n=(n+1)2^{n-1}$.

当$b\neq 2$时,由①得

$$a_{n+1}-\frac{1}{2-b}\cdot 2^{n+1}=ba_n+2^n-\frac{1}{2-b}\cdot 2^{n+1}=ba_n-\frac{b}{2-b}\cdot 2^n=b\left(a_n-\frac{1}{2-b}\cdot 2^n\right)$$

因此
$$a_{n+1}-\frac{1}{2-b}\cdot 2^{n+1}=b\left(a_n-\frac{1}{2-b}\cdot 2^n\right)=\frac{2(1-b)}{2-b}\cdot b^n$$

得
$$a_n=\begin{cases}2, & n=1\\ \dfrac{1}{2-b}[2^n+(2-2b)b^{n-1}], & n\geqslant 2\end{cases}$$

注 形如$a_{n+1}=pa_n+f(n)$形式的均可转化为等比数列求通项,利用待定系数法;另外也可以将等式$a_{n+1}=pa_n+f(n)$两边同时除以p^{n+1}得$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$,利用累加法求解.

5.累加法

形如$a_{n+1}-a_n=f(n)$的形式可利用累加法求通项公式.

【例6】(天津卷第20题)在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=2$,且$a_{n+1}=(1+q)a_n-qa_{n-1}(n\geqslant 2,q\neq 0)$.

(Ⅰ)设$b_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,证明:$\{b_n\}$是等比数列;

(Ⅱ)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析 (Ⅰ)由题设$a_{n+1}=(1+q)a_n-qa_{n-1}(n\geqslant 2)$,得$a_{n+1}-a_n=q(a_n-a_{n-1})$,即$b_n=qb_{n-1}$,$n\geqslant 2$.又$b_1=a_2-a_1=1$,$q\neq 0$,所以$\{b_n\}$是首项为1,公比为$q$的等比数列.

(Ⅱ)由(Ⅰ)得

$$a_2-a_1=1,a_3-a_2=q,\cdots,a_n-a_{n-1}=q^2,n\geqslant 2$$

将以上各式相加,得

$$a_n-a_1=1+q+\cdots+q^{n-2},n\geqslant 2$$

(或$a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+q+\cdots+q^{n-2}(n\geqslant 2)$)

所以当$n\geqslant 2$时

$$a_n=\begin{cases}1+\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}, & q\neq 1\\ n, & q=1\end{cases}$$

式子对$n=1$显然也成立,故

$$a_n=\begin{cases}1+\dfrac{1-q^{n-1}}{1-q}, & q\neq 1\\ n, & q=1\end{cases}$$

6.累乘法

形如$a_{n+1}=a_n\cdot f(n)$的形式,可利用累乘法求数列的通项公式.

【例7】（四川实区卷第20题）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1,2a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2a_n$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解法1 由$2a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2a_n$得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}$$

那么当$n\geqslant2$时

$$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{1^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{(n-1)^2}\right)=\frac{n^2}{2^{n-1}}$$

而当$n=1$时，$\frac{a_n}{n^2}=1$，则$a_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$.

解法2 由$2a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2a_n$得

$$\frac{2^{n+1}a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{2^na_n}{n^2}$$

故数列$\left\{\frac{2^na_n}{n^2}\right\}$为常数列，则$\frac{2^na_n}{n^2}=\frac{2a_1}{1}=2$，即$a_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$.

注 构造常数列法求通项也是求通项公式的一种方法，利用此法求通项必须具有较强的观察能力.

7. 倒数法

形如$a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+s}$（$p$、$q$、$s$为常数）的形式，可利用两边取倒数求通项公式.

【例8】（陕西卷第22题）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\frac{3}{5}$，$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$，$n=1,2,\cdots$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解法1 因为$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3a_n}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，又$\frac{1}{a_1}-1=\frac{2}{3}$，所以$\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$是以$\frac{2}{3}$为首项，$\frac{1}{3}$为公比的等比数列，所以$\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{2}{3^n}$，所以$a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$.

解法2 设$x=\frac{3x}{2x+1}$，解得$x_1=0,x_2=1$.

$$a_{n+1}-1=\frac{3a_n}{2a_n+1}-1$$

整理得

$$a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{2a_n+1}$$

则

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{2a_n+1}{a_n-1}=2+\frac{3}{a_n-1}$$

即

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}+1=\frac{2a_n+1}{a_n-1}=3\left(\frac{1}{a_n-1}+1\right)$$

故数列$\left\{\frac{1}{a_n-1}+1\right\}$是以$\frac{1}{a_1-1}+1=-\frac{3}{2}$为首项，3为公比的等比数列，则

$$\frac{1}{a_n-1}+1=-\frac{3}{2}\cdot3^{n-1}$$

即

$$a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$$

解法3 由

$$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1},a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{2a_n+1}$$

可得
$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}-1}=\frac{3a_n}{a_n-1}$$

故数列$\left\{\frac{a_n}{a_n-1}\right\}$是以$\frac{a_1}{a_1-1}=-\frac{3}{2}$为首项,3为公比的等比数列,则$\frac{a_n}{a_n-1}=-\frac{3^n}{2}$,即$a_n=\frac{3^n}{3^n+2}$.

注 形如$a_{n+1}=\frac{sa_n+t}{pa_n+q}$($s、t、p、q$为常数),可利用方程$x=\frac{sx+t}{px+q}$,解得两根$x_1、x_2$,然后利用$a_{n+1}-x_1=\frac{sa_n+t}{pa_n+q}-x_1$,或$a_{n+1}-x_2=\frac{sa_n+t}{pa_n+q}-x_2$直接整理转化求解,也可将两式作比进行求解.此种求通项公式方法称"特征法",在前几年广东高考试题中有所体现.

8.对数法

形如$a_{n+2}=a_{n+1}^{s}\cdot a_n^{t}$形式的可利用两边取对数法求通项公式.

【例9】(重庆卷第22题)设各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_n=a_{n+1}^{3/2}a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)若$a_2=\frac{1}{4}$,求$a_3、a_4$,并猜想a_{2008}的值(不需证明);

(Ⅱ)记$b_n=a_1a_2\cdots a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,若$b_n\geqslant2\sqrt{2}$对$n\geqslant2$恒成立,求$a_2$的值及数列$\{b_n\}$的通项公式.

解析 (Ⅰ)因$a_1=2,a_2=2^{-2}$,故

$$a_3=a_1a_2^{-3/2}=2^4,a_4=a_2a_3^{-3/2}=2^{-8}$$

由此有
$$a_1=2^{(-2)^0},a_2=2^{(-2)^1},a_3=2^{(-2)^2},a_4=2^{(-2)^3}$$

故猜想$\{a_n\}$的通项为$a_n=2^{(-2)^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$,从而$a_{2008}=2^{(-2)^{2007}}$.

(Ⅱ)令$x_n=\log_2a_n$,S_n表示x_n的前n项和,则$b_n=2^{S_n}$,由题设知$x_1=1$且

$$x_n=\frac{3}{2}x_{n+1}+x_{n+2},n\in\mathbf{N}^*\qquad ①$$

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant\frac{3}{2},n\geqslant2\qquad ②$$

因式②对$n=2$成立,有$\frac{3}{2}\leqslant x_1+x_2$,又$x_1=1$得

$$x_2\geqslant\frac{1}{2}\qquad ③$$

下用反证法证明$x_2\leqslant\frac{1}{2}$.假设$x_2>\frac{1}{2}$,由①得

$$x_{n+2}+2x_{n+1}=\left(x_{n+2}+\frac{3}{2}x_{n+1}\right)+\frac{1}{2}x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_{n+1}+2x_n)$$

因此数列$\{x_{n+1}+2x_n\}$是首项为x_2+2,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列,故

$$x_{n+1}+2x_n=(x_2+2)\frac{1}{2^{n-1}},n\in\mathbf{N}^*\qquad ④$$

又由①知

$$x_{n+2}-\frac{1}{2}x_{n+1}=\left(x_n-\frac{3}{2}x_{n+1}\right)-\frac{1}{2}x_{n+1}=-2\left(x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n\right)$$

因此$\left\{x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n\right\}$是首项为$x_2-\frac{1}{2}$,公比为$-2$的等比数列,所以

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}x_n=\left(x_2-\frac{1}{2}\right)(-2)^{n-1},n\in\mathbf{N}^*\qquad ⑤$$

由④-⑤得

$$\frac{5}{2}x_n=(x_2+2)\frac{1}{2^{n-1}}-\left(x_2-\frac{1}{2}\right)(-2)^{n-1},n\in\mathbf{N}^* \qquad ⑥$$

对 n 求和得

$$\frac{5}{2}S_n=(x_2+2)\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\frac{1-(-2)^n}{3},n\in\mathbf{N}^* \qquad ⑦$$

由题设知 $S_{2k+1}\geqslant\frac{3}{2}$，且由反证假设 $x_2>\frac{1}{2}$ 有

$$(x_2+2)\left(2-\frac{1}{2^{2k}}\right)-\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\frac{2^{2k+1}+1}{3}\geqslant\frac{15}{4},k\in\mathbf{N}^*$$

从而

$$\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2^{2k+1}+1}{3}\leqslant(x_2+2)\left(2-\frac{1}{2^{2k}}\right)-\frac{15}{4}<2x_2+\frac{1}{4},k\in\mathbf{N}^*$$

即不等式 $2^{2k+1}<\dfrac{6x_2+\frac{3}{4}}{x_2-\frac{1}{2}}-1$ 对 $k\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，但这是不可能的，矛盾. 因此 $x_2\leqslant\frac{1}{2}$，综合式③知 $x_2=\frac{1}{2}$，因此 $a_2=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$. 将 $x_2=\frac{1}{2}$ 代入式⑦得

$$S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}},n\in\mathbf{N}^*$$

所以

$$b_n=2^{S_n}=2^{2-\frac{1}{2^{n-1}}},n\in\mathbf{N}^*$$

9.方程法

通过方程的根与系数的关系建立数列前后项间的关系，然后求解即可.

【例10】（广东卷第21题）设 p、q 为实数，α、β 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两个实根，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=p,x_2=p^2-q,x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}(n=3,4,\cdots)$.

（Ⅰ）证明：$\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$；（Ⅱ）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解析 （Ⅰ）由求根公式，不妨设 $\alpha<\beta$，得 $\alpha=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$，$\beta=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$，所以

$$\alpha+\beta=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=p$$

$$\alpha\beta=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\times\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=q$$

（Ⅱ）设 $x_n-sx_{n-1}=t(x_{n-1}-sx_{n-2})$，则 $x_n=(s+t)x_{n-1}-stx_{n-2}$，由 $x_n=px_{n-1}-qx_{n-2}$ 得 $\begin{cases}s+t=p\\st=q\end{cases}$，消去 t，得 $s^2-ps+q=0$，所以 s 是方程 $x^2-px+q=0$ 的根，由题意可知，$s_1=\alpha,s_2=\beta$.

①当 $\alpha\neq\beta$ 时，此时方程组 $\begin{cases}s+t=p\\st=q\end{cases}$ 的解记为 $\begin{cases}s_1=\alpha\\t_1=\beta\end{cases}$ 或 $\begin{cases}s_2=\alpha\\t_2=\beta\end{cases}$，所以

$$x_n-\alpha x_{n-1}=\beta(x_{n-1}-\alpha x_{n-2}),\quad x_n-\beta x_{n-1}=\alpha(x_{n-1}-\beta x_{n-2})$$

即 $\{x_n-t_1x_{n-1}\}$、$\{x_n-t_2x_{n-1}\}$ 分别是公比为 $s_1=\alpha$、$s_2=\beta$ 的等比数列，由等比数列性质可得

$$x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2},\quad x_n-\beta x_{n-1}=(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}$$

两式相减，得

$$(\beta-\alpha)x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}-(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}$$

因为

$$x_2=p^2-q,x_1=p$$

所以

$$x_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta,x_1=\alpha+\beta$$

所以

$$(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}=\beta^2\cdot\beta^{n-2}=\beta^n,(x_2-\beta x_1)\alpha^{n-2}=\alpha^2\cdot\alpha^{n-2}=\alpha^n$$

所以
$$(\beta-\alpha)x_{n-1}=\beta^n-\alpha^n$$

所以
$$x_{n-1}=\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}$$

所以
$$x_n=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$$

② 当 $\alpha=\beta$ 时，即方程 $x^2-px+q=0$ 有重根，所以 $p^2-4q=0$，即 $(s+t)^2-4st=0$，得 $(s-t)^2=0$，所以 $s=t$，不妨设 $s=t=\alpha$，由 ① 可知

$$x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\beta^{n-2}$$

因为 $\alpha=\beta$，所以

$$x_n-\alpha x_{n-1}=(x_2-\alpha x_1)\alpha^{n-2}=\alpha^n$$

即 $x_n=\alpha x_{n-1}+\alpha^n$，等式两边同时除以 α^n，得 $\frac{x_n}{\alpha^n}=\frac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}}+1$，即 $\frac{x_n}{\alpha^n}-\frac{x_{n-1}}{\alpha^{n-1}}=1$.

所以数列 $\{\frac{x_n}{\alpha^n}\}$ 是以 1 为公差的等差数列，所以

$$\frac{x_n}{\alpha^n}=\frac{x_1}{\alpha}+(n-1)\times 1=\frac{2\alpha}{\alpha}+n-1=n+1$$

所以
$$x_n=n\alpha^n+\alpha^n$$

综上所述
$$x_n=\begin{cases}\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}, & \alpha\neq\beta\\ n\alpha^n+\alpha^n, & \alpha=\beta\end{cases}$$

10. 讨论法

对正整数 n 讨论化简递推公式观察特点求出通项公式.

【例 11】 （湖南卷第 18 题）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=(1+\cos^2\frac{n\pi}{2})a_n+\sin^2\frac{n\pi}{2}$. 求 a_3、a_4，并求数列 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的通项公式.

解 因为 $a_1=1, a_2=2$，所以

$$a_3=(1+\cos^2\frac{\pi}{2})a_1+\sin^2\frac{\pi}{2}=a_1+1=2$$
$$a_4=(1+\cos^2\pi)a_2+\sin^2\pi=2a_2=4$$

一般地，当 $n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$ 时

$$a_{2k+1}=[1+\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{2}]a_{2k-1}+\sin^2\frac{2k-1}{2}\pi=a_{2k-1}+1$$

即
$$a_{2k+1}-a_{2k-1}=1$$

所以数列 $\{a_{2k-1}\}$ 是首项为 1、公差为 1 的等差数列，因此 $a_{2k-1}=k$.

当 $n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时

$$a_{2k+2}=(1+\cos^2\frac{2k\pi}{2})a_{2k}+\sin^2\frac{2k\pi}{2}=2a_{2k}$$

所以数列 $\{a_{2k}\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，因此 $a_{2k}=2^k$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, & n=2k-1, k\in\mathbf{N}^*\\ 2^{\frac{n}{2}}, & n=2k, k\in\mathbf{N}^*\end{cases}$$

11. 迭代法

直接根据递推公式得到从所要求的项依次向前推，直至利用已知项表示出来的式子

即可.

【例 12】（安徽文 21）设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a, a_{n+1}=ca_n+1-c, n\in \mathbf{N}^*$，其中$a, c$为实数，且$c\neq 0$. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解法 1 由题设得$n\geqslant 2$时

$$a_n-1=c(a_{n-1}-1)=c^2(a_{n-2}-1)=\cdots=c^{n-1}(a_1-1)=(a-1)c^{n-1}$$

所以

$$a_n=(a-1)c^{n-1}+1 \quad ①$$

当$n=1$时，$a_1=a$也满足式①.

所以$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=(a-1)c^{n-1}+1, n\in \mathbf{N}^*$$

解法 2 因为$a_{n+1}-1=c(a_n-1)$，所以当$a\neq 1$时，$\{a_n-1\}$是首项为$a-1$，公比为c的等比数列，所以

$$a_n-1=(a-1)c^{n-1}$$

即

$$a_n=(a-1)c^{n-1}+1$$

当$a=1$时，$a_n=1$仍满足上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=(a-1)c^{n-1}+1, n\in \mathbf{N}^*$$

注 求数列通项的方法当然不只这 11 种，并且对于同一个问题的求解也不仅是一种方法，只有平时在学习与探究过程中不断体会与总结，将知识与方法学活，解决问题时才能做到游刃有余.

（六）新高考平面向量试题分析

向量是近代数学中重要和基础的数学概念之一，它具有几何形式和代数形式的“双重身份”，因而成为数形结合的桥梁，成为沟通代数、几何、三角的得力工具．向量的概念从大量的生活实例和丰富的物理素材中抽象出来，反过来，它的理论和方法又成为解决实际生活问题和物理学的重要工具．它之所以有用，关键是它具有一套良好的运算性质，可以使复杂问题简单化、直观化，使代数问题几何化、几何问题代数化．正是由于向量所特有的数形二重性，使它成为中学数学知识的一个交汇点，成为联系多项内容的媒介，在高中数学教学内容中有着广泛的应用，同时也备受高考命题者的青睐．下面以2008年全国高考数学试题为例予以分析．

1．教学要求和考查要求

大纲版教材与新课标版教材的教学要求对比如表1所示．

表1

教学要求对比	
大纲版教材	新课标教材
（1）理解向量的概念，掌握向量的几何表示，了解共线向量的概念 （2）掌握向量的加法与减法 （3）掌握实数与向量的积，理解两个向量共线的充要条件 （4）了解平面向量的基本定理，理解平面向量的坐标概念，掌握平面向量的坐标运算 （5）掌握平面向量的数量积及其几何意义，了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题，掌握向量垂直的条件 （6）掌握线段的定比分点公式和中点坐标公式，并且能熟练运用，掌握平移公式 （7）掌握正弦定理、余弦定理，并能初步运用它们解斜三角形，能利用计算器解决斜三角形的计算问题，通过解三角形的应用来教学，继续提高运用所学知识解决实际问题的能力	（1）了解向量的实际背景，理解平面向量和向量相等的含义，理解向量的几何表示 （2）掌握向量加、减法的运算，并理解其几何意义 （3）掌握向量数乘的运算，并理解其几何意义，以及两个向量共线的含义 （4）了解向量的线性运算性质及其几何意义 （5）了解平面向量的基本定理及其意义 （6）掌握平面向量的正交分解及其坐标表示 （7）会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算，理解用坐标表示的平面向量共线的条件 （8）理解平面向量数量积的含义及其物理意义，体会平面向量的数量积与向量投影的关系 （9）掌握数量积的坐标表达式，会进行平面向量的数量积运算 （10）能运用数量积表示两个向量的夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系 （11）经历用向量方法解决某些简单的平面几何问题、力学问题与其他一些实际问题的过程，体会向量是一种处理几何问题、物理问题等的工具，发展运算能力和解决实际问题的能力
对比说明：与大纲版相比，由于新课标教材的知识内容编排有所变化，如增加了“平面向量的正交分解及其坐标表示”、“平面向量的应用”等内容，因此其教学要求更加突出了向量的实际背景、几何意义、运算功能和应用价值．	

大纲版教材与新课标版教材的考试要求对比如表2所示.

表2

考试要求对比	
大纲版教材	新课标教材
考试内容: 向量、向量的加法与减法、实数与向量的积、平面向量的坐标表示、线段的定比分点、平面向量的数量积、平面两点间的距离、平移 考试要求: (1) 理解向量的概念,掌握向量的几何表示,了解共线向量的概念 (2) 掌握向量的加法和减法 (3) 掌握实数与向量的积,理解两个向量共线的充要条件 (4) 了解平面向量的基本定理,理解平面向量坐标的概念,掌握平面向量坐标运算 (5) 掌握平面向量的数量积及其几何意义,了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题,掌握向量垂直的条件 (6) 掌握平面两点间的距离公式,以及线段的定比分点和中点坐标公式,并且能熟练运用掌握平移公式	1. 平面向量的实际背景及基本概念 (1) 了解向量的实际背景 (2) 理解平面向量概念和两个向量相等的含义 (3) 理解向量的几何表示 2. 向量的线性运算 (1) 掌握向量加、减法的运算,理解其几何意义 (2) 掌握向量数乘的运算及其几何意义,理解两个向量共线的含义 (3) 了解向量的线性运算性质及其几何意义 3. 平面向量的基本定理及坐标表示 (1) 了解平面向量的基本定理及其意义 (2) 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示 (3) 会用坐标表示平面向量的加法、减法与数乘运算 (4) 理解用坐标表示的平面向量共线的条件 4. 平面向量的数量积 (1) 理解平面向量数量积的含义及其物理意义 (2) 了解平面向量的数量积与向量投影的关系 (3) 掌握数量积的坐标表达式,会进行平面向量数量积的运算 (4) 能运用数量积表示两个向量的夹角,会用数量积判断两个平面向量的垂直关系 5. 向量的应用 (1) 会用向量方法解决某些简单的平面几何问题 (2) 会用向量方法解决简单的力学问题与其他一些实际问题
对比说明:教学要求的变化必然带来考试要求的变化,而且两者表述上的差异也十分明显,前者采用考试内容与考试要求分述的方式,后者则将考试内容与要求合二为一,在每个考试内容下分别陈述考试要求,且对考试知识要求的层次进行了部分调整.	

2. 命题特点和知识类型

2008年各套高考数学试题对平面向量考查的统计如表3所示.

表3

卷别	文理	题号	题型	考查的向量知识	交汇考查的内容
广东卷	理	8	选择题	向量的加减法运算	
	文	3	选择题	向量的坐标运算与共线向量	
山东卷	理	15	填空题	向量的数量积	正弦定理、余弦定理
		22	解答题	向量的基本知识	直线与抛物线的位置关系
	文	8	选择题	向量的数量积	正弦定理、三角公式
宁夏海南卷	理	8	选择题	向量共线的充要条件	
		20	解答题	向量的基本知识	椭圆和抛物线的标准方程
	文	5	选择题	向量的坐标运算	直线与圆锥曲线位置关系
		9同理8	选择题		
江苏卷		5	填空题	向量的数量积和模的运算	
全国卷Ⅰ	理	3	选择题	向量的加、减法运算	解三角形、双曲线的离心率
		21	解答题	向量的基础知识	
	文	5同理3	选择题		
		22同理21	解答题		
全国卷Ⅱ	理	13	填空题	向量的基本运算和共线向量	几何知识、不等式知识
		21	解答题	向量的基本知识	
	文	13同理13	填空题		
		22同理21	解答题		
北京卷	理	10	选择题	向量的数量积定义	
	文	11同理10	选择题		
天津卷	理	14	填空题	向量的数量积坐标运算	
	文	14	填空题	向量的坐标运算、向量的模	
辽宁卷	理	5	选择题	向量的基本运算	椭圆的定义、标准方程等
		8	选择题	平移公式	
		20	解答题	向量的垂直、模等概念	
	文	5	选择题	向量的坐标运算	椭圆的定义、标准方程等
		8同理8	选择题		
		21	解答题	向量的垂直、向量的模等概念	
浙江卷	理	9	选择题	向量数量积的基本运算	
		11	填空题	向量的坐标运算及共线向量	
	文	16	填空题	向量的减法、数量积的定义	
福建卷	理	9	选择题	平移公式	函数的导数
		17	解答题	向量的数量积	三角函数的基本公式、三角变换、二次函数的最值
	文	17	解答题	同理17题	

续表 3

卷别	文理	题号	题型	考查的向量知识	交汇考查的内容
湖南卷	理	7	选择题	反向、同向、垂直向量的判定，向量的基本运算	
	文	7 11	选择题 选择题	向量的数量积 向量坐标运算的基本方法	余弦定理
湖北卷	理	1 5	选择题 选择题	向量加法和数量积的坐标运算 平移公式	三角函数的对称轴
	文	1 同理 1	选择题		
重庆卷	理	7	选择题	线段的定比分点公式	
	文	4	选择题	线段的定比分点公式	
江西卷	理	13	填空题	定比分点公式、向量的运算	
	文	7 16	选择题 填空题	向量数量积的性质 向量的基本运算	椭圆的离心率、焦距等概念
上海卷	理	5	填空题	向量的模、向量的运算	
	文	20	解答题	向量的数量积	双曲线的渐近线、点对称等
陕西卷	理	15 20	填空题 解答题	向量加减法、数量积的几何意义及共线向量 向量的数量积定义	抛物线的标准方程和几何性质、直线和曲线位置关系
	文	15 同理 15 21 同理 20	填空题 解答题		
四川卷	理	21	解答题	向量的数量积、模、共线向量	椭圆的离心率、标准方程
	文	3 22	选择题 解答题	向量减法的坐标运算 向量数量积和加法坐标运算	椭圆的标准方程和离心率
安徽卷	理	3 5 22	选择题 选择题 解答题	向量的基本运算 平移公式 线段的定比分点坐标公式	三角函数的图象及性质 直线、椭圆方程及几何性质
	文	2	选择题	向量的基本运算	

从表 3 可以看出，2008 年全国高考数学试题文理共 37 套，总体来说，对平面向量的考查保持了以往的考查比例、考查题型、考查的知识点，但今年高考有些省市在平面向量方面的命题开始降温.

理科涉及平面向量的试题共有 31 道，文科有 27 道，基本上都是选择、填空题. 对平面向量的考查与前几年相比，稳中有降，命题特点主要还是体现在如下三个方面：

(1) 主要考查平面向量的概念、性质和运算法则，理解和运用其直观的几何意义，并能正确地进行计算；

(2) 考查向量的坐标表示，向量的线性运算；

(3) 和其他知识结合在一起，在知识的交汇点设计试题，考查以向量为工具与其他数学知识间的联结和综合运用能力.

具体说来,呈现出如下三个特征:

(1) 突出平面向量学科内综合运用

此类试题主要出现在选择题与填空题中,着重考查平面向量的有关概念与性质,要求考生深刻理解平面向量的相关概念,能熟练进行向量的各种运算,熟悉常用的公式及结论,理解并掌握两向量共线、垂直的充要条件.

(2) 凸现平面向量与函数、不等式、三角函数的综合运用

当平面向量给出的形式中含有未知数时,由向量平行或垂直的充要条件可以得到关于该未知数的关系式.在此基础上,可以设计出有关函数、不等式、三角函数的综合问题.此类题的解题思路是转化为代数运算,其转化途径主要有两种:利用向量平行或垂直的充要条件;利用向量数量积的公式和性质.

(3) 注重平面向量与解析几何的综合运用

由于向量既能体现"形"的直观位置特征,又具有"数"的良好运算性质,是数形结合与转换的桥梁和纽带.而解析几何也具有数形结合与转换的特征,所以在向量与解析几何知识的交汇处设计试题仍是今年命题的特点之一,由于平面几何与解析几何的结合通常涉及夹角、平行、垂直、共线、轨迹等问题的处理,解决此类问题基本思路是将几何问题坐标化、符号化、数量化,从而将推理转化为运算;或者考虑向量运算的几何意义,利用其几何意义解决有关问题.主要包括以下三种题型:运用向量共线的充要条件处理解析几何中有关平行、共线等问题;运用向量的数量积处理解析几何中有关长度、角度、垂直等问题;运用平面向量综合知识,探求动点轨迹方程,还可再进一步探求曲线的性质.

3. 亮点扫描

(1) 微中见著,小中见大

向量一方面具有"形"的特征:方向、位置、长度和夹角等;另一方面,又具有"数"的属性:大小、正负、可进行运算等.向量这种"数"与"形"的双重性,使它成为解决数学问题的有力工具,被广泛用在解决代数、三角、几何等问题中.根据平面向量考查要求和知识特点,2008年高考各卷的部分小题融核心概念、运算技能和思想方法于一体,命题呈现出"小巧灵活,交汇整合"的特色,突出向量的工具色彩.

① 突出对平面向量内部核心概念的理解和基本运算的掌握.

平面向量的模、相等、平行和垂直等是其核心概念,而加法、减法、数乘和数量积等基本运算及运算律是平面向量的核心内容,也是对平面向量核心概念深刻理解的拓展,成为考查的重点是理所当然的.

【例1】 (2008湖南卷,理7)设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点,且 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,则 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$( )

A. 反向平行 B. 同向平行 C. 互相垂直 D. 既不平行也不垂直

解法1 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,由 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,则

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF})=$

$$(\boldsymbol{c}+\frac{1}{3}\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c})=\frac{4}{3}\boldsymbol{a}+\frac{5}{3}\boldsymbol{b}+\frac{5}{3}\boldsymbol{c}$$

又 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}$$

故 $$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$$

故选A.

解法2 本题还可采用特例法,不妨设 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,取 $AB=BC=3$, $\angle B=90^\circ$,以 B

为坐标原点，直线 BC、BA 分别为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系，则 $E(1,2)$、$D(1,0)$、$F(0,1)$、$A(0,3)$、$C(3,0)$，由此求得 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=(-1,0)$，而 $\overrightarrow{BC}=(3,0)$，故所考查的两个向量反向平行，故选 A.

点评 本题考查反向向量、同向向量、垂直向量的判定和向量的基本运算，要求考生深刻理解平面向量的相关概念，能熟练进行向量的各种运算，熟悉常用公式及结论，理解并掌握两向量共线、垂直的充要条件. 本题还用到了"首尾相连"的封闭图形中的向量和为 0 这个结论. 像这种在选择题与填空题中，主要立足考查平面向量的有关概念与性质的试题还有：湖南卷的文科第 11 题，主要考查向量模的运算公式，文科第 7 题，则是利用余弦定理求角为平面向量求值提供条件；陕西卷的文科第 15 题，主要考查向量数量积的几何意义、向量共线的充要条件及向量加减法的三角形法则；江西卷的文科第 16 题，主要考查向量的基本运算，难在化简运算过程中不易找到解题方向等.

相关链接

1.（2008 湖南卷，文 11）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(-2,0)$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$ ________.

解析 依题意可知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,\sqrt{3})$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|(-1,\sqrt{3})|=\sqrt{1+3}=2$.

2.（2008 陕西卷，文 15）关于平面向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，有下列三个命题：

① 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；② 若 $\boldsymbol{a}=(1,k)$，$\boldsymbol{b}=(-2,6)$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $k=-3$；

③ 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°.

其中真命题的序号为________.（写出所有真命题的序号）

解析 ① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 垂直；

② $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Rightarrow\frac{1}{-2}=\frac{k}{6}\Rightarrow k=-3$；

③ $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Rightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 构成等边三角形，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角应为 30°.

所以真命题只有 ②.

3.（2008 江西卷，文 16）如图 1，正六边形 $ABCDEF$ 中，有下列四个命题：

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{BC}$　　B. $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}$

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$　　D. $(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF})\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF})$

其中真命题的代号是________（写出所有真命题的代号）.

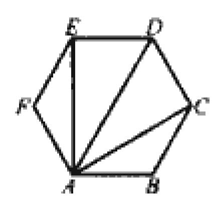


图 1

解析 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$，所以 A 对；

取 AD 的中点 O，则 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$，所以 B 对；

设 $|\overrightarrow{AB}|=1$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}\times2\times\cos\frac{\pi}{6}=3$，而 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=2\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=1$，所以 C 错；

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=1=(\overrightarrow{AF})^2$，所以 D 对，所以真命题的代号是 A、B、D.

4.（2008 湖南卷，文 7）在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$AC=2$，$BC=\sqrt{10}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$（　　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{2}$

解析 依题意可知 $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9+4-10}{2\times3\times2}=\frac{1}{4}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$，故选 D.

② 凸现平面向量与外部其他知识交汇的工具作用.

平面向量的运算主要表现在其工具功能和几何特征上，因此与三角函数和解析几何的自然联结，成为近几年高考的一个热点.

【例 2】（2008 湖北卷，理 5）将函数 $y=3\sin(x-\theta)$ 的图象 F 按向量 $(\frac{\pi}{3},3)$ 平移得到图象 F'，若

F' 的一条对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{4}$，则 θ 的一个可能取值是(　　)

A. $\frac{5}{12}\pi$　　B. $-\frac{5}{12}\pi$　　C. $\frac{11}{12}\pi$　　D. $-\frac{11}{12}\pi$

解析　在函数 $y=3\sin(x-\theta)$ 上取一点 $A(x,y)$ 按向量 $a=(\frac{\pi}{3},3)$ 平移后得到点 $A'=(x',y')$，则

$$\begin{cases}x'=x+\frac{\pi}{3}\\ y'=y+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x'-\frac{\pi}{3}\\ y=y'-3\end{cases}$$

即
$$y'-3=3\sin(x'-\frac{\pi}{3}-\theta)$$

即 F' 的函数式是
$$y=3\sin(x-\frac{\pi}{3}-\theta)+3$$

F' 的对称轴为
$$x-\frac{\pi}{3}-\theta=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbf{Z}$$

即
$$x=k\pi+\frac{5\pi}{6}+\theta,\quad k\in\mathbf{Z}$$

而 F' 的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{4}$，所以

$$k\pi+\frac{5\pi}{6}+\theta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=-k\pi-\frac{7\pi}{12},\quad k\in\mathbf{Z}$$

结合选项，当 $k=-1$ 时，$\theta=\frac{5\pi}{12}$，故选 A.

点评　本题利用向量的平移作为工具考查三角函数的对称轴，利用课本上给出的公式代入直接计算即可得出.类似的考查方式还有安徽卷理科第 5 题，利用向量的平移变换考查三角函数的图象和性质；福建卷理科第 9 题，将向量的平移变换与三角函数的导数交汇考查；江西卷文科第 7 题利用向量数量积作工具，实则考查椭圆的基本概念和基本性质等.

[redacted]

1.(2008 安徽卷，理 5) 将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象按向量 α 平移后所得的图象关于点 $(-\frac{\pi}{12},0)$ 中心对称，则向量 α 的坐标可能为(　　)

A. $(-\frac{\pi}{12},0)$　　B. $(-\frac{\pi}{6},0)$　　C. $(\frac{\pi}{12},0)$　　D. $(\frac{\pi}{6},0)$

解析　同例 1 可知应选 C.

2.(2008 福建卷，理 9) 函数 $f(x)=\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的图象按向量 $(m,0)$ 平移后，得到函数 $y=-f'(x)$ 的图象，则 m 的值可以为(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $-\pi$　　D. $-\frac{\pi}{2}$

解析　$y=-f'(x)=\sin x$，而 $f(x)=\cos x(x\in\mathbf{R})$ 的图象按向量 $(m,0)$ 平移后，得到 $y=\cos(x-m)$，所以 $\cos(x-m)=\sin x$，故 m 可以为 $\frac{\pi}{2}$.

3.(2008 江西卷，文 7) 已知 F_1、F_2 是椭圆的两个焦点，且满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$ 的点 M 总在椭圆内部，则椭圆离心率的取值范围是(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(0,\frac{1}{2}]$　　C. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D. $[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

解析　由题知，垂足的轨迹为以焦距为直径的圆，则

$$c < b \Rightarrow c^2 < b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow e^2 < \frac{1}{2}$$

又 $e \in (0,1)$，所以 $e \in (0,\frac{1}{2})$，故选 C.

(2) 知识内容自然联结，思想方法融会贯通

利用平面向量天然具备的代数与几何的双重特性，将其作为联结其他数学知识的纽带，有效地考查考生的数形结合思想和数学知识的联结能力，今年部分试题继续保持平面向量与三角函数结合或平面向量与解析几何结合的命题思路，呈现出"综合应用，融会贯通"的特色，充分彰显平面向量的交汇价值.

【例 3】 (2008 福建卷，理 17) 已知向量 $\boldsymbol{m} = (\sin A, \cos A)$，$\boldsymbol{n} = (\sqrt{3}, -1)$，$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = 1$ 且 A 为锐角.

(Ⅰ) 求 $\angle A$ 的大小；

(Ⅱ) 求函数 $f(x) = \cos 2x + 4\cos A \sin x (x \in \mathbf{R})$ 的值域.

解析　(Ⅰ) 由题意得

$$\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n} = \sqrt{3}\sin A - \cos A = 1, 2\sin(A - \frac{\pi}{6}) = 1, \sin(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

由 A 为锐角得 $A - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$，$A = \frac{\pi}{3}$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ) 知 $\cos A = \frac{1}{2}$，所以

$$f(x) = \cos 2x + 2\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x = -2(\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$$

因为 $x \in \mathbf{R}$，所以 $\sin x \in [-1,1]$，因此，当 $\sin x = \frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $\frac{3}{2}$；当 $\sin x = -1$ 时，$f(x)$ 有最小值 -3，所以所求函数 $f(x)$ 的值域是 $[-3, \frac{3}{2}]$.

点评　本小题以平面向量及其运算为背景，要求考生通过平面向量的数量积计算将问题进行转化，实则是考查三角函数的基本公式、三角恒等变换、一元二次函数的最值等基本知识，考查运算能力. 这种将平面向量与三角函数交汇构题的方式本来已成为近几年命题的一种基本模式，但在今年的试题中似乎已呈现明显的降温，整个 37 套试卷中好像就只有福建卷理科的这道解答题仍保留了这一交汇构题的形式，其余的三角题几乎都转向了比较单一的三角学科内的综合.

【例 4】 (2008 四川卷，理 21) 如图 2，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线为 l，M、N 是 l 上的两个动点，$\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$.

(Ⅰ) 若 $|\overrightarrow{F_1M}| = |\overrightarrow{F_2N}| = 2\sqrt{5}$，求 a、b 的值；

(Ⅱ) 证明：当 $|MN|$ 取最小值时，$\overrightarrow{F_1M} + \overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线.

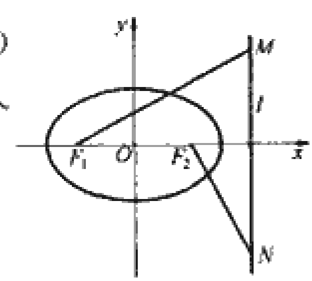


图 2

解析　由 $a^2 - b^2 = c^2$ 与 $e = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $a^2 = 2b^2$，$F_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$，$F_2(\frac{\sqrt{2}}{2}a, 0)$，$l$ 的方程为 $x = \sqrt{2}a$. 设 $M(\sqrt{2}a, y_1)$，$N(\sqrt{2}a, y_2)$，则

$$\overrightarrow{F_1M} = (\frac{3\sqrt{2}}{2}a, y_1), \overrightarrow{F_2N} = (\frac{\sqrt{2}}{2}a, y_2)$$

由 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$，得

$$y_1 y_2 = -\frac{3}{2}a^2 < 0 \qquad ①$$

(Ⅰ) 由 $|\overrightarrow{F_1M}| = |\overrightarrow{F_2N}| = 2\sqrt{5}$，得

$$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2+y_1^2}=2\sqrt{5} \qquad ②$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+y_2^2}=2\sqrt{5} \qquad ③$$

由①、②、③三式，消去 y_1, y_2，并求得 $a^2=4$，故

$$a=2, b=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

（Ⅱ）$|MN|^2=(y_1-y_2)^2=y_1^2+y_2^2-2y_1y_2\geqslant -2y_1y_2-2y_1y_2=-4y_1y_2=6a^2$

当且仅当 $y_1=-y_2=\frac{\sqrt{6}}{2}a$ 或 $y_2=-y_1=\frac{\sqrt{6}}{2}a$ 时，$|MN|$ 取最小值 $\frac{\sqrt{6}}{2}a$，此时

$$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a, y_1\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, y_2\right)=(2\sqrt{2}a, y_1+y_2)=(2\sqrt{2}a, 0)=2\overrightarrow{F_1F_2}$$

故 $\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线.

点评　此题以椭圆的基本量的关系为背景，以平面向量的基本运算为纽带，将向量与解几知识有机整合，先通过向量垂直条件的转化，利用待定系数法求出椭圆的基本量，进而通过当 $|MN|$ 取最小值时的坐标关系，得出 $\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}=2\overrightarrow{F_1F_2}$，从而导出 $\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$ 与 $\overrightarrow{F_1F_2}$ 共线的结论. 充分体现了向量坐标运算的几何意义和圆锥曲线问题中"设而不求"思想的灵活应用.

本题所展现的平面向量与解析几何的交汇，显得自然和谐，交汇融合的味道浓，摆脱了近几年所谓与向量交汇的解析几何试题中出现的"伪向量背景"，使交汇命题真正成为一种珠联璧合，相得益彰的创新途径. 今年试题中类似的题还有安徽卷的理科第 22 题，本题交汇考查了线段的定比分点、直线、椭圆的方程和几何性质，其中第二问如何将向量条件转化为定比分点和共线向量是破题的关键；陕西卷的理科第 20 题、文科第 21 题，此题第二问是向量垂直条件下的参数求解，既可利用向量垂直的坐标运算人手构建参数的方程求解，又可借鉴向量垂直的几何意义转化为直角三角形的中线性质求解，凸现了平面向量在解析几何中简化运算的功能，反映了解析几何的数形结合的本质特点.

[redacted]

1.（2008 安徽卷，理 22）设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $M(\sqrt{2},1)$，且左焦点为 $F_1(-\sqrt{2},0)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）当过点 $P(4,1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交与两不同点 A, B 时，在线段 AB 上取点 Q，满足 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$，证明：点 Q 总在某定直线上.

解析　（Ⅰ）由题意

$$\begin{cases}c^2=2\\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}$$

解得 $a^2=4, b^2=2$，所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）**证法 1**　设点 Q、A、B 的坐标分别为 (x,y)，(x_1,y_1)，(x_2,y_2). 由题设知 $|\overrightarrow{AP}|$、$|\overrightarrow{PB}|$、$|\overrightarrow{AQ}|$、$|\overrightarrow{QB}|$ 均不为零，记 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$，则 $\lambda>0$ 且 $\lambda\neq 1$. 又 A、P、B、Q 四点共线，从而 $\overrightarrow{AP}=-\lambda\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{QB}$. 于是

$$4=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}, 1=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}, x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

从而

$$\frac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{1-\lambda^2}=4x \qquad ①$$

$$\frac{y_1^2-\lambda^2y_2^2}{1-\lambda^2}=y \qquad ②$$

又点 A、B 在椭圆 C 上，即

$$x_1^2+2y_1^2=4 \qquad ③$$

$$x_2^2+2y_2^2=4 \qquad ④$$

① + ② × 2 并结合 ③、④ 得 $4x+2y=4$，即点 $Q(x,y)$ 总在定直线 $2x+y-2=0$ 上.

证法 2 设点 $Q(x,y)$、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，由题设，$|\overrightarrow{AP}|$、$|\overrightarrow{PB}|$、$|\overrightarrow{AQ}|$、$|\overrightarrow{QB}|$ 均不为零，且 $\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{QB}|}$. 又 P、A、Q、B 四点共线，可设 $\overrightarrow{PA}=-\lambda\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{BQ}(\lambda\neq0,\pm1)$，于是

$$x_1=\frac{4-\lambda x}{1-\lambda},\quad y_1=\frac{1-\lambda y}{1-\lambda} \qquad ⑤$$

$$x_2=\frac{4+\lambda x}{1+\lambda},\quad y_2=\frac{1+\lambda y}{1+\lambda} \qquad ⑥$$

由于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 在椭圆 C 上，将 ⑤⑥ 分别代入 C 的方程整理得

$$(x^2+2y^2-4)\lambda^2-4(2x+y-2)\lambda+14=0 \qquad ⑦$$

$$(x^2+2y^2-4)\lambda^2+4(2x+y-2)\lambda+14=0 \qquad ⑧$$

⑧ − ⑦ 得 $8(2x+y-2)\lambda=0$，因为 $\lambda\neq0$，所以 $2x+y-2=0$，即点 $Q(x,y)$ 总在定直线 $2x+y-2=0$ 上.

2.（2008 陕西卷，理 20、文 21）已知抛物线 $C:y=2x^2$，直线 $y=kx+2$ 交 C 于 A、B 两点，M 是线段 AB 的中点，过 M 作 x 轴的垂线交 C 于点 N.

（Ⅰ）证明：抛物线 C 在点 N 处的切线与 AB 平行；

（Ⅱ）是否存在实数 k 使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，若存在，求 k 的值；若不存在，说明理由.

解法 1 （Ⅰ）如图 3，设 $A(x_1,2x_1^2)$、$B(x_2,2x_2^2)$，把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$，得 $2x^2-kx-2=0$，由韦达定理得

$$x_1+x_2=\frac{k}{2},\ x_1x_2=-1$$

所以

$$x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$$

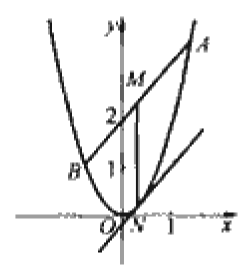


图 3

所以点 N 的坐标为 $\left(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8}\right)$. 设抛物线在点 N 处的切线 l 的方程为

$$y-\frac{k^2}{8}=m\left(x-\frac{k}{4}\right)$$

将 $y=2x^2$ 代入上式得

$$2x^2-mx+\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}=0$$

因为直线 l 与抛物线 C 相切，所以

$$\Delta=m^2-8\left(\frac{mk}{4}-\frac{k^2}{8}\right)=m^2-2mk+k^2=(m-k)^2=0$$

所以 $m=k$，即 $l\,/\!/\,AB$.

（Ⅱ）假设存在实数 k，使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$，则 $NA\perp NB$.

又因为 M 是 AB 的中点，所以 $|MN|=\frac{1}{2}|AB|$. 由（Ⅰ）知

$$y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{1}{2}(kx_1+2+kx_2+2)=\frac{1}{2}[k(x_1+x_2)+4]=\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2}+4\right)=\frac{k^2}{4}+2$$

因为 $MN\perp x$ 轴,所以

$$|MN|=|y_M-y_N|=\frac{k^2}{4}+2-\frac{k^2}{8}=\frac{k^2+16}{8}$$

又

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=$$

$$\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(\frac{k}{2})^2-4\times(-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$$

所以

$$\frac{k^2+16}{8}=\frac{1}{4}\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{k^2+16}$$

解得 $k=\pm2$,即存在 $k=\pm2$,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

解法 2 (Ⅰ)如图 3,设 $A(x_1,2x_1^2)$、$B(x_2,2x_2^2)$,把 $y=kx+2$ 代入 $y=2x^2$ 得

$$2x^2-kx-2=0$$

由韦达定理得

$$x_1+x_2=\frac{k}{2},x_1x_2=-1$$

所以 $x_N=x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{4}$,所以点 N 的坐标为 $\left(\frac{k}{4},\frac{k^2}{8}\right)$.

因为 $y=2x^2$,所以 $y'=4x$,所以抛物线在点 N 处的切线 l 的斜率为 $4\times\frac{k}{4}=k$,所以 $l\parallel AB$.

(Ⅱ)假设存在实数 k,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.由(Ⅰ)知

$$\overrightarrow{NA}=\left(x_1-\frac{k}{4},2x_1^2-\frac{k^2}{8}\right),\quad \overrightarrow{NB}=\left(x_2-\frac{k}{4},2x_2^2-\frac{k^2}{8}\right)$$

则

$$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=(x_1-\frac{k}{4})(x_2-\frac{k}{4})+(2x_1^2-\frac{k^2}{8})(2x_2^2-\frac{k^2}{8})=$$

$$(x_1-\frac{k}{4})(x_2-\frac{k}{4})+4(x_1^2-\frac{k^2}{16})(x_2^2-\frac{k^2}{16})=$$

$$(x_1-\frac{k}{4})(x_2-\frac{k}{4})\cdot\left[1+4(x_1+\frac{k}{4})(x_2+\frac{k}{4})\right]=$$

$$\left[x_1x_2-\frac{k}{4}(x_1+x_2)+\frac{k^2}{16}\right]\cdot\left[1+4x_1x_2+k(x_1+x_2)+\frac{k^2}{4}\right]=$$

$$\left(-1-\frac{k}{4}\times\frac{k}{2}+\frac{k^2}{16}\right)\cdot\left[1+4\times(-1)+k\times\frac{k}{2}+\frac{k^2}{4}\right]=$$

$$\left(-1-\frac{k^2}{16}\right)\left(-3+\frac{3}{4}k^2\right)=0$$

因为 $-1-\frac{k^2}{16}<0$,所以 $-3+\frac{3}{4}k^2=0$,解得 $k=\pm2$,即存在 $k=\pm2$,使 $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=0$.

3.(2008全国卷Ⅰ,理21)双曲线的中心为原点 O,焦点在 x 轴上,两条渐近线分别为 l_1、l_2,经过右焦点 F 垂直于 l_1 的直线分别交 l_1、l_2 于 A、B 两点.已知 $|\overrightarrow{OA}|$、$|\overrightarrow{AB}|$、$|\overrightarrow{OB}|$ 成等差数列,且 $\overrightarrow{BF}$ 与 $\overrightarrow{FA}$ 同向.

(Ⅰ)求双曲线的离心率;

(Ⅱ)设 AB 被双曲线所截得的线段的长为 4,求双曲线的方程.

解析 (Ⅰ)设 $OA=m-d$,$AB=m$,$OB=m+d$,由勾股定理可得

$$(m-d)^2+m^2=(m+d)^2$$

解得 $d=\frac{1}{4}m$.又

$$\tan\angle AOF=\frac{b}{a},\tan\angle AOB=\tan2\angle AOF=\frac{AB}{OA}=\frac{4}{3}$$

由倍角公式得$\dfrac{2\dfrac{b}{a}}{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{4}{3}$，解得$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，则离心率$e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

（Ⅱ）过 F 直线方程为$y=-\dfrac{a}{b}(x-c)$，与双曲线方程$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$联立，并将$a=2b$，$c=\sqrt{5}b$代入化简得

$$\frac{15}{4b^2}x^2-\frac{8\sqrt{5}}{b}x+21=0$$

于是
$$4=\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right][(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

将数值代入有$4=\sqrt{5[(\dfrac{32\sqrt{5}b}{15})^2-4\dfrac{28b^2}{5}]}$，解得$b=3$，故所求的双曲线方程为$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

4.（2008 海南宁夏卷，理 20）在直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2. F_2 也是抛物线 $C_2:y^2=4x$ 的焦点，点 M 为 C_1 与 C_2 在第一象限的交点，且$|MF_2|=\dfrac{5}{3}$.

（Ⅰ）求 C_1 的方程；

（Ⅱ）平面上的点 N 满足$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}$，直线 $l\,/\!/\,MN$，且与 C_1 交于 A、B 两点，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，求直线 l 的方程.

解析 （Ⅰ）依题意可得椭圆 C_1 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）由$\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2}=\overrightarrow{MN}$知四边形$MF_1NF_2$是平行四边形，其中心为坐标原点 O. 因为 $l\,/\!/\,MN$，所以 l 与 OM 的斜率相同，故 l 的斜率 $k=\sqrt{6}$.

设 l 的方程为 $y=\sqrt{6}(x-m)$.

由$\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\y=\sqrt{6}(x-m)\end{cases}$消去 y 并化简得 $9x^2-16mx+8m^2-4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，$x_1+x_2=\dfrac{16m}{9}$，$x_1x_2=\dfrac{8m^2-4}{9}$.

因为$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，所以

$$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+6(x_1-m)(x_2-m)=7x_1x_2-6m(x_1+x_2)+6m^2=$$
$$7\cdot\frac{8m^2-4}{9}-6m\cdot\frac{16m}{9}+6m^2=\frac{1}{9}(14m^2-28)=0$$

所以 $m=\pm\sqrt{2}$，此时

$$\Delta=(16m)^2-4\times9(8m^2-4)>0$$

故所求直线 l 的方程为$y=\sqrt{6}x-2\sqrt{3}$ 或 $y=\sqrt{6}x+2\sqrt{3}$.

5.（2008 上海卷，文 20）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.

（Ⅰ）求双曲线 C 的渐近线方程；

（Ⅱ）已知点 M 的坐标为(0,1)，设 P 是双曲线 C 上的点，Q 是点 P 关于原点的对称点. 记 $\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$，求 λ 的取值范围；

（Ⅲ）已知点 D、E、M 的坐标分别为$(-2,-1)$、$(2,-1)$、$(0,1)$，P 为双曲线上在第一象限内的点. 记 l 为经过原点与点 P 的直线，s 为 $\triangle DEM$ 截直线 l 所得线段的长. 试将 s 表示为直线 l 的斜率 k 的函数.

解析 （Ⅰ）所求渐近线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=0$，$y+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=0$.

（Ⅱ）设 P 的坐标为(x_0,y_0)，则 Q 的坐标为$(-x_0,-y_0)$.

$$\lambda=\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_0,y_0-1)\cdot(-x_0,-y_0-1)=-x_0^2-y_0^2+1=-\frac{3}{2}x_0^2+2$$

因为$|x_0|\geqslant\sqrt{2}$，所以λ的取值范围是$(-\infty,-1]$.

(Ⅲ)若P为双曲线C上第一象限内的点，则直线l的斜率$k\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

由计算可得，当$k\in(0,\frac{1}{2}]$时，$s(k)=\frac{2}{1-k^2}\sqrt{1+k^2}$；

当$k\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$s(k)=\frac{2k+1}{k+k^2}\sqrt{1+k^2}$.

所以s表示为直线l的斜率k的函数是

$$s(k)=\begin{cases}\frac{2}{1-k^2}\sqrt{1+k^2}, & 0<k\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{2k+1}{k+k^2}\sqrt{1+k^2}, & \frac{1}{2}<k<\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

4.复习建议

向量在高中数学内容中是衔接代数与几何的纽带，把向量、向量法穿插、渗透和融合到其他章节中，已形成新高考数学试题中的一道亮丽风景.向量沟通“数”与“形”，是数形结合的典范，向量运算有着极其丰富的背景和几何意义.这些独特之处决定了向量法在高中数学解题中有着广泛的应用，利用向量法解题时应把握好一般规则和思路.近几年涉及向量法的高考命题热点是：向量的加、减法及其几何意义，向量的性质及运算，向量在三角函数和解析几何等知识中的应用.

从今年向量试题的考查方式上看：考查难度呈下降趋势，容易题和中档题居多，即使是与向量交汇的综合题，所用到的向量知识也还是基础知识，因此，复习时应把握好尺度，控制好难度，做到“贴近课本重基础，适可而止抓交汇”，可按如下分类方式设计习题.

(1)平面向量的坐标表示、性质及运算

【例5】 已知$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$为单位向量，它们夹角为$60°$，那么$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=$(　　).

A.$\sqrt{7}$　　B.$\sqrt{10}$　　C.$\sqrt{13}$　　D.4

解法1(解析法)　因为

$$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+9\boldsymbol{b}^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$$

又　$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=1,\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{b}|^2=9,6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos 60°=3$

所以$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$，故选C.

解法2(数形结合法)　如图4，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{b}$，因为$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$且$\angle ABC=120°$.

在$\triangle ABC$中由余弦定理解得$|AC|=\sqrt{13}$，故选C.

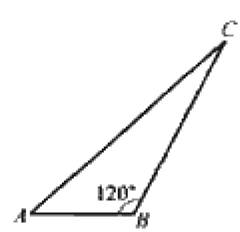


图4

复习意图　通过此题的复习，可让学生懂得熟记向量的运算公式，熟悉向量的性质，理解向量的几何意义，是解决向量问题的关键.

例题链接　已知向量$\boldsymbol{a}=(-2,2)$，$\boldsymbol{b}=(5,k)$，若$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$不超过5，则$k$的取值范围是________.

解析　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,2)+(5,k)=(3,k+2)$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{9+(k+2)^2}\leqslant 5$，解不等式得$-6\leqslant k\leqslant 2$.

(2)平面向量与三角的交汇整合

按照平面向量与三角函数创新交汇的数学考试题的命题特点，在设计复习课教学时，可从以下几个

方面入手：

① 平面向量与三角函数性质的交汇.

【例 6】 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(m,\cos 2x)$，$\boldsymbol{b}=(1+\sin 2x,1)$，$x\in\mathbf{R}$，且 $y=f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4},2)$.

（Ⅰ）求实数 m 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的最小值及此时 x 值的集合.

解 （Ⅰ）$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m(1+\sin 2x)+\cos 2x$，由已知 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=m\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=2$，解得 $m=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得

$$f(x)=1+\sin 2x+\cos 2x=1+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$$

所以当 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-1$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $1-\sqrt{2}$，由 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-1$，得 x 值的集合为 $\{x\mid x=k\pi-\frac{3\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\}$.

例题链接 1. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 3，且满足 $0\leqslant\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leqslant 6$. 设 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ.

（Ⅰ）求 θ 的取值范围；

（Ⅱ）求函数 $f(\theta)=2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\theta)-\sqrt{3}\cos 2\theta$ 的最大值与最小值.

解法 1 （Ⅰ）设 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c，由已知可得

$$\frac{1}{2}bc\sin\theta=3 \quad ①$$

$$0\leqslant bc\cos\theta\leqslant 6 \quad ②$$

② ÷ ① 得，$0\leqslant\cot\theta\leqslant 1$，所以 $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$.

（Ⅱ）$f(\theta)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sqrt{3}\cos 2\theta=\left[1-\cos(\frac{\pi}{2}+2\theta)\right]-\sqrt{3}\cos 2\theta=$

$$(1+\sin 2\theta)-\sqrt{3}\cos 2\theta=\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+1=2\sin(2\theta-\frac{\pi}{3})+1$$

因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$2\theta-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $2\leqslant 2\sin(2\theta-\frac{\pi}{3})+1\leqslant 3$.

即当 $\theta=\frac{5\pi}{12}$ 时，$f(\theta)_{\max}=3$；当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(\theta)_{\min}=2$.

解法 2 （Ⅰ）同解法 1 得 ①、②，则

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，以上两式都可成立，故 $\frac{\pi}{2}$ 在 θ 的取值范围内.

当 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ 时，式 ② 可化为

$$0<bc\cos\theta\leqslant 6 \quad ③$$

由 ① ÷ ③ 得，$\tan\theta\geqslant 1$，此时 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，综上 θ 的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

（Ⅱ） $f(\theta)=2\sin^2(\frac{\pi}{4}+\theta)-\sqrt{3}\cos 2\theta=2(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta)^2-\sqrt{3}\cos 2\theta=$

$$2\cdot\frac{1}{2}(1+2\sin\theta\cos\theta)-\sqrt{3}\cos 2\theta=\sin 2\theta-\sqrt{3}\cos 2\theta+1$$

下同解法 1.

解法 3 （Ⅰ）同解法 1 或解法 2.

（Ⅱ）因为 $f(\theta)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sqrt{3}\cos 2\theta,\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，所以

$$f'(\theta)=2\cdot 2\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}+\theta)+2\sqrt{3}\sin 2\theta=2\sin(\frac{\pi}{2}+2\theta)+2\sqrt{3}\sin 2\theta=$$

$$2\cos 2\theta+2\sqrt{3}\sin 2\theta=4\sin(2\theta+\frac{\pi}{6})$$

表 4

	$\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{5\pi}{12}$	$\left(\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$
$f'(\theta)$	+	0	-
$f(\theta)$	↗	极大值 3	↘

由表 4，讨论得当 $\theta=\frac{5\pi}{12}$ 时，$f(\theta)_{\max}=3$；当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(\theta)_{\min}=2$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\cos\frac{3x}{2},\sin\frac{3x}{2}\right),\boldsymbol{b}=\left(\cos\frac{x}{2},-\sin\frac{x}{2}\right)$，且 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$；

（Ⅱ）求函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的最小值.

解 （Ⅰ）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos 2x$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=-2\cos x$.

（Ⅱ）$f(x)=\cos 2x+2\cos x=2(\cos x+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}$.

因为 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，所以 $-1\leqslant\cos x\leqslant 0$，所以当 $\cos x=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)_{\min}=-\frac{3}{2}$.

3. 设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，其中向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,-\cos x),\boldsymbol{b}=(\sin x,-3\cos x),\boldsymbol{c}=(-\cos x,\sin x),x\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期；

（Ⅱ）将函数 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\boldsymbol{d}$ 平移，使平移后得到的图象关于坐标原点成中心对称，求长度最小的 $\boldsymbol{d}$.

解析 （Ⅰ）$f(x)=2+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$，故 $f(x)$ 的最大值为 $2+\sqrt{2}$，最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）由 $\sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=0$，得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}$，于是 $\boldsymbol{d}=\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{k\pi}{2},-2\right)$，因此

$$|\boldsymbol{d}|=\sqrt{\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)^2+4},\quad k\in\mathbf{Z}$$

因为 k 为整数，要使 $|\boldsymbol{d}|$ 最小，则只有 $k=1$，此时 $\boldsymbol{d}=(-\frac{\pi}{8},-2)$ 即为所求.

4. 已知二次函数 $f(x)$ 对任 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(1-x)=f(1+x)$ 成立，设向量 $\boldsymbol{a}=(\sin x,2),\boldsymbol{b}=(2\sin x,\frac{1}{2}),\boldsymbol{c}=(\cos 2x,1),\boldsymbol{d}=(1,2)$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，求不等式 $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$ 的解集.

解析 设 $f(x)$ 的二次项系数为 m，由 $f(1-x)=f(1+x)$ 得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，若 $m>0$，则 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 是增函数；若 $m<0$，则 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 是减函数.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sin^2x+1\geqslant 1,\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=\cos 2x+2\geqslant 1$，所以当 $m>0$ 时

$$f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})\Leftrightarrow f(2\sin^2x+1)>f(\cos 2x+2)\Leftrightarrow\cos 2x<0\Leftrightarrow$$

$$2k\pi+\frac{\pi}{2}<2x<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\Leftrightarrow k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$$

因为 $0\leqslant x\leqslant\pi$，所以 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$.

当 $m<0$ 时，同理可得 $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}<x\leqslant\pi$.

综上所述，不等式 $f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})>f(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})$ 的解集是当 $m>0$ 时，为 $\left\{x \mid \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}\right\}$；当 $m<0$ 时，为 $\left\{x \mid 0\leqslant x<\frac{\pi}{4}\text{ 或 }\frac{3\pi}{4}<x\leqslant\pi\right\}$.

复习意图　以上5题都是以平面向量为载体，巧妙地将平面向量数量积与三角函数有关知识有机结合在一起的试题，可以复习这两部分知识的掌握情况和联结能力. 复习时侧重于对平面向量的数量积的计算、三角形面积公式、二倍角公式、三角函数的性质等基本知识联系与沟通，以提高学生的运算能力和推理能力. 消元法和化归思想在平面向量与三角函数问题中有广泛的应用，日常教学中应该予以渗透，使其逐渐成为学生的一种自觉思维方式.

② 平面向量与三角变换的交汇.

【例7】　已知向量 $\boldsymbol{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 和 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta)$，$\theta\in(\pi,2\pi)$，且 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\frac{8\sqrt{2}}{5}$，求 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ 的值.

解法1　$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=2\sqrt{1+\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$，得 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{7}{25}$.

又 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)-1$，所以 $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{16}{25}$.

因为 $\pi<\theta<2\pi$，所以 $\frac{5\pi}{8}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}<\frac{9\pi}{8}$，所以 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)<0$，所以 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{4}{5}$.

解法2　　$|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|^2=|\boldsymbol{m}|^2+|\boldsymbol{n}|^2+2\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=8\cos^2(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8})$

由已知 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=\frac{8\sqrt{2}}{5}$，得 $|\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8})|=\frac{4}{5}$.

因为 $\pi<\theta<2\pi$，所以 $\frac{5\pi}{8}<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}<\frac{9\pi}{8}$，所以 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)<0$，所以 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{4}{5}$.

例题链接　已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，β 为 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$ 的最小正周期，$\boldsymbol{a}=((\tan\alpha+\frac{\beta}{4}),-1)$，$\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,2)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m$，求 $\frac{2\cos^2\alpha+\sin 2(\alpha+\beta)}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 的值.

解析　因为 β 为 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{8})$ 的最小正周期，故 $\beta=\pi$.

因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m$，又

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos\alpha\cdot(\tan\alpha+\frac{\beta}{4})-2$$

故

$$\cos\alpha\cdot(\tan\alpha+\frac{\beta}{4})=m+2$$

由于 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，所以原式 $=2\cos\alpha\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2\cos\alpha\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=2(2+m)$.

复习意图　这两题都是以平面向量为载体，结合三角函数求值的有关知识，主要复习向量模的定义与运算性质，向量的数量积的坐标运算.

③ 平面向量与解三角形的交汇.

【例8】　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c，$\tan C=3\sqrt{7}$.

（Ⅰ）求 $\cos C$；

（Ⅱ）若 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{5}{2}$，且因为 $a+b=9$，求 c.

解析　（Ⅰ）$\cos C=\frac{1}{8}$；（Ⅱ）$c=6$.

例题链接　已知向量 $\boldsymbol{m}=(1,1)$，向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{m}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$，且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-1$.

（Ⅰ）求向量 $\boldsymbol{n}$；

（Ⅱ）若向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{q}=(1,0)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，向量 $\boldsymbol{p}=(\cos A,2\cos^2\frac{C}{2})$，其中 $\angle A$、$\angle C$ 为 $\triangle ABC$ 的内角，且 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 依次成等差数列，试求 $|\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}|$ 的取值范围.

解　（Ⅰ）设 $\boldsymbol{n}=(x,y)$，则可求得 $\boldsymbol{n}=(-1,0)$ 或 $\boldsymbol{n}=(0,-1)$.

（Ⅱ）由 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{q}=(1,0)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{q}$ 知

$$\boldsymbol{n}=(0,-1),\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}=(\cos A,2\cos^2\frac{C}{2}-1)=(\cos A,\cos C)$$

所以
$$|\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}|^2=1+\frac{1}{2}\cos(2A+\frac{\pi}{3})$$

因为 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\pi}{3}<2A+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，所以 $-1\leqslant\cos(2A+\frac{\pi}{3})<\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant1+\frac{1}{2}\cos(2A+\frac{\pi}{3})<\frac{5}{4}$，即 $|\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}|^2\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$，所以 $|\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}|\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

复习意图　这两题侧重复习向量的模与数量积的运算，同时关注解三角形的基本方法与转化思想的应用.

④ 平面向量与三角函数的创新交汇.

【例9】　如图5，对于同一高度（足够高）的两个定滑轮 A、B，用一条足够长的绳子跨过它们，并在两端分别挂有质量为 m_1 和 m_2 的物体 W_1 和 W_2（$m_1\neq m_2$），另在两滑轮中间的一段绳子的点 O 处悬挂质量为 m 的另一物体 W. 已知 $m_1:m_2=OB:OA$，且系统保持平衡（滑轮半径、绳子质量均忽略不计）.

（Ⅰ）证明：$\angle AOB$ 为定值；

（Ⅱ）试用 m_1 和 m_2 表示 m，并比较 m^2 与 $2m_1m_2$ 的大小.

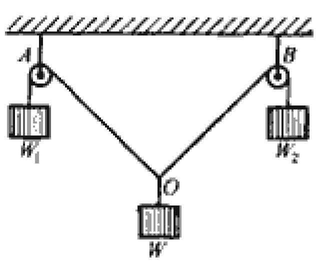


图5

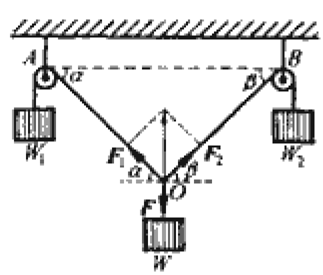


图6

解析　依据题设条件，可用物理方法解决此问题，先作出物体的受力图，引用平衡条件列出方程组，探索 $\angle AOB$ 的大小，再探究第二个问题.

（Ⅰ）设两绳 AO 和 BO 对物体 W 的拉力分别为 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$，物体 W 的重力为 $\boldsymbol{F}$，则由系统平衡知 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$. 如图6，设 $\angle BAO=\alpha$，$\angle ABO=\beta$，则

$$\begin{cases}|\boldsymbol{F}_2|\cos\beta-|\boldsymbol{F}_1|\cos\alpha=0\\|\boldsymbol{F}_2|\sin\beta+|\boldsymbol{F}_1|\sin\alpha=|\boldsymbol{F}|\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}m_2\cos\beta-m_1\cos\alpha=0 & ①\\m_2\sin\beta+m_1\sin\alpha=m & ②\end{cases}$$

在 $\triangle AOB$ 中，由正弦定理，得

$$OB : OA = \sin\alpha : \sin\beta$$

因为 $m_1 : m_2 = OB : OA$,所以

$$m_1 : m_2 = \sin\alpha : \sin\beta$$

将上式代入①,得

$$\sin\beta\cos\beta = \sin\alpha\cos\alpha$$

即
$$\sin 2\beta = \sin 2\alpha$$

因为 $m_1 \neq m_2$,所以 $OB \neq OA$,所以 $\alpha \neq \beta$,所以 $2\alpha + 2\beta = 180°$,即 $\alpha + \beta = 90°$.

因为 $\alpha + \beta + \angle AOB = 180°$,所以 $\angle AOB = 90°$,故 $\angle AOB$ 为定值.

(Ⅱ)由 $\alpha + \beta = 90°$,得 $\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta$.所以 ①^2 + ②^2 得

$$m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta) = m_1^2 + m_2^2 = m^2$$

即
$$m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$$

所以
$$m^2 - 2m_1m_2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 = (m_1 - m_2)^2 > 0$$

即
$$m^2 > 2m_1m_2$$

复习意图 例9是源于人教版高中数学新课标教材的《数学必修4》的第五章"平面向量"中的研究性课题:"向量在物理中的应用"一节的例题,改编后的试题既渗透着跨学科(物理)知识,又融数学内部知识(向量、三角函数、解斜三角形、不等式等内容)于一体.它涉及力的平衡、向量的平行四边形法则、同角三角函数的关系、三角函数的恒等变形、正弦定理、基本不等式等知识,兼顾了引参、消元、化归、数形结合等数学思想方法.

该题通过引入角度,把平板车的长度构造成三角函数关系式,从而转化为求三角函数的最值问题.这种题型主要考查解三角形的基础知识与基本方法,考查运用三角公式进行恒等变换的技能技巧及导数的相关知识.

【例10】 已知向量 $\boldsymbol{a} = (m, n)$,$\boldsymbol{b} = (p, q)$,定义向量间的运算"$*$":$\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ 仍是一个向量,且 $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b} = (mp - nq, mq + np)$.

(Ⅰ)你能否把 $\boldsymbol{a}$ 表示为 $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)(r \geq 0)$ 的形式?并据此说明"$*$"运算的几何意义?

(Ⅱ)用向量证明:分别以△ABC的边AB、AC为边,向三角形外作正方形ABDE和ACFG,则△ABC边BC上的高AH所在直线平分EG.

解析 第(Ⅰ)小题引导方向是,把向量两坐标用向量的模及 x 轴非负半轴到向量共线方向所成的角来表示,通过运算结果,说明"$*$"运算的几何意义,并据此解决第(Ⅱ)小题中向量旋转问题.

(Ⅰ)当 $\boldsymbol{a} = 0$ 时,$m = n = 0$,显然可把 $\boldsymbol{a}$ 表示为 $(0\cos\alpha, 0\sin\alpha)$ 的形式;

当 $m^2 + n^2 \neq 0$ 时

$$\boldsymbol{a} = (m, n) = \left(\sqrt{m^2+n^2}\cdot\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \sqrt{m^2+n^2}\cdot\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)$$

因为 $\left(\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)^2 + \left(\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\right)^2 = 1$,故必存在 $\alpha \in [0, 2\pi)$,使

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} = \cos\alpha, \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} = \sin\alpha$$

记
$$r = \sqrt{m^2+n^2}$$

于是
$$\boldsymbol{a} = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$$

记 $\boldsymbol{b} = (R\cos\beta, R\sin\beta)$,$r$、$R \geq 0$,$\alpha$、$\beta \in [0, 2\pi)$,则

$$r\cos\alpha R\cos\beta - r\sin\alpha R\sin\beta = Rr\cos(\alpha+\beta)$$

$$r\cos\alpha R\sin\beta + r\sin\alpha R\cos\beta = Rr\sin(\alpha+\beta)$$

于是 $$a * b = (R r\cos(\alpha+\beta), R r\sin(\alpha+\beta))$$

注意到 $|a| = r$, $|b| = R$, α、β 分别是 x 轴非负半轴到该向量方向所成的角,所以 $a * b$ 是这样一个向量:它的模等于 a、b 模的积,x 轴非负方向所成的角等于 a、b 相应角的和(或终边相同),也可理解为 $a * b$ 是把 a 的模变为原来的 $|b|$ 倍,并逆时针旋转 β 角(β 为 x 轴正向到 b 所成的角).

(Ⅱ) 记 $\overrightarrow{AB} = (m,n)$, $\overrightarrow{AC} = (p,q)$,则

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} * (\cos(-90^\circ), \sin(-90^\circ)) = (m,n) * (0,-1) = (n,-m)$$
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} * (\cos 90^\circ, \sin 90^\circ) = (p,q) * (0,1) = (-q,p)$$

EG 中点记为 K,则

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}) = \left(\frac{n-q}{2}, \frac{p-m}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (p-m, q-n)$$

所以 $$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}[(p-m)(n-q) + (q-n)(p-m)] = 0$$

所以 $AK \perp BC$,说明 BC 边上的高所在直线平分 EG.

复习意图 本题复习学生接受并运用新知识的能力,主要起到扩充向量运用范围,使其类比复数和极坐标的某些属性,以帮助学生拓宽视野,培养学生的创新意识.

3. 平面向量与函数、方程、导数和解几等知识的综合交汇

【例 11】 如图 7,在 Rt△ABC 中,已知 $BC = a$,若长为 $2a$ 的线段 PQ 以点 A 为中点,$\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 取何值时,$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 的值最大?并求出这个最大值.

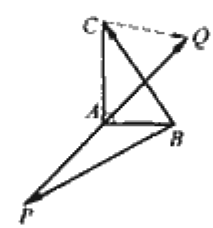


图 7

解法 1 从纯向量运算的角度切入.因为 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

因为
$$\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}$$

所以
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} &= (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}) = \\ &\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \\ &-a^2 - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = \\ &-a^2 + \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -a^2 + a^2\cos\theta\end{aligned}$$

故当 $\cos\theta = 1$,即 $\theta = 0$($\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相同)时,$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 最大,其最大值为 0.

解法 2 从坐标运算的角度出发,可建立直角坐标系(图 8),设出各点坐标,求出 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 的函数式,进而获解.

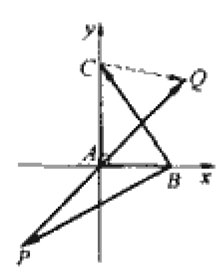


图 8

设 $|AB| = c$ $|AC| = b$,则 $A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(0,b)$,且 $|PQ| = 2a$, $|BC| = a$.

设点 P 的坐标为 (x,y),则 $Q(-x,-y)$,所以 $\overrightarrow{BP} = (x-c, y)$, $\overrightarrow{CQ} = (-x, -y-b)$, $\overrightarrow{BC} = (-c, b)$, $\overrightarrow{PQ} = (-2x, -2y)$,所以

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = (x-c)(-x) + y(-y-b) = -(x^2+y^2) + cx - by$$

因为 $$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{cx - by}{a^2}$$

所以 $$cx - by = a^2\cos\theta$$

所以 $$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = -a^2 + a^2\cos\theta$$

故当 $\cos\theta = 1$,即 $\theta = 0$($\overrightarrow{PQ}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相同)时,$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CQ}$ 最大,其最大值为 0.

复习意图 该题条件简洁,讲究用数形结合的方式配置题目信息,复习时可让学生考虑从不同角度运用不同的思想方法,创设多条解题路径,给学生充分发挥的空间,使不同思维层次的学生都有很好

的展示自我能力的机会，都有不同程度的提高.

【例 12】　已知向量 $\boldsymbol{a}=(x^2,x+1)$，$\boldsymbol{b}=(1-x,t)$，若函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 在区间 $(-1,1)$ 上是增函数，求 t 的取值范围.

解法 1　依定义

$$f(x)=x^2(1-x)+t(x+1)=-x^3+x^2+tx+t$$

则

$$f'(x)=-3x^2+2x+t$$

若 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，则在 $(-1,1)$ 上可设 $f'(x)\geqslant 0$；因为 $f'(x)\geqslant 0\Leftrightarrow t\geqslant 3x^2-2x$ 在区间 $(-1,1)$ 上恒成立，考虑函数 $g(x)=3x^2-2x$，由于 $g(x)$ 的图象是对称轴为 $x=\frac{1}{3}$，开口向上的抛物线，故要使 $t\geqslant 3x^2-2x$ 在区间 $(-1,1)$ 上恒成立 $\Leftrightarrow t\geqslant g(-1)$，即 $t\geqslant 5$，而当 $t\geqslant 5$ 时，$f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上满足 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，故 t 的取值范围是 $t\geqslant 5$.

解法 2　依定义

$$f(x)=x^2(1-x)+t(x+1)=-x^3+x^2+tx+t,\ f'(x)=-3x^2+2x+t$$

若 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，则在 $(-1,1)$ 上可设 $f'(x)\geqslant 0$；因为 $f'(x)$ 的图象是开口向下的抛物线，所以当且仅当 $f'(1)=t-1\geqslant 0$ 时，且 $f'(-1)=t-5\geqslant 0$ 时，$f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 上满足 $f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是增函数，故 t 的取值范围是 $t\geqslant 5$.

复习意图　本题主要复习平面向量数量积的计算方法，利用导数研究函数的单调性，以及运用基本函数的性质分析和解决问题的能力.

【例 13】　给定抛物线 $C:y^2=4x$，F 是 C 的焦点，过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.

（Ⅰ）设 l 的斜率为 1，求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角的大小；

（Ⅱ）设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$，若 $\lambda\in[4,9]$，求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

解析　第（Ⅰ）问中，直线的斜率是固定的，通过代数运算就能求出向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的夹角，这其中的运算有一定的技巧；第（Ⅱ）问中，直线的位置不是固定的，其位置关系满足 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$，而 λ 在 $[4,9]$ 的范围内变化. 因两个向量是同方向的，所以 λ 就代表其长度之间的关系，即 $\overrightarrow{FB}$ 的长度是 $\overrightarrow{AF}$ 长度的 4 到 9 倍. 又因为交点 A、B 的位置并不固定，可以相互交换，所以直线 l 在 y 轴上的截距的变化范围应在两个对称的区间里.

（Ⅰ）C 的焦点为 $F(1,0)$，直线 l 的斜率为 1，所以 l 的方程为 $y=x-1$.

将 $y=x-1$ 代入方程 $y^2=4x$，并整理得 $x^2-6x+1=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2-(x_1+x_2)+1=-3$$

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_1x_2[x_1x_2+4(x_1+x_2)+16]}=\sqrt{41}$$

$$\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}=-\frac{3\sqrt{14}}{41}$$

所以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小为 $\pi-\arccos\frac{3\sqrt{14}}{41}$.

（Ⅱ）由题设 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$，得 $(x_2-1,y_2)=\lambda(1-x_1,-y_1)$，即

$$\begin{cases}x_2-1=\lambda(1-x_1) & ①\\ y_2=-\lambda y_1 & ②\end{cases}$$

由 ② 得 $y_2^2=\lambda^2y_1^2$，因为 $y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$，所以

$$x_2=\lambda^2x_1 \qquad ③$$

联立 ①、③ 解得 $x_2=\lambda$，依题意有 $\lambda>0$，所以 $B(\lambda,2\sqrt{\lambda})$ 或 $B(\lambda,-2\sqrt{\lambda})$.

又 $F(1,0)$，得直线 l 方程为 $(\lambda-1)y=2\sqrt{\lambda}(x-1)$ 或 $(\lambda-1)y=-2\sqrt{\lambda}(x-1)$.

当 $\lambda \in [4,9]$ 时，l 在方程 y 轴上的截距为 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ 或 $-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$.

由 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}+1}+\frac{2}{\lambda-1}$，可知 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ 在 $[4,9]$ 上是递减的，所以

$$\frac{3}{4}\leqslant\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\leqslant\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\leqslant-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\leqslant-\frac{3}{4}$$

故直线 l 在 y 轴上截距的变化范围为 $\left[-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right]$.

复习意图　在解题的过程中，对曲线的定义和性质的理解是解题的基础．如抛物线焦点的确定、直线方程、直线和抛物线交点等，同时由向量关系式 $\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$ 列出方程是后继应用韦达定理、函数的增减性等简化运算的关键，因此本题的复习效能应着重体现这种以向量运算作为突破口的综合解题能力的培养．

以向量为载体的解析几何问题，是近几年各省市新课程高考中出现的一种新题型，这种问题往往融向量、解几、方程、不等式等知识于一体，能有效考查学生的思维水平和综合能力．由于向量和解几都涉及数和形，对于解析几何中图形的重要位置关系（如平行、相交、三点共线、三线共点等）和数量关系（如距离、面积、角等），都可以通过向量的运算而得到解决．复习解决此类问题的基本策略是：利用平面向量的坐标表示法，将问题中的向量关系转化为代数关系，再依据解几中已有的知识和方法求解．

通过上述复习，应让学生知道，以平面向量知识作为交汇点设计的高考解答题，运用知识之间的交叉、渗透和组合，是基础性与综合性的最佳表现形式．随着复习的深入，知识积累的增多，各部分知识在各自发展中的纵向联系以及部分知识之间的横向联系日益密切，特别是由于向量与解析几何、立体几何、函数、复数等形成了一个广阔的知识联合体．因此，只要任取一个知识单元，就有可能繁殖、衍生、扩散，成为新颖、灵活的试题．但无论如何联合，其本质还是考查向量的基本性质和运算以及数形结合的思想．

（七）不等式求解中分类讨论的思维策略

对于有些不等式，若按常规思路分类讨论求解，运算量大，且过程冗长，还容易出错；解题中，若能够充分挖掘问题潜在的特殊性，灵活地采用相应的解题策略，则可简化或避免分类讨论.本文就几类常用的策略归纳如下：

1.借助于"定义域"

不等式中，使代数式有意义的未知数的取值范围，不妨称为不等式的"定义域".显然，不等式的解集是其"定义域"的子集.解题中，若能注意"定义域"，则可简化分类，迅速求解.

【例1】 设 $a<0$，且 a 为常数，解不等式 $\sqrt{a^2-2x^2}>x+a$.

解析 一般解法要分 $x+a\geqslant 0$ 和 $x+a<0$ 讨论，注意到不等式的"定义域"，有 $a^2-2x^2\geqslant 0$，即 $x^2\leqslant\frac{a^2}{2}$，而 $a<0$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}a$.此时 $x+a\leqslant a-\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a<0$，不等式恒成立，故原不等式的解集是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$.

2.挖掘隐含条件

充分挖掘不等式成立的必要条件，寻求隐含条件，则可简化不等式变形过程，避开复杂的分类讨论.

【例2】 若 $m<1$ 且 $m\neq 0$，解关于 x 的不等式 $(1-m)x-\sqrt{x^2+1}\geqslant -1$.

解析 原不等式可化为 $(1-m)x+1\geqslant\sqrt{x^2+1}$，若注意到 $\sqrt{x^2+1}\geqslant 1$，则有 $(1-m)x+1\geqslant 1$，即 $(1-m)x\geqslant 0$，由于 $m<1$，故 $1-m>0$，因而 $x\geqslant 0$ 是一个隐含条件，于是原不等式可化为

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ [(1-m)x+1]^2\geqslant x^2+1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ (m^2-2m)x\geqslant 2(m-1)\end{cases}$$

易得 $0<m<1$ 时，解集为 $\left[0,\frac{2(m-1)}{m^2-2m}\right]$；$m<0$ 时，解集为 $[0,+\infty)$.

3.数形结合

将不等式（或变形后）两边分别看作两个函数，考察两个函数图象的相对位置关系，常可简化解题过程，且不易出错.

【例3】 设 $a>0$，且 a 为常数，解不等式 $\sqrt{x^2+1}-ax>1$.

解析 原不等式可化为

$$\sqrt{x^2+1}>1+ax$$

设 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的图象为 C_1，$y=1+ax$ 的图象为 C_2.

由 $y=\sqrt{x^2+1}$ 得 $y^2-x^2=1(y\geqslant 1)$，所以 C_1 是等轴双曲线的上半支；C_2 是过点 $(0,1)$ 斜率为 a

的直线系. 当 $a \geqslant 1$ 时，由图 1 左知，原不等式解集为 $(-\infty, 0)$；当 $0 < a < 1$ 时，由图 1 右知，原不等式解集为 $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2a}{1-a^2}, +\infty\right)$（$0 < a < 1$ 时，设 C_1 与 C_2 交于点 A，点 A 横坐标是方程 $\sqrt{x^2+1} = 1 + ax$ 的根，$x_A = \dfrac{2a}{1-a^2}$）.

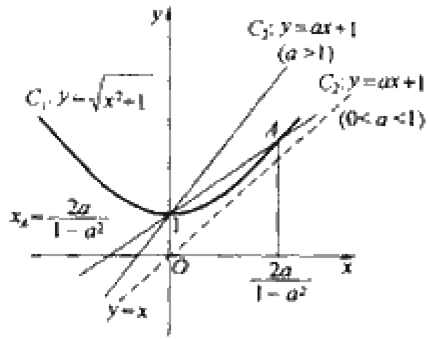


图 1

4. 正难则反

有些不等式正面求解比较复杂时，可从反面求解，能事半功倍.

【例 4】 解关于 x 的不等式 $\sqrt{a(a-x)} > a - 2x\ (a < 0)$.

解析 若直接解不等式，则较为复杂. 但若注意到 $\sqrt{a(a-x)} > a - 2x\ (a < 0)$ 与不等式 $\sqrt{a(a-x)} \leqslant a - 2x\ (a < 0)$ 解集间的关系，而解不等式 $\sqrt{a(a-x)} \leqslant a - 2x$ 比解原不等式简洁得多，为此有如下解法：

先解不等式

$$\sqrt{a(a-x)} \leqslant a - 2x\ (a < 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2x \geqslant 0 \\ a(a-x) \geqslant 0 \\ a(a-x) \leqslant (a-2x)^2 \end{cases}$$

得

$$a \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}a,\ a < 0$$

在全集 $I = \{x \mid a(a-x) \geqslant 0, a < 0\}$ 中，$M = \{x \mid a \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}a\ (a < 0)\}$ 的补集 $\{x \mid x > \frac{3}{4}a\}$ 即为原不等式 $\sqrt{a(a-x)} > a - 2x\ (a < 0)$ 的解集.

5. 等价变形

有些不等式，直接求解很复杂；若通过等价变形，化为另一种形式求解，则可简化运算过程，顺利求解.

【例 5】 解关于 x 的不等式 $0 < \dfrac{x^2 - 2x + 2}{1 + 2ax} < 1\ (a \in \mathbf{R})$.

解析 若按常规解法，需解两个分式不等式（并且含有参数 a），运算太复杂. 但若利用 $0 < x < a \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{a}\ (a < 0)$ 进行等价变形，易得最佳运算途径，简化分类讨论过程.

原不等式等价于

$$\frac{1 + 2ax}{x^2 - 2x + 2} > 1 \Leftrightarrow 1 + 2ax > x^2 - 2x + 2\ (\text{因 } x^2 - 2x + 2 > 0) \Leftrightarrow x^2 - 2(a+1)x + 1 < 0$$

① 当 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4 \leqslant 0$，即 $-2 \leqslant a \leqslant 0$ 时，不等式无解.

(2) 当 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4 > 0$，即 $a < -2$ 或 $a > 0$ 时，不等式的解集为 $a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a} < x < a + 1 + \sqrt{a^2 + 2a}$.

【例 6】（题目见例 4）

解析 一般方法常分两种情况讨论，但若换元、等价变形后再解，则可避免讨论. 令 $\sqrt{a(a-x)} = t\ (t \geqslant 0)$，则 $x = \dfrac{a^2 - t^2}{a}\ (a < 0)$，原不等式可化为 $2t^2 - at - a^2 > 0$，得 $t < a$（舍去）或 $t > -\dfrac{1}{2}a$.

由 $a < 0, t \geqslant 0$ 知 $t > -\dfrac{1}{2}a$，即 $a(a-x) > \dfrac{1}{4}a^2$，解得 $x > \dfrac{3}{4}a$，即为原不等式的解.

（八）看清不等式“蒙人”的六大招数

1.高考动态

不等式历来是高考的重点内容，主要考查有关不等式性质的基础知识、基本方法，考查不等式的解法，综合题多与其他章节（如函数、数列等）交汇．从题型上来看，多是比较大小、解简单不等式以及线性规划等，解答题主要考查含参数的不等式的求解以及它在函数、导数、数列中的应用，而且还考查逻辑推理、分析问题、解决问题的能力．新高考不等式命题趋势：把不等式的性质与函数、三角结合起来综合考查不等式的性质、函数单调性等，多以选择题的形式出现，解答题以含参数的不等式的证明、求解为主；利用基本不等式解决像函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的单调性或解决有关最值问题是考查的重点和热点，应加强训练；结合指数、对数、三角函数等考察函数的性质；解不等式的试题常以填空题、解答题形式出现；以当前经济、社会、生活为背景与不等式综合的应用题仍是高考的热点，主要考查考生阅读以及分析、解决问题的能力；在函数、不等式、数列、解析几何、导数等知识网络的交汇点命题，特别注意与函数、导数综合命题这一变化趋势；对含参数的不等式，要加强分类整合思想的复习，学会分析引起分类讨论的原因，合理分类，不重不漏．

2.知识死角

复习“不等式”，应特别注意以下要点：

① 解不等式的基本途径：等价转化．

② 高度关注字母的总体取值范围，确保变形过程中的等价性．

③ 高度关注参数的分类讨论，并用同一标准对参数进行划分，做到不重不漏．

④ 不可把含参不等式的解集简单地写成并集，要严格地分情况说明．

⑤ 只有深入审题，充分挖掘隐含条件，才能保证代数推理的逻辑性、严密性．

⑥ 注意均值不等式使用过程中的条件限制．

3.范例剖析

【例1】 设 x、y、z 为正实数，且满足 $x-2y+3z=0$，则 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值是______．

解 由 $x-2y+3z=0$ 得 $y=\frac{x+3z}{2}$，则 $\frac{y^2}{xz}=\frac{x^2+9z^2+6xz}{4xz}\geqslant\frac{6xz+6xz}{4xz}=3$，当且仅当 $x=3z$ 时“$=$”成立，即 $\frac{y^2}{xz}$ 的最小值是3．

注 在使用重要不等式解决相关问题时，根据所涉及的不等式的结构，常常需要配合一定的变形技巧与转化策略，才可使用重要不等式把问题解决．用均值不等式求函数的最值（或值域）是高中数学的一个重点，也是近几年高考的一个热点．使用均值不等式的三个条件“一正、二定、三相等”更是考题的焦点．使用时易犯以下错误：

(1) 忽视均值不等式中应用时的三个条件"一正、二定、三相等"

【例 2】 求 $y = x + \frac{1}{x-1}(x \neq 1)$ 的值域.

错解 因为 $y = x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 3$,所以 $y \in [3, +\infty)$.

分析 上述解法因忽视了 $x-1$ 的正负而出错,本题需通过讨论 $x-1$ 的正负来解题.

正解 当 $x > 1$ 时,$y = x + \frac{1}{x-1} = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 1 \geq 3$,当且仅当 $x - 1 = \frac{1}{x-1}$,即 $x = 2$ 时取"="; 当 $x < 1$ 时,$y = x + \frac{1}{x-1} = -\left[(1-x) + \frac{1}{1-x}\right] + 1 \leq -1$,当且仅当 $1 - x = \frac{1}{1-x}$,即 $x = 0$ 时取"=",故 $y \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$.

【例 3】 若正数 x, y 满足 $x + 2y = 6$,求 xy 的最大值.

错解 因为 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,当且仅当 $x = y$ 时取"="号.又因为 $x + 2y = 6$,所以 $x = y = 2$,将 $x = y = 2$ 代入 xy,可得 xy 的最大值为 4.

分析 初看起来,很有道理,其实在用均值不等式求最值时,在各项为正的前提下,应先考虑定值,再考虑等号是否成立.但在 $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ 中,$x + y$ 不是定值,所以 xy 的最大值不是 4.

正解 因为 $xy = \frac{1}{2}x \cdot 2y \leq \frac{1}{2}(\frac{x+2y}{2})^2 = \frac{9}{2}$,当且仅当 $x = 2y$ 时(此时 $x = 3, y = \frac{3}{2}$)取"="号,所以 xy 最大值是 $\frac{9}{2}$.

【例 4】 已知函数 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + \frac{1}{2}}{x}$,$x \in [1, +\infty)$,求函数 $f(x)$ 的最小值.

错解 因为 $f(x) = x + \frac{1}{2x} + 2 \geq \sqrt{2} + 2$,所以 $f(x)$ 的最小值为 $2 + \sqrt{2}$.

分析 本题忽略了验证"="是否成立.由于 $f(x) = 2 + \sqrt{2}$ 时,当且仅当 $x = \frac{1}{2x}$,即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取"=".而 $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [1, +\infty)$,故该题无法用均值不等式求最值.一般的类似于 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 求最值时可利用函数的单调性来求解.

正解 **解法 1** 令 $1 \leq x_1 < x_2$,则

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 + \frac{1}{2x_2} - \frac{1}{2x_1} = x_2 - x_1 + \frac{x_1 - x_2}{2x_1x_2} = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{1}{2x_1x_2}\right)$$

因为 $1 \leq x_1 < x_2$,所以 $x_2 - x_1 > 0$,$1 - \frac{1}{2x_1x_2} > 0$,所以 $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上为增函数,所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = \frac{7}{2}$.

解法 2 因为 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2x^2}$,当 $x \in [1, +\infty)$ 时 $f'(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上为增函数,所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1) = \frac{7}{2}$.

(2) 在同一问题中多次运用均值不等式,应注意取"="的条件一致

【例 5】 已知 x、y 为正实数,且 $2x + 8y - xy = 0$,求 $x + y$ 的最小值.

错解 因为 x、y 为正实数,所以 $xy = 2x + 8y \geq 8\sqrt{xy}$.

所以 $xy - 8\sqrt{xy} \geq 0$,即 $\sqrt{xy} \geq 8$,所以 $x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 16$,所以 $x + y$ 的最小值为 16.

分析 本题解答过程中两次运用均值不等式,在 $2x + 8y \geq 8\sqrt{xy}$ 中当且仅当 $x = 4y$ 时取"=",而在 $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ 中当且仅当 $x = y$ 时取"=".显然两次运用均值不等式时取"="的条件不一致,故求

得的 $x+y$ 的最小值为 16 是不成立的.

正解 因为 $2x+8y-xy=0$,所以 $y=\frac{2x}{x-8}(x>8)$,所以

$$x+y=x+\frac{2x}{x-8}=\frac{x^2-6x}{x-8}=\frac{(x-8)^2+10(x-8)+16}{x-8}=x-8+\frac{16}{x-8}+10\geqslant 18$$

当且仅当 $x-8=\frac{16}{x-8}$,即 $x=12$ 时取"=",所以 $x+y$ 的最小值为 18.

【例 6】 设 $a\in\mathbf{R}$,若函数 $y=e^{ax}+3x,x\in\mathbf{R}$ 有大于零的极值点,则(　　)

A. $a>-3$　　B. $a<-3$　　C. $a>-\frac{1}{3}$　　D. $a<-\frac{1}{3}$

错解 选 A.

分析 忽视隐含条件 $a<0$ 而导致结果错误.

正解 $f'(x)=3+ae^{ax}$,若函数在 $x\in\mathbf{R}$ 上有大于零的极值点,即 $f'(x)=3+ae^{ax}=0$ 有正根.当有 $f'(x)=3+ae^{ax}=0$ 成立时,显然有 $a<0$,此时 $x=\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{3}{a}\right)$,由 $x>0$ 我们马上就能得到参数 a 的范围为 $a<-3$,故选 B.

【例 7】 "$|x-1|<2$ 成立"是"$x(x-3)<0$ 成立"的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

错解 选 A 或 C.

分析 对两个不等式解集的包含关系未分清.

正解 由 $|x-1|<2\Rightarrow-2<x-1<2\Rightarrow-1<x<3$;由 $x(x-3)<0\Rightarrow0<x<3$,显然前者不能推出后者,但后者能推出前者,故选 B.

注 充要条件的高考常见题型为:由一个成立的命题,去求出其充要条件,或者证明某个命题成立的充要条件是什么等,题目一般为选择或填空题,但也会出现于部分解答题之中,难度不会太大.

充要条件:条件 p 成立 $\Rightarrow$ 结论 q 成立,则称条件 p 是结论 q 的充分条件,结论 q 成立 $\Rightarrow$ 条件 p 成立,则称条件 p 是结论 q 的必要条件,条件 p 成立 $\Leftrightarrow$ 结论 q 成立,则称条件 p 是结论 q 的充要条件.

从集合观点看,若 $A\subsetneq B$,则 A 是 B 的充分条件,B 是 A 的必要条件,即"小充分,大必要";若 $A=B$,则 A、B 互为充要条件.

【例 8】 若 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数,则 b 的取值范围是(　　)

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,-1)$

错解 D.

分析 本题考查导数与不等式知识,只须根据原函数的单调性判断出它的导函数的正负即可构造不等式求解,但有些考生分不清在什么时候该取等号,从而判断失误.

正解 因为 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数,所以在 $x\in(-1,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$;而 $f'(x)=-x+\frac{b}{x+2}$,显然当 $x=0$ 时,$f'(x)<0$,即 $b<0$;又当 $x=-1$ 时,$f'(x)=0$,即 $b=-1$;所以 $b\leqslant-1$,故选 C.

【例 9】 设函数 $f(x)=ax^3-3x+1(x\in\mathbf{R})$,若对于任意 $x\in[-1,1]$,都有 $f(x)\geqslant0$ 成立,则实数 a 的值为________.

错解 不等式恒成立问题,一般的方法就是分离变量,转化为求函数的最值问题,所以一些考生就直接求得最值,从而得出 $a\geqslant4$ 或 $a\leqslant4$.

分析 1 本题虽然容易找到解题思路,但不易上手,难在不知道要对 x 进行分类讨论,如何通过单调性的讨论来求最值.

正解 1 ①若 $x=0$，则不论 a 取何值，$f(x)\geqslant 0$ 显然成立；②当 $x>0$ 即 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant 0$ 可化为 $a\geqslant\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，设 $g(x)=\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，则 $g'(x)=\frac{3(1-2x)}{x^4}$，所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减，因此 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=4$，从而 $a\geqslant 4$；③当 $x<0$，即 $[-1,0)$ 时，$f(x)=ax^3-3x+1\geqslant 0$ 可化为 $a\leqslant\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}$，$g'(x)=\frac{3(1-2x)}{x^4}>0$，$g(x)$ 在区间 $[-1,0)$ 上单调递增，因此 $g(x)_{\min}=g(-1)=4$，从而 $a\leqslant 4$，所以 $a=4$.

分析 2 该题也可通过研究函数 $f(x)=ax^3-3x+1$ 本身的性质，如单调性、极值等，再讨论区间 $[-1,1]$ 和单调区间的关系，从而找到 a 所满足的条件.

正解 2 显然，$a=0$ 不符合题意. 令 $f'(x)=3ax^2-3=0$，得 $x^2=\frac{1}{a}$，由于 $a\neq 0$，$f(x)=ax^3-3x+1$ 一定有极值点，故 $a>0$，则 $f(x)=ax^3-3x+1$ 在 $\left[-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right]$ 递减，在 $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{a}}\right]$ 及 $\left[\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$ 上增，$f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 为极大值，$f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 为极小值. 又 $f(0)=1$，所以 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\geqslant 1$.

①若 $1\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}$，即 $a\leqslant 1$，只须 $f(1)\geqslant 0$，解得 $a=2$，舍去.

②若 $1\geqslant\frac{1}{\sqrt{a}}$，即 $a>1$，则只须 $\begin{cases}f(-1)\geqslant 0\\ f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\geqslant 0\end{cases}$，解得 $a=4$.

综上知 $a=4$.

分析 3 此题用导数知识求解，需讨论且不容易做，将原式变为 $ax^3\geqslant 3x-1$.

正解 3 画 $y=ax^3$ 及 $y=3x-1$ 的图象很快可以得到解答，比求导数要快捷得多.

【例 10】 已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+cx$ 有三个极值点.

（Ⅰ）证明：$-27<c<5$；（Ⅱ）若存在 c，使函数 $f(x)$ 在区间 $[a,a+2]$ 上单调递减，求 a 的取值范围.

错解 通过求导联系第（Ⅰ）问直接解出 a 的取值范围为 $(-\infty,-5)$，也可解出 a 的取值范围为 $(-3,1)$.

分析 此类题主要考查求函数的极值以及极值的应用，经常与单调性、最值知识结合应用于与函数有关的数学问题中，用到的知识点为：$f(x)$ 在某个区间内可导，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 是增函数；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 是减函数. 一般地，设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有的点，都有 $f(x)<f(x_0)$，就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，记作 $y_{\max}=f(x_0)$，x_0 是极大值点；一般地，设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有的点，都有 $f(x)>f(x_0)$，就说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值，记作 $y_{\min}=f(x_0)$，x_0 是极小值点；极大值与极小值统称为极值. 对于本题第（Ⅱ）问则要用分类整合的思想来求得 a 的取值范围. 因存在参数而又缺乏分类整合思想，所以无法准确确定函数的单调区间，从而致使解答出错.

正解 （Ⅰ）因为函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{9}{2}x^2+cx$ 有三个极值点，所以 $f'(x)=x^3+3x^2-9x+c=0$ 有三个互异的实根. 设 $g(x)=x^3+3x^2-9x+c$，则

$$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

当 $x<-3$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上为增函数；

当 $-3<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-3,1)$ 上为减函数；

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

所以函数 $g(x)$ 在 $x=-3$ 时取极大值，在 $x=1$ 时取极小值.

当 $g(-3)\leqslant 0$ 或 $g(1)\geqslant 0$ 时，$g(x)=0$ 最多只有两个不同实根，因为 $g(x)=0$ 有三个不同实根，所以 $g(-3)>0$，且 $g(1)<0$，即 $-27+27+27+c>0$，且 $1+3-9+c<0$，解得 $c>-27$，且 $c<5$，故 $-27<c<5$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)的证明可知，当 $-27<c<5$ 时，$f(x)$ 有三个极值点，不妨设为 x_1、x_2、x_3($x_1<x_2<x_3$)，则

$$f'(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,x_1]$，$[x_2,x_3]$.

若 $f(x)$ 在区间 $[a,a+2]$ 上单调递减，则 $[a,a+2]\subset(-\infty,x_1]$ 或 $[a,a+2]\subset[x_2,x_3]$.

若 $[a,a+2]\subset(-\infty,x_1]$，则 $a+2\leqslant x_1$，由(Ⅰ)知，$x_1<-3$，于是 $a<-5$.

若 $[a,a+2]\subset[x_2,x_3]$，则 $a\geqslant x_2$，且 $a+2\leqslant x_3$，由(Ⅰ)知，$-3<x_2<1$.

又 $f'(x)=x^3+3x^2-9x+c$，当 $c=-27$ 时，$f'(x)=(x-3)(x+3)^2$；当 $c=5$ 时，$f'(x)=(x+5)(x-1)^2$.

因此，当 $-27<c<5$ 时，$1<x_3<3$. 所以 $a>-3$，且 $a+2<3$，即 $-3<a<1$.

故 $a<-5$ 或 $-3<a<1$. 反之，当 $a<-5$ 或 $-3<a<1$ 时，总可找到 $c\in(-27,5)$，使 $f(x)$ 在区间 $[a,a+2]$ 上递减.

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,-5)\cup(-3,1)$.

4. 总结方法

(1) 不等式证明常用的方法

不等式证明常用的方法有比较法、综合法和分析法，它们是证明不等式的最基本的方法.

① 比较法证不等式有作差(商)、变形、判断三个步骤，变形的主要方向是因式分解、配方，判断过程必须详细叙述；如果作差以后的式子可以整理为关于某一个变量的二次式，则考虑用判别式法证.

② 综合法是由因导果，而分析法是执果索因，两法相互转换，互相渗透，互为前提，充分运用这一辩证关系，可以增加解题思路，开阔视野.

(2) 不等式证明还有一些常用的方法

不等式证明还有一些常用的方法：换元法、放缩法、反证法、函数单调性法、判别式法、数形结合法等. 换元法主要有三角代换、均值代换两种，在应用换元法时，要注意代换的等价性. 放缩性是不等式证明中最重要的变形方法之一，放缩要有的放矢，目标可以从要证的结论中考查. 有些不等式，从正面证如果不易说清楚，可以考虑反证法，凡是含有"至少"、"唯一"或含有其他否定词的命题，适宜用反证法.

证明不等式时，要依据题设、题目的特点和内在联系，选择适当的证明方法，要熟悉各种证法中的推理思维，并掌握相应的步骤、技巧和语言特点.

(3) 几个重要不等式

① 若 $a\in\mathbf{R}$，则 $|a|\geqslant 0$，$a^2\geqslant 0$.

② 若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(或 $a^2+b^2\geqslant 2|ab|\geqslant 2ab$)(当仅当 $a=b$ 时取等号).

③ 如果 a、b 都是正数，那么 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$(当且仅当 $a=b$ 时取等号).

最值定理：若 $x,y\in\mathbf{R}^+$，$x+y=S$，$xy=P$，则如果 P 是定值，那么当 $x=y$ 时，S 的值最小；如果 S 是定值，那么当 $x=y$ 时，P 的值最大；注意"一正、二定、三相等"，如果没有满足前提，则应根据题目创设情境，还要注意选择恰当的公式；"和定积最大，积定和最小"，可用来求最值；均值不等式具有放缩功能，如果有多处用到，请注意每处取等的条件是否一致.

④ 若 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$(当仅当 $a=b=c$ 时取等号).

③ 若 $ab>0$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$（当仅当 $a=b$ 时取等号）.

(4) 在复习不等式的解法时，加强等价转化思想的训练与复习

解不等式的过程是一个等价转化的过程，通过等价转化可简化不等式（组），以快速、准确求解.

加强分类讨论思想的复习. 在解不等式或证不等式的过程中，如含参数等问题，一般要对参数进行分类讨论. 复习时，学生要学会分析引起分类讨论的原因，合理的分类，做到不重不漏.

加强函数与方程思想在不等式中的应用训练. 不等式、函数、方程三者密不可分，相互联系、互相转化. 如求参数的取值范围问题，函数与方程思想是解决这类问题的重要方法. 在不等式的证明中，加强化归思想的复习，证不等式的过程是一个把已知条件向要证结论的一个转化过程，既可考查学生的基础知识，又可考查学生分析问题和解决问题的能力，正因为证不等式是高考考查学生代数推理能力的重要素材，复习时应引起我们的足够重视.

(5) 强化不等式的应用

突出不等式的知识在解决实际问题中的应用价值，借助不等式来考查学生的应用意识.

高考中除单独考查不等式的试题外，常在一些函数、数列、立体几何、解析几何和实际应用问题的试题中涉及不等式的知识，加强不等式应用能力，是提高解综合题能力的关键. 因此，在复习时应加强这方面训练，提高应用意识，总结不等式的应用规律，才能提高解决问题的能力.

如在实际问题应用中，主要有构造不等式求解或构造函数求函数的最值等方法，求最值时要注意等号成立的条件，避免不必要的错误.

(6) 突出重点

综合考查在知识与方法的交汇点处设计命题，在不等式问题中蕴含着丰富的函数思想，不等式又为研究函数提供了重要的工具，不等式与函数既是知识的结合点，又是数学知识与数学方法的交汇点，因而在历年高考题中始终是重中之重. 在全面考查函数与不等式基础知识的同时，将不等式的重点知识以及其他知识有机结合，进行综合考查，强调知识的综合和知识的内在联系，加大数学思想方法的考查力度，是高考对不等式考查的又一新特点.

(九)数列、不等式、极限专题复习

1.考点聚焦

数列(包括数列、数列极限、数学归纳法三部分)既是高中数学的重要内容,又是学习高等数学的基础,在历年的高考中占有重要地位,常充当压轴题角色.特别突出考查递推、叠加、待定系数、分类讨论等重要数学思想方法和必要的逻辑推理能力、运算能力.在命题方向上常以数列为载体,综合函数、方程、不等式、三角、解析几何等知识交汇考查.因此复习时我们应该认真理解数列、等差数列、等比数列的概念,了解数列通项公式的意义,递推公式是给出数列的一种方法,并能根据递推公式写出数列的前几项.掌握等差数列的通项公式与前 n 项和公式、等比数列的通项公式与前 n 项和公式,并能解决简单的实际问题.

数学归纳法是一种重要的数学方法,高考试卷中总是以解答题形式出现,难度有难亦有易.数学归纳法的应用主要有证明等式、证明整除问题、证明不等式三方面,这也是高考命题的主要方面.由于数学归纳法的考题又常常以数列问题为背景,因而数学归纳法的考题多以证明等式和证明不等式两种形式出现.等式的问题相对容易,证明不等式的问题相对困难.

对不等式的复习,我们应理解不等式的性质及其证明,掌握两个(不扩展到三个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理,并会简单的应用,掌握分析法、综合法、比较法证明简单的不等式,掌握简单不等式的解法,理解不等式 $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

“不等式”和“函数”一样,是高中数学中起联结和支撑作用的主干知识,是贯穿于高中数学的一条主线,是高等数学的重要工具,是高考重点考查的内容.其知识点多、覆盖面广、思想丰富、综合性强,极易与其他知识(方程、数列等)建立相关联系,相互渗透和交叉.正因如此,历年高考以“不等式”为主体,交汇函数相关内容的压轴题频频出现,且常考常新.特别是新高考增加了“导数”和“向量”等内容之后,给不等式和函数问题注入了新的生机和活力,开辟了许多新的解题途径,同时也拓宽了高考对函数和不等式问题的命题空间.

高考主要涉及不等式的性质、不等式的证明、解不等式、不等式的综合应用与实际应用.

对极限的复习,我们应了解数列极限和函数极限的概念,掌握极限的四则运算法则,会求某些数列与函数的极限.

极限几乎是每份高考试卷中都有的考题,且多以选择题、填空题形式出现,有时也以解答题中的某一小题出现.命题方向逐步由用极限定义求极限、直接用极限的四则运算法则求极限这些单一考查方面向结合等差数列及等比数列的计算等知识求极限、结合无穷等比数列求和公式、结合数列求和方法求极限等一些综合考查方面过渡.这样既能使试题

更有综合性，又能使试卷有更好的覆盖面.

2. 要点概述

(1) 数列是按一定次序排列的一列数，它实质上是定义在 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集 $\{1,2,\cdots,n\}$）上的函数.

(2) 数列的通项公式实质上是数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与序号 n 的函数解析式.

(3) 递推公式是数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与它前面相邻的项 a_{n-1}, a_{n-2} 等所满足的关系式.

(4) 要注意 a_n 与 S_n 的关系

$$a_n = \begin{cases} S_1 & ,n = 1 \\ S_n - S_{n-1} & ,n \geqslant 2, n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

(5) 等差数列

定　　义	$a_{n+1} - a_n = d$（d 为常数）
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$
前 n 项和公式	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$
性　　质	若 $m + n = p + q$，则 $a_m + a_n = a_p + a_q$
	$a_n - a_m = (n-m)d$
	连续"等距离"新数列，仍为等差数列
等价命题	等差数列 $\{a_n\} \Leftrightarrow 2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}(n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}) \Leftrightarrow$ $a_n = an + b \Leftrightarrow S_n = An^2 + Bn$

(6) 等比数列

定　　义	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$（q 为不为零的常数）
通项公式	$a_n = a_1 q^{n-1}$
前 n 项和公式	$S_n = \begin{cases} na_1(q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}(q \neq 1) \end{cases}$
性　　质	若 $m + n = p + q$，则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$
	$a_n = a_m q^{n-m}$
	连续"等距离"新数列，仍为等差数列
等价命题	等比数列 $\{a_n\} \Leftrightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}(n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}) \Leftrightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

(7) 不等式的性质

① 基本性质：$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$；$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$；$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

② 性质：a. 对称性：$a > b \Leftrightarrow b < a$；b. 传递性：$a > b$ 且 $b > c \Rightarrow a > c$；c. 加法的单调性：$a > b \Rightarrow a + c > b + c$；d. 加法法则：$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$；e. 乘法的单调性：

$a > b$ 且 $c > 0 \Rightarrow ac > bc$，$a > b$ 且 $c < 0 \Rightarrow ac < bc$；f. 乘法法则：$a > b > 0$ 且 $c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$；g. 乘方法则：$a > b > 0$ 且 $n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow a^n > b^n$；h. 开方法则：$a > b > 0$ 且 $n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

③ 均值定理：若 $a, b \in \mathbf{R}$，则 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$（当且仅当 $a = b$ 时取等号）.

推论：若 $a > 0, b > 0$，则 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$（当且仅当 $a = b$ 时等号成立）.

(8) 不等式的证明

① 不等式证明的常用方法有：比较法（比差、比商）、综合法（由因导果）、分析法（执果索因）、数学归纳法.

② 不等式证明的其他方法有：放缩法、反证法、换元法、判别式法、构造法.

③ 分析法执果索因，便于分析，但在叙述时，不是由结论直推到条件，而是强调要使结论成立，必须具备什么条件（或要证……，需证……）.

④ 分析法与综合法相互转换、互相渗透，充分利用这一辩证关系，可以拓宽解题思路，开阔视野；放缩法和换元法的合理运用，可以摆脱习惯思维方法的局限，转换解题途径；反证法是逆向思维的结晶，它能增大思维的发散量，克服思维定式的影响.

(9) 不等式的解法

① 解不等式的基本思想是化归思想，即将不熟悉的不等式化归为熟悉的不等式——高次化低次、分式化整式、无理化有理、超越化代数.

② 解不等式的基本方法是利用不等式的性质来等价变形，即移项、不等式两边同乘以（同除以）同一个数、平方、开方、根轴法、数形结合、分类讨论、换元法、单调性法等.

③ 解不等式的依据：对不等式进行变形的依据是不等式性质，如在不等式两边同乘以同一个数时，必须要考虑这个数是否大于零，对于大于零的，乘以这个数后不等号方向不改变；若是负数则必须反向；若这个数的符号不能确定，则需要分类讨论，如在平方时，必须两边都大于零时才能平方等.

3. 典例扫描

(1) 数列的基本知识

【例 1】 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_2 = 6, a_5 = 162$.（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；（Ⅱ）设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，证明：$\frac{S_n \cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2} \leqslant 1$.

解析 本题主要考查等比数列的概念、前 n 项和公式等基础知识，考查学生综合运用基础知识进行运算的能力.

（Ⅰ）设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_2 = a_1 q, a_5 = a_1 q^4$.

依题意，得方程组 $\begin{cases} a_1 q = 6 \\ a_1 q^4 = 162 \end{cases}$.

解此方程组，得 $a_1 = 2, q = 3$，故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

（Ⅱ）
$$S_n = \frac{2(1-3^n)}{1-3} = 3^n - 1$$

$$\frac{S_n \cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2} = \frac{3^{2n+2} - (3^n + 3^{n+2}) + 1}{3^{2n+2} - 2 \cdot 3^{n+1} + 1} \leqslant \frac{3^{2n+2} - 2\sqrt{3^n \cdot 3^{n+2}} + 1}{3^{2n+2} - 2 \cdot 3^{n+1} + 1} = 1$$

即 $$\frac{S_n \cdot S_{n+2}}{S_{n+1}^2} \leqslant 1$$

点评　本题解题过程中蕴含方程思想，其解法实质就是通过解方程组求 a、d，从而求出 a_n，方程思想是研究此类问题的重要思想方法之一.另外，本题在证明不等式时实质上是利用均值不等式对不等式进行了放缩，而用放缩法证明不等式也是高考的重要考查内容之一.

对于第(Ⅱ)问读者还可作如下尝试思考：

思路 1　(利用等比数列的定义和等比性质)

因为$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$，所以

$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+2}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}} = \frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

即 $$\frac{S_{n+2} - a_1}{S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - a_1}{S_n}$$

得 $$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = -a_1 a_{n+1} < 0$$

思路 2　(利用等比数列求和公式 $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ 整体代换)

用求和公式替换(代而不求)$S_n \cdot S_{n+2} \cdot S_{n+1}$，再作差得

$$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = -a_1^2 q^n < 0$$

思路 3　(利用等比数列求和结论式：$S_n = a_1 + qS_{n-1}$)

$$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = S_n(a_1 + qS_{n+1}) - S_{n+1}(a_1 + qS_n) = -a_1 a_{n+1} < 0$$

思路 4　(利用结论：如果 a、b、m 都是正数，且 $a < b$，则$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$)

由题设知 $S_n < S_{n+1}$，所以$\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}} = \frac{a_1 + qS_n}{a_1 + qS_{n+1}} > \frac{qS_n}{qS_{n+1}} = \frac{S_n}{S_{n+1}}$，转化即得.

(2) 数列内部基础知识的综合

【例 2】　已知数列$\{a_n\}$中 $a_1 = 1$，且 $a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k$，$a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k$，其中 $k = 1,2,3,\cdots$.(Ⅰ)求 a_3、a_5；(Ⅱ)求$\{a_n\}$的通项公式.

解析　本小题主要考查数列、递推数列、求前 n 项、求通项式、等比数列的概念和基本知识，考查运算能力以及分析、归纳和推理能力，考查分类讨论的数学思想，对能力有较高要求.

(Ⅰ)$a_2 = a_1 + (-1)^1 = 0$，$a_3 = a_2 + 3^1 = 3$，$a_4 = a_3 + (-1)^2 = 4$，$a_5 = a_4 + 3^2 = 13$，所以，$a_3 = 3$，$a_5 = 13$.

(Ⅱ)**解法 1**　$$a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k = a_{2k-1} + (-1)^k + 3^k$$

所以 $$a_{2k+1} - a_{2k-1} = 3^k + (-1)^k$$

同理 $$a_{2k-1} - a_{2k-3} = 3^{k-1} + (-1)^{k-1}, \cdots, a_3 - a_1 = 3 + (-1)$$

所以 $$(a_{2k+1} - a_{2k-1}) + (a_{2k-1} - a_{2k-3}) + \cdots + (a_3 - a_1) =$$
$$(3^k + 3^{k-1} + \cdots + 3) + [(-1)^k + (-1)^{k-1} + \cdots + (-1)]$$

由此得 $$a_{2k+1} - a_1 = \frac{3}{2}(3^k - 1) + \frac{1}{2}[(-1)^k - 1]$$

于是 $$a_{2k+1} = \frac{3^{k+1}}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k - 1$$

$$a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k = \frac{3^k}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{k-1} - 1 + (-1)^k = \frac{3^k}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k - 1$$

$\{a_n\}$的通项公式为：

当 n 为奇数时，$a_n = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \frac{1}{2} - 1$；当 n 为偶数时，$a_n = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2} + (-1)^{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{2} - 1$.

解法 2

$$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k=a_{2k-1}+(-1)^k+3^k=\cdots=$$
$$a_1+(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^k+3^k+3^{k-1}+\cdots+3=$$
$$(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^k+3^k+3^{k-1}+\cdots+3+1=\frac{1}{2}\cdot 3^{k+1}+\frac{1}{2}(-1)^k-1$$

同理
$$a_{2k}=\frac{1}{2}\cdot 3^k+\frac{1}{2}(-1)^k-1.$$

因此
$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}-1, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}}-1, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

解法 3 因 $a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$，故当 k 为奇数时，$a_{2k}=a_{2k-1}-1$.

当 k 为偶数时，$a_{2k}=a_{2k-1}+1$. 另外由 $a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$ 可得

$$a_{4k+4}=a_{4k+3}+1=a_{4k+2}+3^{2k+1}+1=(a_{4k+1}-1)+3^{2k+1}+1=$$
$$a_{4k+1}+3^{2k+1}(a_{4k}+3^{2k})+3^{2k+1}=a_{4k}+4\cdot 3^{2k}$$

所以
$$a_{4k+4}-a_{4k}=4\cdot 3^{2k}$$

所以
$$a_{4k+4}=a_4+(a_8-a_4)+(a_{12}-a_8)+\cdots+(a_{4k+4}-a_{4k})=$$
$$4+4\cdot 3^2+4\cdot 3^4+4\cdot 3^6+\cdots+4\cdot 3^{2k}=$$
$$4\cdot\frac{3^{2(k+1)}-1}{3^2-1}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2(k+1)}-\frac{1}{2}$$

所以
$$a_{4k}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k}-\frac{1}{2}$$

所以
$$a_{4k+1}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k}-\frac{1}{2}+3^{2k}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k+1}-\frac{1}{2}$$

$$a_{4k+2}=a_{4k+1}-1=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k+1}-\frac{3}{2},\quad a_{4k+3}=a_{4k+2}+3^{2k+1}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k+2}-\frac{3}{2}$$

由上可得 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n+1}{2}}-\frac{1}{2}, & n=4k+1\\ \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n}{2}}-\frac{3}{2}, & n=4k+2\\ \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n+1}{2}}-\frac{3}{2}, & n=4k+3\\ \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n}{2}}-\frac{1}{2}, & n=4k+4\end{cases}$$

注 求数列的通项公式关键是寻找项与项数之间的关系.

点评 对由递推关系式所确定的数列通项公式问题，一直是高考久考不衰的重点、热点题型，新高考更为明显. 直接求解此类问题，很多同学感到困惑不解、无所适从，其实不然，只须注意"转化与化归"数学思想方法的灵活使用，将其转化（变形、构造）成等差或等比数列问题，即可化陌生为熟悉，顺利求解. 处理的基本策略是：

① 已知相邻两项的递推关系 $a_{n+1}=f(a_n)$ 求数列的通项，常根据递推关系进行逐次迭代，且在迭代过程中始终保留原有形式，以便有利于发现规律.

② 对形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 或 $a_{n+1}=pa_n+q$（p、q 为非零常数）的递推数列，可先求出差项数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$，再通过此数列求和即得 $\{a_n\}$ 的通项公式，值得一提的是，此模型问题是近几年高考常考常新的热门话题.

③ 对已知递推关系 $S_n=f(a_n)$ 求通项问题，基本思路：据 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$ 消掉 S_n，得 $a_n=$

$g(a_{n-1})$，然后再依此递推迭代，求得 a_n.

④ 根据该题递推式的结构，可化归为奇、偶数项数列讨论.

值得一提的是此题的解答可转化为高中课本（人民教育出版社，必修）第一册（上）第三章数列习题3.1第3(1)题的模型：$a_1=\frac{1}{2}, a_n=4a_{n-1}+1(n\geqslant 2)$；同时，该题又和2003年全国高考天津卷中的压轴题：设 a_0 为常数，$a_n=3^{n-1}-2a_{n-1}(n\in \mathbf{N}^*)$，（Ⅰ）证明对任意 $n\geqslant 1, a_n=\frac{1}{5}[3^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^n]+(-1)^n2^na_0$；（Ⅱ）假设对任意 $n\geqslant 1$，有 $a_n>a_{n-1}$，求 a_0 的取值范围.

可见，教材中的练习题及往届高考题一直是高考命题的生长点之一，值得大家留意！

(3) 不等式的解法

【例3】　不等式 $x+\frac{2}{x+1}>2$ 的解集是(　　)

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

解析　移项、等价转化.

解法1（根轴法）　原式 $\Leftrightarrow x+\frac{2}{x+1}-2>0\Leftrightarrow\frac{x(x-1)}{x+1}>0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0$

由根轴法知原不等式解集为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$，故选A.

解法2（验证排除法）　令 $x=-2$ 代入原式得 $-4>2$ 不成立，由此排除B、D，再令 $x=2$ 代入得 $\frac{8}{3}>2$ 成立，所以排除C，故选A.

点评　解分式不等式的常用策略是将其转化为高次或二次不等式(组)，操作程序：移项、通分、分解因式、利用"根轴法"（穿根法）等方法求解；"验证排除法"是选择题常用的特殊解法之一，对于选项是解集的选择题，均可尝试该法，从而快速、准确解题.

(4) 不等式性质的应用、不等式的证明

【例4】　若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式①$a+b<ab$；②$|a|>|b|$；③$a<b$；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$ 中，正确的不等式有(　　)

A.1个　　B.2个　　C.3个　　D.4个

解析　直接运用不等式的性质及重要不等式.

解法1（直接法）　$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0\Rightarrow b<a<0$，所以 $|a|<|b|$，由此知②、③错误；$a+b<0$，$a\cdot b>0$，知①正确；由均值不等式 $(a\neq b)$ 知 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，所以④也正确，故选B.

点评　变相应等价，同时注意均值定理的使用条件.

解法2（特值法）　令 $a=-2b=-3$ 满足条件，经验证知①④正确，②③错误，故选B.

例题链接　解关于 x 的不等式 $ax^2-2\geqslant 2x-ax(a\in\mathbf{R})$.

解析　先讨论二次项系数，然后对开口方向讨论，再对其两根大小进行分类讨论.

原不等式可化为 $ax^2+(a-2)x-2\geqslant 0$.

(1) 当 $a=0$ 时，$x\leqslant -1$，即 $x\in(-\infty,-1]$.

(2) 当 $a\neq 0$ 时，不等式即为 $(ax-2)(x+1)\geqslant 0$.

① 当 $a>0$ 时，不等式化为 $(x-\frac{2}{a})(x+1)\geqslant 0$. 当 $\begin{cases}a>0\\ \frac{2}{a}>-1\end{cases}$，即 $a>0$ 时，不等式解为 $(-\infty,-1]\cup[\frac{2}{a},+\infty)$；当 $\begin{cases}a>0\\ \frac{2}{a}\leqslant -1\end{cases}$ 时，a 不存在.

② 当 $a<0$ 时，不等式化为 $(x-\frac{2}{a})(x+1)\leqslant 0$，当 $\begin{cases}a<0\\ \frac{2}{a}<-1\end{cases}$，即 $-2<a<0$ 时，不等式解为 $[\frac{2}{a},-1]$. 当 $\begin{cases}a<0\\ \frac{2}{a}>-1\end{cases}$，即当 $a<-2$ 时，不等式解为 $[-1,\frac{2}{a}]$；当 $\begin{cases}a<0\\ \frac{2}{a}=-1\end{cases}$，即 $a=-2$ 时，不等式解为 $x=-1$.

综上可得当 $a=0$ 时，$x\in(-\infty,-1)$；当 $a>0$ 时，$x\in(-\infty,-1]\cup[\frac{2}{a},+\infty)$.

当 $-2<a<0$ 时，$x\in[\frac{2}{a},-1]$；当 $a<-2$ 时，$x\in[-1,\frac{2}{a}]$；当 $a=-2$ 时，$x\in\{x\mid x=-1\}$.

(5) 综合不等式、函数、导数等相关知识

【例 5】 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$，$g(x)=x\ln x$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的最大值；

(Ⅱ) 设 $0<a<b$，证明：$0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

解 (Ⅰ) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$. 当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$. 又 $f(0)=0$，故当且仅当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最大值，最大值为 0.

(Ⅱ) **证法 1** $g(x)=x\ln x$，$g'(x)=\ln x+1$. 设 $F(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\frac{a+x}{2}\right)$，则

$$F'(x)=g'(x)-2\left[g\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]'=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}$$

当 $0<x<a$ 时，$F'(x)<0$，因此 $F(x)$ 在 $(0,a)$ 内为减函数.

当 $x>a$ 时，$F'(x)>0$，因此 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上为增函数.

从而，当 $x=a$ 时，$F(x)$ 有极小值 $F(a)$.

因此 $F(a)=0$，$b>a$，所以 $F(b)>0$，即 $0<g(a)+g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

设 $G(x)=F(x)-(x-a)\ln 2$，则

$$G'(x)=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}-\ln 2=\ln x-\ln(a+x)$$

当 $x>0$ 时，$G'(x)<0$. 因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

因为 $G(a)=0$，$b>a$，所以 $G(b)<0$，即 $g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})<(b-a)\ln 2$.

点评 本题主要考查导数的基本性质和应用、对数函数性质和均值不等式等知识以及综合推理论证的能力. 第(Ⅰ)问是个常规问题，只须对函数求导数，再令导数等于0，即可求得函数 $f(x)$ 的最大值，这一问承前启后，既能使考查继续深入，达到一定的深度；同时又能化解难度，使众多考生容易入手，保持一定的区分度，使不同考生的水平都能得到充分的发挥，从而达到合理区分不同层次考生的目的. 第(Ⅱ)问有一定的难度，可考虑用导数法证，应用导数法证明不等式的一个通行办法是设辅助函数，本题是在一个区间上证明不等式，而不等式涉及的变量就是两个区间的端点，因此设辅助函数时就要把其中的一个端点设为自变量.

也可用初等数学方法证明，但要注意应用第(Ⅰ)问的结论.

证法 2 $g(a)+g(b)-2g(\frac{a+b}{2})=a\ln a+b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2}=a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}$

由(Ⅰ)结论知

$$\ln(1+x)-x<0,\quad x>-1,\text{且 } x\neq 0$$

由题设 $0 < a < b$，得 $\frac{b-a}{2a} > 0$，$-1 < \frac{a-b}{2b} < 0$，因此

$$\ln\frac{2b}{a+b} = -\ln\left(1+\frac{b-a}{2a}\right) > -\frac{b-a}{2a},\ln\frac{2b}{a+b} = -\ln\left(1+\frac{a-b}{2b}\right) > -\frac{a-b}{2b}$$

所以
$$a\ln\frac{2a}{a+b} + b\ln\frac{2b}{a+b} > -\frac{b-a}{2} - \frac{a-b}{2} = 0$$

又
$$\frac{2a}{a+b} < \frac{a+b}{2b}$$

$$a\ln\frac{2a}{a+b} + b\ln\frac{2b}{a+b} < a\ln\frac{a+b}{2b} + b\ln\frac{2b}{a+b} = (b-a)\ln\frac{2b}{a+b} < (b-a)\ln 2$$

综上得
$$0 < g(a) + g(b) - 2g\left(\frac{a+b}{2}\right) < (b-a)\ln 2$$

(6) 在实际问题中综合应用函数、数列、不等式的交汇

【例6】 某企业2003年的纯利润为500万元，因设备老化等原因，企业的生产能力将逐年下降. 若不能进行技术改造，预测从今年起每年比上一年纯利润减少20万元，今年初该企业一次性投入资金600万元进行技术改造，预测在未扣除技术改造资金的情况下，第 n 年（今年为第一年）的利润为 $500(1+\frac{1}{2^n})$ 万元（n 为正整数）.

（Ⅰ）设从今年起的前 n 年，若该企业不进行技术改造的累计纯利润为 A_n 万元，进行技术改造后的累计纯利润为 B_n 万元（须扣除技术改造资金），求 A_n、B_n 的表达式；

（Ⅱ）依上述预测，从今年起该企业至少经过多少年，进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润？

解析 本小题主要考查建立函数关系式、数列求和、不等式等基础知识，考查运用数学知识解决实际问题的能力.

（Ⅰ）依题设

$$A_n = (500-20) + (500-40) + \cdots + (500-20n) = 490n - 10n^2$$

$$B_n = 500\left[(1+\frac{1}{2}) + (1+\frac{1}{2^2}) + \cdots + (1+\frac{1}{2^n})\right] - 600 = 500n - \frac{500}{2^n} - 100$$

（Ⅱ）
$$B_n - A_n = (500n - \frac{500}{2^n} - 100) - (490n - 10n^2) = 10n^2 + 10n - \frac{500}{2^n} - 100 =$$
$$10\left[n(n+1) - \frac{50}{2^n} - 10\right]$$

因为函数 $y = x(x+1) - \frac{50}{2^x} - 10$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，当 $1 \leqslant n \leqslant 3$ 时

$$n(n+1) - \frac{50}{2^n} - 10 \leqslant 12 - \frac{50}{8} - 10 < 0$$

当 $n \geqslant 4$ 时

$$n(n+1) - \frac{50}{2^n} - 10 \geqslant 20 - \frac{50}{16} - 10 > 0$$

所以仅当 $n \geqslant 4$ 时，$B_n > A_n$.

答：至少经过4年，该企业进行技术改造后的累计纯利润超过不进行技术改造的累计纯利润.

点评 解答数列应用性问题时，要善于抓住数列的第 n 项与第 $n-1$ 项的内在联系进行综合分析，并在寻找递推关系时，要明晰是解决第 n 项问题还是解决前 n 项和问题.

(7) 考查数列极限的基本概念及运算

【例7】 已知数列 $\{\log_2(a_n-1)\}(n \in \mathbf{N}^*)$ 为等差数列，且 $a_1 = 3$，$a_2 = 5$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_2-a_1} + \frac{1}{a_3-a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1}-a_n}\right) = (\quad)$$

A. 2　　　B. $\frac{3}{2}$　　　C. 1　　　D. $\frac{1}{2}$

解析　本题考查了等差数列、等比数列的通项公式和求和公式及数列极限相关交汇知识，由题意得 $2\log_2^4 = \log_2^2 + \log_2^2 + 2d$，求得 $d = 1$，则 $\log_2(a_n - 1) = 1 + (n-1)1 = n$，所以 $a_n - 1 = 2^n$，即 $a_n = 2^n - 1$，又由

$$\frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{2^{n+1} - 2^n} = \frac{1}{2^n}$$

所以 $$\frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

所以 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{a_2 - a_1} + \frac{1}{a_3 - a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1} - a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

故选 C.

例题链接　已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_2 = \frac{x_1}{2}$，$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$，$n = 3,4,\cdots$，若 $\lim_{x\to\infty} x_n = 2$，则 $x_1 =$（　　）

A. $\frac{3}{2}$　　　B. 3　　　C. 4　　　D. 5

解法 1　特殊值法，当 $x_1 = 3$ 时，$x_2 = \frac{3}{2}$，$x_3 = \frac{9}{4}$，$x_4 = \frac{15}{8}$，$x_5 = \frac{33}{16}$，$x_6 = \frac{63}{32}$.

由此可推测 $\lim_{x\to\infty} x_n = 2$，故选 B.

解法 2　因为 $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$，所以 $x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2})$，即 $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} = -\frac{1}{2}$，所以 $\{x_{n+1} - x_n\}$ 是以 $(x_2 - x_1)$ 为首项，以 $-\frac{1}{2}$ 为公比 q 的等比数列，令 $b_n = x_{n+1} - x_n$，则

$$b_n = b_1 q^{n-1} = (x_2 - x_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{x_1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n x_1$$

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) =$$

$$x_1 + \left(-\frac{x_1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 x_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 x_1 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} x_1 =$$

$$x_1 + \frac{-\frac{x_1}{2}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2x_1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{x_1}{3}$$

所以 $$\lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x_1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{x_1}{3}\right] = \frac{2x_1}{3} = 2$$

所以 $x_1 = 3$，故选 B.

解法 3　因为 $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$，所以 $2x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0$，所以其特征方程为 $2a^2 - a - 1 = 0$，解得 $a_1 = -\frac{1}{2}$，$a_2 = 1$，$x_n = c_1 a_1^n + c_2 a_2^n$，因为 $x_1 = x_1$，$x_2 = \frac{x_1}{2}$，所以 $c_1 = -\frac{2x_1}{3}$，$c_2 = \frac{2x_1}{3}$，所以

$$x_n = -\frac{2x_1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2x_1}{3} = \frac{2x_1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{x_1}{3}$$

以下同解法 2.

(8) 函数极限的基本概念及运算

【例 8】　若 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1} = 1$，则 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(2-2x)} =$（　　）

A. -1　　　B. 1　　　C. $-\frac{1}{2}$　　　D. $\frac{1}{2}$

解析 本题主要是考查函数极限法则的运用，涉及函数在某一点的极限的有关知识. 令 $t = x - 1$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = 1$，令 $s = 2 - 2x$，则

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(2-2x)} = \lim_{s\to 0}\frac{-\frac{s}{2}}{f(s)} = -\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\frac{s}{f(s)} = -\frac{1}{2}$$

故选 C.

点评 本题首先利用整体代换的方法，简化极限运算的式子，然后使用配凑法，将最值式子进行简化，再将简化后的条件代入因式，得出解. 在解此类题目时，先适当地将条件化简是解决问题的关键.

(9) 综合数列、不等式、数学归纳法、数列极限等知识

【例 9】 已知 $a > 0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}, n = 1,2,\cdots$.

(Ⅰ) 已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$（将 A 用 a 表示）；

(Ⅱ) 设 $b_n = a_n - A, n = 1,2,\cdots$，证明：$b_{n+1} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$；

(Ⅲ) 若 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立，求 a 的取值范围.

解析 本小题主要考查数列、数列极限的概念和数学归纳法，考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力.

(Ⅰ) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，且 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n (A > 0)$，对 $a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}$ 两边取极限得 $A = a + \frac{1}{A}$，解得 $A = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$. 又 $A > 0$，所以 $A = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$.

(Ⅱ) 由

$$a_n = b_n + A, a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}$$

得

$$b_{n+1} + A = a + \frac{1}{b_n + A}$$

所以

$$b_{n+1} = a - A + \frac{1}{b_n + A} = -\frac{1}{A} + \frac{1}{b_n + A} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$$

即 $b_{n+1} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$ 对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立.

(Ⅲ) **解法 1** 令 $|b_1| \leqslant \frac{1}{2}$，得 $\left|a - \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+4})\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

所以 $\left|\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4} - a)\right| \leqslant \frac{1}{2}$，所以 $\sqrt{a^2+4} - a \leqslant 1$，解得 $a \geqslant \frac{3}{2}$.

现证明当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时，$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立.

① 当 $n = 1$ 时结论成立（已验证）.

② 假设当 $n = k(k \geqslant 1)$ 时结论成立，即 $|b_k| \leqslant \frac{1}{2^k}$，那么

$$|b_{k+1}| = \frac{|b_k|}{|A(b_k + A)|} \leqslant \frac{1}{A|b_k + A|} \times \frac{1}{2^k}$$

故只须证明 $\frac{1}{A|b_k + A|} \leqslant \frac{1}{2}$，即证 $A|b_k + A| \geqslant 2$ 对 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 成立.

由于 $A = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} = \frac{2}{\sqrt{a^2+4} - a}$，而当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{a^2+4} - a \leqslant 1$，所以 $A \geqslant 2$.

所以 $|b_k+A|\geqslant A-|b_k|\geqslant 2-\frac{1}{2^k}\geqslant 1$，即 $A|b_k+A|\geqslant 2$.

故当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$|b_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k+1}}$，即 $n=k+1$ 时结论成立.

根据①和②可知结论对一切正整数都成立.

故 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立的 a 的取值范围为 $[\frac{3}{2},+\infty)$.

解法2 由(Ⅰ)求得 $A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$，所以

$$-\frac{1}{A}=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$$

所以 $$a-A=-\frac{1}{A},a+\frac{1}{A}=A,A^2=\frac{a^2+2+a\sqrt{a^2+4}}{2},A+\frac{1}{A}=\sqrt{a^2+4}$$

所以 $$a_{n+1}-A=a+\frac{1}{a_n}-A=\frac{a_n-A}{-Aa_n},a_{n+1}+\frac{1}{A}=a+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{A}=\frac{Aa_n+1}{a_n}$$

因此 $$\frac{a_{n+1}-A}{a_{n+1}+\frac{1}{A}}=\frac{-\frac{1}{A}a_n+1}{Aa_n+1}=-\frac{1}{A^2}\cdot\frac{a_n-A}{a_n+\frac{1}{A}}$$

所以 $\left\{\frac{a_n-A}{a_n+\frac{1}{A}}\right\}$ 是以 $\frac{a_1-A}{a_1+\frac{1}{A}}=-\frac{1}{A^2}$ 为首项，$-\frac{1}{A^2}$ 为公比的等比数列，故 $\frac{a_n-A}{a_n+\frac{1}{A}}=(-\frac{1}{A^2})^n$. 再将 $a_n=b_n+A$ 代入上式，得 $b_n=\frac{\sqrt{a^2+4}}{(-A^2)^n-1}$.

因为 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，所以 $|b_1|=|a-A|\leqslant\frac{1}{2}$，即 $\left|\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$，得 $a\geqslant\frac{3}{2}$. 从而

$$A^2\geqslant\frac{(\frac{3}{2})^2+2+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2}=4$$

即 $A\geqslant 2$，所以

$$|b_n|=\begin{cases}\frac{\sqrt{a^2+4}}{A^{2n}+1}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{\sqrt{a^2+4}}{A^{2n}-1}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

当 n 为奇数时，$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 可变为 $\left(\frac{A^2}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\geqslant\sqrt{a^2+4}$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立，设

$$C_n=\left(\frac{A^2}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

则 $$\frac{C_{n+1}}{C_n}=\frac{\left(\frac{A^2}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{A^2}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{A^{2n+2}+1}{2A^{2n}+2}\geqslant\frac{4A^{2n}+1}{2A^{2n}+2}>\frac{2A^{2n}+2}{2A^{2n}+2}=1$$

所以 $C_{n+1}>C_n$，因此 $\{C_n\}$ 为递增数列.

当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$C_1\geqslant\sqrt{a^2+4}$ 已成立，故 n 为奇数时已满足 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$.

当 n 为偶数时，$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 恒成立，化为 $f(n)=(\frac{A^2}{2})^n-(\frac{1}{2})^n\geqslant\sqrt{a^2+4}$ 恒成立. 因为 $\frac{A^2}{2}>2$，所

以 $f(n)=\left(\frac{A^2}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 为递增数列，故只须 $f(2)\geqslant\sqrt{a^2+4}$，而

$$f(2)=\left(\frac{A^2}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{A^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{A^2}{2}+\frac{1}{2}\right)>\frac{A^2}{2}+\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{a^2+4}$$

也成立. 故 n 为偶数时已满足 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$.

综上，当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，有 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 恒成立.

点评　这道题内容涉及递推数列、数列极限(极限存在求极限化归为解方程)、数列恒等式的证明、不等式的证明(归纳法、放缩法)，"三问"各有侧重，特别是第三问，其目的是考查我们灵活运用数学知识去分析问题、解决问题的能力. 其中前两问主要考查基本概念及运算技能，第一问即考查数列极限的定义，只须抓住 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，再结合解方程便迎刃而解. 但有些同学对这些概念问题若不是很重视，按思维定式试图由递推关系推导出通项公式，能力强的同学可能用此法勉强解决，但运算量大，得不偿失；第二问实际上是基本的数学式的变形，是这三问中最简单的一问，在第一问未解决的情况下，也应能完成，可实施"跳步解答"，本问的分数应该分段智取；第三问实质是用数学归纳法证明不等式，但入口较难，首先要用到第一问得出的 A 值，还要联想第二问递推关系式，从而选择使用数学归纳法，形式新颖，对考生思维层次要求极高！

此题的设计同时顺应了高考《数学考试大纲》中首次提出的个性品质要求："以实事求是的科学态度解答试题，树立战胜困难的信心，体现锲而不舍的精神." 试想当同学们不能顺利解出第一问时，还会心平气和地做好第二问吗?这里正是考查我们是否具有良好个性品质之匠心所在！

例题链接　1. 已知不等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$，其中 n 为大于 2 的整数，$[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数. 设数列 $\{a_n\}$ 的各项为正，且满足 $a_1=b(b>0)$，$a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$，$n=2,3,4,\cdots$.

(Ⅰ) 证明：$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$，$n=3,4,5,\cdots$；

(Ⅱ) 猜想数列 $\{a_n\}$ 是否有极限?如果有，写出极限的值(不必证明)；

(Ⅲ) 试确定一个正整数 N，使得当 $n>N$ 时，对任意 $b>0$，都有 $a_n<\frac{1}{5}$.

解析　本题主要考查数列、极限及不等式的综合应用以及归纳递推的思想.

(Ⅰ) **证法 1**　因为当 $n\geqslant2$ 时，$0<a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$，所以

$$\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{n}$$

即

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}$$

于是有

$$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{1}{2},\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\geqslant\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}$$

所有不等式两边相加可得

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

由已知不等式知，当 $n\geqslant3$ 时有

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$$

因为 $a_1<b$，所以

$$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{1}{2}[\log_2 n]=\frac{2+b[\log_2 n]}{2b}$$

所以
$$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$$

证法2 设$f(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，首先利用数学归纳法证不等式$a_n\leqslant\frac{b}{1+f(n)b}$，$n=3,4,5,\cdots$.

① 当$n=3$时，由$a_3\leqslant\frac{3a_2}{3+a_2}=\frac{3}{\frac{3}{a_2}+1}\leqslant\frac{3}{3\cdot\frac{2+a_1}{2a_1}+1}=\frac{b}{1+f(3)b}$知不等式成立.

② 假设当$n=k(k\geqslant 3)$时，不等式成立，即$a_k\leqslant\frac{b}{1+f(k)b}$，则
$$a_{k+1}\leqslant\frac{(k+1)a_k}{(k+1)+a_k}=\frac{k+1}{\frac{k+1}{a_k}+1}\leqslant\frac{k+1}{(k+1)\cdot\frac{1+f(k)b}{b}+1}=$$
$$\frac{(k+1)b}{(k+1)+(k+1)f(k)b+b}=$$
$$\frac{b}{1+\left(f(k)+\frac{1}{k+1}\right)b}=\frac{b}{1+f(k+1)b}$$
即当$n=k+1$时，不等式也成立.

由①、②知$a_n\leqslant\frac{b}{1+f(n)b}$，$n=3,4,5,\cdots$；又由已知不等式得
$$a_n<\frac{b}{1+\frac{1}{2}[\log_2 n]b}=\frac{2b}{2+b[\log_2 n]},n=3,4,5,\cdots$$

（Ⅱ）有极限，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

（Ⅲ）因为$\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}<\frac{2}{[\log_2 n]}$，令$\frac{2}{[\log_2 n]}<\frac{1}{5}$，则有
$$\log_2 n\geqslant|\log_2 n|>10\Rightarrow n>2^{10}=1\ 024$$
故取$N=1\ 024$，可使当$n>N$时，都有$a_n<\frac{1}{5}$.

点评 本题意境全新，搭配和谐，数列与不等式自然衔接，开放与限制有机结合，既有考生展示才华的广阔空间，又有区分能力的选拔功能，可谓两全其美，成为试卷中一大亮点.其次，该题体现数列、不等式、极限的智能交汇，设问不拘常规，渐次递进又可跳步作答，贴近教材又富有开放性，深化对理性思维和数学素养的考查，让考生考后对数列极限的思想有进一步思索的空间.这些设计创新，体现命题的"人文关怀"，考查考生的"个性品质"，凸显了课改理念，有利于发挥对中学数学教学的正确导向作用.

2.设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}(n=1,2,3,\cdots)$

（Ⅰ）证明：$a_n>\sqrt{2n+1}$对一切正整数n成立；

（Ⅱ）令$b_n=\frac{a_n}{\sqrt{n}}(n=1,2,3,\cdots)$，判断$b_n$与$b_{n+1}$的大小，并说明理由.

解析 本小题重点考查数列与不等式等知识.

（Ⅰ）**证法1** 当$n=1$时，$a_1=2>\sqrt{2\times1+1}$，不等式成立.

假设当$n=k$时，$a_k>\sqrt{2k+1}$成立.当$n=k+1$时
$$a_{k+1}^2=a_k^2+\frac{1}{a_k^2}+2>2k+3+\frac{1}{a_k^2}>2(k+1)+1$$
所以当$n=k+1$时，$a_{k+1}>\sqrt{2(k+1)+1}$时成立.

综上，由数学归纳法可知$a_n>\sqrt{2n+1}$对一切正整数成立.

证法 2 当 $n=1$ 时，$a_1=2>\sqrt{3}=\sqrt{2\times1+1}$，结论成立.

假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $a_k>\sqrt{2k+1}$.

当 $n=k+1$ 时，由函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}(x>1)$ 的单调性和归纳假设有

$$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{a_k}>\sqrt{2k+1}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

因此只须证

$$\sqrt{2k+1}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\geqslant\sqrt{2k+3}$$

而这等价于

$$\left(\sqrt{2k+1}+\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)^2\geqslant 2k+3\Leftrightarrow\frac{1}{2k+1}\geqslant 0$$

显然成立.

所以当 $n=k+1$ 时，结论成立.因此，$a_n>\sqrt{2n+1}$ 对一切正整数 n 均成立.

证法 3 由递推公式得

$$a_n^2=a_{n-1}^2+2+\frac{1}{a_{n-1}^2},a_{n-1}^2=a_{n-2}^2+2+\frac{1}{a_{n-2}^2},\cdots,a_2^2=a_1^2+2+\frac{1}{a_1^2}$$

上述各式相加并化简得

$$a_n^2=a_1^2+2(n-1)+\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}>2^2+2(n-1)=$$

$$2n+2>2n+1(n\geqslant 2)$$

又当 $n=1$ 时，$a_n>\sqrt{2n+1}$ 明显成立，故 $a_n>\sqrt{2n+1}(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅱ) **解法 1** $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}\sqrt{n}}{a_n\sqrt{n+1}}=\left(1+\frac{1}{a_n^2}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}<\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=$

$$\frac{2(n+1)\sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}=\frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}{n+\frac{1}{2}}<1$$

故

$$b_{n+1}<b_n$$

解法 2 $b_{n+1}-b_n=\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}(a_n+\frac{1}{a_n})-\frac{a_n}{\sqrt{n}}=$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}a_n}[\sqrt{n}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})a_n^2]\leqslant$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}a_n}[\sqrt{n}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(2n+1)]\text{(由(Ⅰ)的结论)}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n}[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(2n+1)]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n}[\sqrt{n(n+1)}-(n+1)]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})<0$$

所以

$$b_{n+1}<b_n$$

解法 3 $b_{n+1}^2-b_n^2=\frac{a_{n+1}^2}{n+1}-\frac{a_n^2}{n}=\frac{1}{n+1}\left(a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2\right)-\frac{a_n^2}{n}=\frac{1}{n+1}\left(2+\frac{1}{a_n^2}-\frac{a_n^2}{n}\right)<$

$$\frac{1}{n+1}\left(2+\frac{1}{2n+1}-\frac{2n+1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}\right)<0$$

故 $b_{n+1}^2<b_n^2$，因此 $b_{n+1}<b_n$.

注 应用数学归纳法证明问题，要按照其步骤，特别是利用假设证 $n = k+1$ 成立，步骤要清晰、明确。由于数列是一种特殊的函数，可利用函数的单调性比较两代数式的大小，一般采用作商、作差等方式解决并灵活运用放缩法。

3. 已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足下列条件：对任意的实数 x_1, x_2 都有

$$\lambda(x_1 - x_2)^2 \leqslant (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]$$

和

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|$$

其中 λ 是大于 0 的常数。设实数 a_0, a, b 满足 $f(a_0) = 0$ 和 $b = a - \lambda f(a)$.

（Ⅰ）证明：$\lambda \leqslant 1$，并且不存在 $b_0 \neq a_0$，使得 $f(b_0) = 0$；

（Ⅱ）证明：$(b - a_0)^2 \leqslant (1 - \lambda^2)(a - a_0)^2$；

（Ⅲ）证明：$[f(b)]^2 \leqslant (1 - \lambda^2)[f(a)]^2$.

解析 利用绝对值不等式及反证法等思想方法解决此类问题较方便.

（Ⅰ）任取 $x_1、x_2 \in \mathbf{R}$ 且 $x_1 \neq x_2$，则由

$$\lambda(x_1 - x_2)^2 \leqslant (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \quad ①$$

和

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| \quad ②$$

可知 $\lambda(x_1 - x_2)^2 \leqslant (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \leqslant |x_1 - x_2| \cdot |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|^2$

从而 $\lambda \leqslant 1$，假设有 $b_0 \neq a_0$，使得 $f(b_0) = 0$，则由式①知

$$0 < \lambda(a_0 - b_0)^2 \leqslant (a_0 - b_0)[f(a_0) - f(b_0)] = 0$$

矛盾.

所以不存在 $b_0 \neq a_0$，使得 $f(b_0) = 0$.

（Ⅱ）由

$$b = a - \lambda f(a) \quad ③$$

可知

$$(b - a_0)^2 = [a - a_0 - \lambda f(a)]^2 = (a - a_0)^2 - 2\lambda(a - a_0)f(a) + \lambda^2[f(a)]^2 \quad ④$$

由 $f(a_0) = 0$ 和式①，得

$$(a - a_0)f(a) = (a - a_0)[f(a) - f(a_0)] \geqslant \lambda(a - a_0)^2 \quad ⑤$$

由 $f(a_0) = 0$ 和式②知

$$[f(a)]^2 = [f(a) - f(a_0)]^2 \leqslant (a - a_0)^2 \quad ⑥$$

将⑤、⑥代入式④，得

$$(b - a_0)^2 \leqslant (a - a_0)^2 - 2\lambda^2(a - a_0)^2 + \lambda^2(a - a_0)^2 = (1 - \lambda^2)(a - a_0)^2$$

（Ⅲ）由式③可知

$$[f(b)]^2 = [f(b) - f(a) + f(a)]^2 = [f(b) - f(a)]^2 + 2f(a)[f(b) - f(a)] + [f(a)]^2 \leqslant$$

$$(b - a)^2 - 2 \cdot \frac{b - a}{\lambda}[f(b) - f(a)] + [f(a)]^2 \xlongequal{\text{(用式②)}}$$

$$\lambda^2[f(a)]^2 - \frac{2}{\lambda}(b - a)[f(b) - f(a)] + [f(a)]^2 \leqslant$$

$$\lambda^2[f(a)^2 - \frac{2}{\lambda} \cdot \lambda \cdot (b - a)^2 + [f(a)]^2 \xlongequal{\text{(用式①)}}$$

$$\lambda^2[f(a)]^2 - 2\lambda^2[f(a)]^2 + [f(a)]^2 =$$

$$(1 - \lambda^2)[f(a)]^2$$

注 对于第（Ⅰ）问，由于题设明显，使得入口难度大为下降，因而对基本功比较扎实的考生来说，较易得分.

对于第(Ⅱ)问,为使用题设,减少不等式两边的差异而实施消元、化归、添项是解题的突破口.

对于第(Ⅲ)问,与第(Ⅱ)问的思路基本相同,需从整体上把握函数 $f(x)$ 的性质,但代换要求更高(逆向代换),且加、减项代换更为灵活.实际上(Ⅱ)和(Ⅲ)的关系是特殊和一般的关系.

这道压轴题设计新颖、构思精巧,"既有高等数学的深刻背景,又有数学分析的方法要求".它以抽象函数为载体,综合考查函数、不等式的证明等热点问题.涉及的数学思想方法主要有分析法、特值法、反证法、消参法、拆项添项法、放缩法、分类讨论法、等价转换等思想,此题运算量较大,能力要求较高,从题意的理解到解题对考生而言都有一定的难度,体现了新高考对考生能力考查的新要求(以逻辑思维能力为核心,全面考查各种能力,强调探究性、综合性应用),综合考查考生的阅读、理解、观察、分析、抽象、概括、推理等数学思维能力,对数学思维品质提出了极高要求,是抽象思维、逻辑思维、数学技巧的全面检测,尤其需要考生具备很强的分析问题的能力,并能灵活运用函数、不等式的综合知识.

特别提醒 解答该题,需认真审读试题,要有整体意识和目标意识.

巧思妙解 (Ⅰ)当 $x_1 \neq x_2$ 时,由已知及绝对值不等式的性质易得

$$\lambda \leqslant \frac{(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)]}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqslant 1$$

即对任意的两个不相等的实数 x_1、x_2,都有

$$\lambda \leqslant \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant 1 \qquad ①$$

由上面的不等式易知 $\lambda \leqslant 1$.假设存在 $b_0 \neq a_0$,使得 $f(b_0) = 0$,则在①中令 $x_1 = b_0, x_2 = a_0$,由于 $f(b_0) - f(a_0) = 0$,故此时式①不能成立,矛盾.故不存在 $b_0 \neq a_0$,使得 $f(b_0) = 0$.

(Ⅱ)若 $a = a_0$,则 $b = a = a_0$,不等式显然成立;若 $a \neq a_0$,则

$$\left(\frac{b - a_0}{a - a_0}\right)^2 = \left(\frac{a - \lambda f(a) - a_0 + \lambda f(a_0)}{a - a_0}\right)^2 = \left(1 - \lambda\frac{f(a) - f(a_0)}{a - a_0}\right)^2 \leqslant (1 - \lambda^2)^2 \leqslant 1 - \lambda^2$$

变形即得所证不等式.

(Ⅲ)若 $b = a$,则 $a = a_0$,不等式显然成立;若 $b \neq a$,则令 $x_1 = b, x_2 = a$,代入式①得

$$\lambda \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant 1$$

将 $b - a = -\lambda f(a)$ 代入上式,并变形得

$$-\lambda \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \leqslant -\lambda^2$$

于是
$$0 \leqslant 1 - \lambda \leqslant \frac{f(b)}{f(a)} \leqslant 1 - \lambda^2$$

故
$$\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right| \leqslant 1 - \lambda^2$$

从而
$$[f(b)]^2 \leqslant (1 - \lambda^2)^2[f(a)]^2 \leqslant (1 - \lambda^2)[f(a)]^2$$

以上证法,抓住了问题的本质特征,在众多字母中抓住最关键的 λ,进而采用分离参变量法,一气呵成.

此外,由该证法,我们还可将后两问结论加强为:

(Ⅱ) $\left|\dfrac{b - a_0}{a - a_0}\right| \leqslant 1 - \lambda^2$;

(Ⅲ) $\left|\dfrac{f(b)}{f(a)}\right| \leqslant 1 - \lambda^2$.

本题意境深远,解法较多,但无论从何处入手,其关键在于:将题目所给条件几何化,应用数形结合的思想,结合函数、解析几何、不等式等相关知识方可迅速获解.

4.误区警示

复习“不等式”，应特别注意以下要点：

① 解不等式的基本途径：等价转化.

② 高度关注字母的总体取值范围，确保变形过程中的等价性.

③ 高度关注参数的分类讨论，并用同一标准对参数进行划分，做到不重不漏.

④ 不可把含参不等式的解集简单地写成并集，要严格地分情况说明.

⑤ 只有深入审题，充分挖掘隐含条件，才能保证代数推理的逻辑性、严密性.

⑥ 均值不等式是“不等式”这一章中的重要内容，也是历年高考重点考查的知识点之一，它的应用范围几乎涉及高中数学的所有章节，且常考常新.但若稍不谨慎，极易发生如下错误：a.忽视定理成立的前提条件；b.忽略定值的选取；c.忽略“=”号成立的可能性.

复习“数列、极限”时，应特别注意以下四点：

① 求数列通项时，致命错误就是漏掉 $n=1$ 时的验证，例如对于 S_n 与 a_n 的关系型问题只看 S_n-S_{n-1}，而忽略 $n=1$.

② 求数列前 n 项的和时，一定要数清项数，选好方法，否则易错.

③ 等比数列求和时，易忽略对 $q=1$ 的讨论.

④ 判定数列的单调性，能否准确地找出哪一项的数值最大也是易错之处.

利用数学归纳法来证明某些与自然数 n 有关的数学命题，关键步骤是利用 $n=k$ 时命题成立这个归纳假设条件来证明 $n=k+1$ 时命题也成立.

5.命题趋向

复习数列知识应解决的主要问题：①理解概念的题目；②等差数列和等比数列中5个量 a_1、a_n、s_n、$d(q)$、n“知三求二”问题；③数列知识在实际中的应用.在解决上述问题时，一是用函数观点来分析、解决有关数列的问题；二是要运用方程的思想来解决等差数列和等比数列中“知三求二”的计算问题；三是能自觉地运用等差数列和等比数列的特性来简化计算；四是掌握必要的技巧(如化归、错位、裂项、逐差等)来解决诸如求一般数列和等问题；五是树立应用意识，能综合应用数列有关知识解决生产、生活中的一些问题.

在数列中，从 a_n 到 S_n，从 S_n 到 a_n，从 a_n 与 S_n 的关系式到 a_n 或 S_n 等，都是数列的基本问题，也是高考命题的热点，解这类考题，需准确掌握 a_n 与 S_n 之间的关系，自如地进行转化、演变，有时还要能派生出一些新的关系式来(如 a_n 与 a_{n-1} 间的关系).解决这类问题，常需要适当的解题技巧，还需一定的综合解决问题的能力.

有关“数列、函数极限”的考题主要是“求极限”，即在掌握极限定义和四则运算的基础上，能准确地求出各种极限.

高考中不等式的考查体现在：

(1) 解不等式

解不等式是基本问题，常见于中档题，求解思路一般比较简单，但必须细心、谨慎.

(2) 证明不等式

不等式的证明非常活跃，它可以和很多内容结合，证明时不仅要用到不等式的性质，不等式证明的技能、技巧，还要用到结合内容的技能、技巧.

① 与数列结合.

数列的通项公式,前 n 项和公式及公式的常规变形,如 $S_n = S_{n-1} + a_n$,$S_n = a_1 + qS_{n-1}$,…,在证明过程中根据试题特点灵活选用.

② 与二次曲线结合.

二次曲线的图形特征、基本量之间的关系,“设而不求”、“整体替换”的技巧及处理方程的常规手法等,在证明过程中都将是重要的辅助内容.

③ 与三角函数结合.

常用的三角公式、三角函数的有界性及三角函数图象性质是证明过程的主要依据.

④ 与“三个二次”结合.

一元二次方程、一元二次不等式及一元二次函数简称“三个二次”.它们互相联系、互相渗透,使这个“知识块”的内容异常丰富,是近年命题的重点,求解时常用的基本知识有:二次方程根的分布、韦达定理、二次函数的图象及函数性质.

另外,特别值得注意的是数列和不等式、数学归纳法、数列极限等知识交汇考查是历年高考的重头戏,此类试题新颖灵活、精巧别致、综合性较强.

（十）数阵为什么能成为高考中的“新宠”

现行高考试卷中融入了新教学大纲的教育理念；汲取新课程标准中的新思想；强调基础和能力并重，知识与能力并举，突出考查了思维、运算、应用等几方面的能力．要求遵循“教育要面向现代化、面向世界、面向未来”的战略思想，以全面推动素质教育，体现了“创新意识的培养，树立以学生发展为本”的全新教育教学理念．而数列中的数阵问题正是符合各项要求的良好载体，成为新课标下数列问题中的一颗璀璨明星，也备受各位命题者的青睐，都力争在高考命题中能摘下这些耀眼的“新星”．

1．知识应用的交融性、试题显现的创新性的要求成为必然

（1）交融性要求

从“知识立意”向“能力立意”转变是高考试题改革的重点之一．在知识的“交汇点”上命题，突出考查了思维、运算、应用等几方面的能力已成为高考考查的必然趋势．数学学科的系统性和严密性决定了数学知识之间深刻的内在联系，包括各部分知识在各自的发展过程中的纵向联系和各部分知识之间的横向联系．要善于从本质上抓住这些联系进而通过分类、梳理、综合，构建数学试题的结构框架，明确解题的方向，加强针对性，注意通性通法，将数学知识与思想方法并重，使知识与思想方法相互促进，才能使我们更深刻地理解数学，从整体上把握数学，从而能灵活地运用数学．数列中蕴含丰富的数学思想，它是解题的指导思想，它较之数学知识技能具有更高的层次．高考解答题已从过去单纯考查数列知识向综合问题转化，已成为沟通函数、三角、方程、不等式、解析几何、导数、矩阵等知识的桥梁，体现了数学知识之间的内在联系．

（2）创新性要求

近年来，随着高考形势的不断变化，对考生的创新意识和创新能力的要求逐渐提高，每年在高考试题中都相继推出一些背景新颖、构思精巧、情境别致，具有相当深度和明确导向的创新题型，使高考数学题充满活力和魅力，它要求考生“对新颖的信息、情境和设问，选择有效的方法和手段，综合与灵活地应用所学的数学知识、思想和方法，进行独立的思考、探索和研究，提出解决问题的思路，创造性地解决问题”，由此可见，在今后的高考试题中，创新题型将具有越来越重的地位．这也应当引起我们的足够重视，只要我们相信一个原则：千变万变，方法不变．创新题只是对以前的问题稍加“化妆”，以一个崭新面目出现在我们面前，使我们乍看其脱俗超群，但只要我们努力揭开题目的“面纱”，便可识别其“真面目”，仍可用旧知新解．当然能做到这一点，首先从心理上要能够超越自我，勇于去接受新知并探求新知的自信．因此，解决数阵问题的重要措施就是“去纱”工作．

【例 1】 定义如下运算

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1k} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & \cdots & y_{2k} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & \cdots & y_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & y_{n3} & \cdots & y_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & \cdots & z_{1k} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & \cdots & z_{2k} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & \cdots & z_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & z_{m3} & \cdots & z_{mk} \end{pmatrix}$$

其中 $z_{ij} = x_{i1}y_{1j} + x_{i2}y_{2j} + x_{i3}y_{3j} + \cdots + x_{in}y_{nj}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n, i, j \in \mathbf{N}^*$

现有 n^2 个正数的数表 A 排成行列如下:(这里用 a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的一个正数, $i,j \in \mathbf{N}^*$)

$$\begin{cases} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{cases}$$

其中每横行的数成等差数列,每竖列的数成等比数列,且各个等比数列的公比相同,若 $a_{24} = 1, a_{42} = \frac{1}{8}, a_{43} = \frac{3}{16}$.

(Ⅰ)求 a_{ij} 的表达式(用 i, j 表示);

(Ⅱ)若 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3^2 \\ 3 & 3^3 \\ \vdots & \vdots \\ n & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} \end{pmatrix}$,求 $b_{i1}, b_{i2}(1 \leqslant i \leqslant n$,用 i, n 表示).

解析 (Ⅰ)每一行的数成等差数列,所以 a_{42}、a_{43}、a_{44} 成等差数列.

所以 $2a_{43} = a_{42} + a_{44}$,所以 $a_{44} = \frac{1}{4}$.又每一列的数成等比数列,故 $a_{44} = a_{24} \cdot q^2$,因为 $a_{24} = 1$,所以 $q^2 = \frac{1}{4}$,且 $a_n > 0$,所以 $q = \frac{1}{2}$,所以

$$a_{4j} = a_{42} + (j-2)d = \frac{1}{8} + (j-2)(a_{43} - a_{42}) = \frac{j}{16}$$

所以
$$a_{ij} = a_{4j}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-4} = \frac{j}{2^i}$$

(Ⅱ) $b_{i1} = \frac{1}{2^i} \times 1 + \frac{2}{2^i} \times 2 + \frac{3}{2^i} \times 3 + \cdots + \frac{n}{2^i} \times n = \frac{1}{2^i}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{n(2n+1)(n+1)}{3 \times 2^{i+1}}$

$$b_{i2} = \frac{1}{2^i} \times 3 + \frac{2}{2^i} \times 3^2 + \frac{3}{2^i} \times 3^3 + \cdots + \frac{n}{2^i} \times 3^n \quad ①$$

所以

$$3b_{i2} = \frac{1}{2^i} \times 3^2 + \frac{2}{2^i} \times 3^3 + \cdots + \frac{n-1}{2^i} \times 3^n + \frac{n}{2^i} \times 3^{n+1} \quad ②$$

② - ① 得
$$2b_{i2} = -\frac{1}{2^i}(3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) + \frac{n}{2^i} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2^i} \times 3 =$$

$$-\frac{1}{2^i} \times \frac{3^2 - 3^{n+1}}{1-3} + \frac{n}{2^i} \times 3^{n+1} - \frac{1}{2^i} \times 3 = \frac{1}{2^{i+1}}[(2n-1)3^{n+1} + 3]$$

所以
$$b_{i2} = \frac{1}{2^{i+1}}[(2n-1)3^{n+1} + 3]$$

点评 新背景等比数列题型往往利用新定义或新概念将等比数列的知识点交汇于其中,该题型是

高考命题的新动向.本题是等比数列与“行列式”相交汇的新背景题型,由于新型的定义式的出现,导致该题型又多了几分神秘的色彩,为我们接受新型问题开拓了眼界.

【例 2】 64 个正数排成 8 行 8 列,如下所示

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{28} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{81} & a_{82} & \cdots & a_{88} \end{matrix}$$

在符号 $a_{ij}(1 \leqslant i \leqslant 8, 1 \leqslant j \leqslant 8)$ 中,i 表示该数所在的行数,j 表示该数所在的列数.已知每一行中的数依次都成等差数列,而每一列中的数依次都成等比数列(每列公比 q 都相等),且 $a_{11} = \frac{1}{2}, a_{24} = 1, a_{32} = \frac{1}{4}$.

(Ⅰ)若 $a_{21} = \frac{1}{4}$,求 a_{12} 和 a_{13} 的值;

(Ⅱ)求 a_{ij} 的通项公式(用 i、j 表示);

(Ⅲ)记第 n 行各项之和为 $A_n(1 \leqslant n \leqslant 8)$,数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 满足 $a_n = \frac{36}{A_n}, mb_{n+1} = 2(a_n + mb_n)$($m$ 为非零常数),$c_n = \frac{b_n}{a_n}$.求证:$\{c_n\}$ 为等差数列.

解析 (Ⅰ)因为 $a_{11} = \frac{1}{2}, a_{21} = \frac{1}{4}$,每一列成公比相等的等比数列,所以其公比 $q = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}$,又因为 $a_{32} = a_{12}q^2 = \frac{1}{4}$,所以 $a_{12} = 1$.

又每一行成等差数列,所以在第一行中有 $\frac{a_{13} + a_{11}}{2} = a_{12}$,所以 $a_{13} = \frac{3}{2}$.

(Ⅱ)设第一行的公差为 d,则

$$a_{24} = a_{14}q = (a_{11} + 3d)q = 1, a_{32} = a_{12}q^2 = (a_{11} + d)q^2 = \frac{1}{4}$$

两式联立解得 $d = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$,从而

$$a_{ij} = a_{1j} \cdot q^{i-1} = [a_{11} + (j-1)d]q^{i-1} = j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

所以
$$a_{ij} = j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

(Ⅲ)
$$A_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{18} = 8a_{11} + \frac{8 \times 7}{2} \times d = 8 \times \frac{1}{2} + \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{1}{2} = 18$$

所以
$$A_n = a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{n8} = a_{11}q^{n-1} + a_{12}q^{n-1} + \cdots + a_{18}q^{n-1} =$$
$$q^{n-1}(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{18}) = (\frac{1}{2})^{n-1} \times 18 = \frac{36}{2^n}$$

所以
$$a_n = \frac{36}{A_n} = 2^n$$

由 $mb_{n+1} = 2(a_n + mb_n)$ 得

$$mb_{n+1} - 2mb_n = 2a_n = 2^{n+1}$$

两边同除以 2^{n+1} 得 $m\left(\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n}\right) = 1$,即 $m\left(\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n}\right) = 1$,所以 $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{m}$(常数).

所以数列 $\{c_n\}$ 成等差数列.

点评 近年来,随着高考形势的不断变化,对考生的创新意识和创新能力的要求逐渐提高,每年在高考试题中都相继推出一些背景新颖、构思精巧、情境别致,具有相当深度和明确导向的创新题型.数阵

载体的引入一改数列知识的单调、呆板的引人形式，使高考数学题充满活力和魅力，此类新颖题要求学生"对新颖的信息、情境和设问，选择有效的方法和手段，综合与灵活地应用所学的数学知识、思想和方法，进行独立的思考、探索和研究，提出解决问题的思路，创造性地解决问题".

2. 紧贴课改彰显理念

体现学生个性发展和自主学习、主动探究精神的要求成为必然.

高中数学课程基本理念之一就是倡导积极主动、勇于探索的学习方式，并且指出，高中数学课程设立"数学探究"、"数学建模"等学习活动，为学生形成积极主动的、多样的学习方式进一步创造有利的条件.现行高考试卷充分考虑了以上变化，紧贴数学课程改革，紧跟数学教学实际，专门设置了应用性、开放性的试题来考查数学应用意识和数学探究能力.探究类试题从知识层面上看并不深奥，但对思维能力的要求很高，反映了课程改革中研究性学习的精神.要求考生细致地对数学对象进行观察，寻找数学规律，形成直觉，产生由一般到特殊的猜想，并最终抓住问题特征，以达到解决问题的目的.如果把一个数学问题看作是由条件、解题依据、解题方法和结论这四个要素组成的一个系统，那么我们把这四个要素中有两个是未知的数学问题称为探索性问题.数学探索性问题的解答一般没有固定的、现成的模式可循，它有较强的思维发散性，它要求有较强的综合能力，能自己主动探索，通过分析、判断、演绎、推理、联想、转化、类比、猜想等多种思维形式，自我设计解决方案.此类问题是以考查学生的创新意识、创新精神为目标的一种题型，常以新颖的形式出现，解题入口宽，而且往往有比较隐蔽的条件，解这类问题必须通过分析判断、演绎推理、联想转化、类比联想、尝试探索等多种思维形式去寻求解题途径、探索一类新的结论.探索性问题成了近几年高考命题中的热点问题，之所以在高考试题中渗入探索性的问题，是因为：第一，数学在将获得的知识和结论按一定的逻辑体系整理后是一门演绎科学，但对知识的形成过程来说，又是一门实验的科学.如果只重视严密的逻辑推理运算，虽然能有效地发展逻辑思维能力，但对于发展在类比、归纳和联想基础上的发现力和创造力则是不利的；第二，学生的解题过程是一种探索性活动的过程.在这个过程中，主要的思维方式是探索性思维，它包括直觉思维和逻辑思维两种基本成分.采用探索性试题，对于考查学生的分析问题、解决问题的能力及探索性思维能力，选拔高等学校新生有着十分重要的意义，同时又能达到一个好的区分度指标，做到一种理想的平衡.基于这些因素，所以这一类问题备受高考命题者青睐，也成为学生甄别自身素养和自我展示的一个良好载体.数阵问题正是秉承了这一重要使命，尽展其开放性、探索性特点，成为数列问题在"引入"方面改革的必然趋势.

【例3】 在如下所示的 5×5 的25个空格中填入正整数，使得每一行，每一列都成等差数列，问必须填进标有 * 号的空格的数是________.

				*
	74			
$2y$				186
y		103		
0	x	$2x$		

设出通项 a_{ij} 为从上到下第 i 行,从左到右第 j 列的空格中所填的数,根据其特征规律及等差数列的性质,将未知数据的关系式列出,求得方程组的解.

解析 设 a_{ij} 为从上到下第 i 行,从左到右第 j 列的空格中所填的数,则 $a_{52}=x$,$a_{41}=y$.由第3行得 $a_{33}=\dfrac{2y+186}{2}$,由第3列得 $a_{33}=2\times 103-2x$,所以

$$2x+y=113 \qquad ①$$

由第2行得 $a_{23}=2\times 74-3y$,由第3列得 $a_{23}=2a_{33}-103=3\times 103-4x$,所以 $148-3y=3\times 103-4x$,整理得

$$4x-3y=161 \qquad ②$$

联立①②解得 $x=50$,$y=13$,所以

$$a_{15}=2\times 186-a_{55}=2\times 186-4x=172, a_{13}=2a_{33}-a_{53}=112$$

故

$$a_{14}=\frac{a_{13}+a_{15}}{2}=142$$

故标有 * 号的空格应填142.

点评 新课标重视学生的探究能力,用数据阵形式给出的行列均成等差数列的"数"据表,其表格中的数据编制时关系不是非常明显,这也正是高考考查探究能力的重要形式.以数据表格、杨辉三角或数矩阵为载体的探究题已经成为高考的趋势.

【例4】 用 n 个不同的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可得 $n!$ 个不同的排列,每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵.对第 i 行 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$,记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}+\cdots+(-1)^n na_{in}$,$i=1,2,3,\cdots,n!$.用1,2,3可得数阵如图1所示,由于此数阵中每一列各数之和都是12,所以,$b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times 12-3\times 12=-24$.那么,在用1,2,3,4,5形成的数阵中,$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$ ______.

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

图1

解析 由数阵的规律并进行重新组合可知

$$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=-(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{(120)1})+2(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{(120)2})-\cdots-5(a_{15}+a_{25}+\cdots+a_{(120)5})$$

而

$$a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{(120)1}=a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{(120)2}=\cdots=a_{15}+a_{25}+\cdots+a_{(120)5}=15\times 24=360$$

所以

$$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=360\times(-1+2-3+4-5)=-1\,080$$

问题引申 我们对此问题的结论作一推广.

推广1 该题可以推广出一般结论吗?如用 $1,2,3,\cdots,n$ 形成的数列中,求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n!}$ 的值.

(1) 当 n 为偶数时,得到一个 $n!$ 行 n 列的数阵如下:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{(n!)1} & a_{(n!)2} & a_{(n!)3} & \cdots & a_{(n!)j} & \cdots & a_{(n!)n} \end{matrix}$$

其中

$$b_i=-a_{i1}+a_{i2}-a_{i3}+\cdots-(n-1)a_{i(n-1)}+na_{in}, i=1,2,3,\cdots,n!$$

注意到第 j 列中的 $n!$ 项分别为:$a_{1j},a_{2j},a_{3j},\cdots,a_{ij},\cdots,a_{(n!)j}(j=1,2,3,\cdots,n)$.

且 $a_{ij}\in\{1,2,3,\cdots,n\}$,其中与 a_{ij} 相同的项恰有 $A_{n-1}^{n-1}=(n-1)!$ 项,所以

$$\overbrace{a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}+\cdots+a_{ij}+\cdots+a_{(n!)j}}^{n\times(n-1)!\text{项}}=1\cdot(n-1)!+2\cdot(n-1)!+\cdots+n(n-1)!=\frac{n(n+1)}{2}(n-1)!=\frac{(n+1)!}{2}$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n!}a_{ij}=\frac{(n+1)!}{2},j=1,2,3,\cdots,n$$

所以
$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n!}=-\sum_{i=1}^{n!}a_{i1}+2\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i2}-3\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i3}+\cdots+(-1)^j\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{ij}+\cdots+n\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{in}=[-1+2-3+\cdots-(n-1)+n]\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\frac{n}{2}\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\frac{n}{4}\cdot(n+1)!$$

(2) 当 n 为奇数时，同理得到

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n!}=-\sum_{i=1}^{n!}a_{i1}+2\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i2}-3\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i3}+\cdots+(-1)^j\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{ij}+\cdots+(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i(n-1)}-n\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{in}=[-1+2-3+\cdots+(n-1)-n]\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\left(\frac{n-1}{2}-n\right)\cdot\frac{(n+1)!}{2}=-\frac{n+1}{4}\cdot(n+1)!$$

从该题的推广分析过程可知，如何求所得数阵各列之和以及为何各列之和相等是关键，至于 b_i 中的各项系数还可以加以改造与推广.

推广 2　若此题中，记 $b_i=a_{i1}+2a_{i2}+3a_{i3}+\cdots+(n-1)a_{i(n-1)}+na_{in}$，则求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n!}$ 的值.

分析　由问题 1 的探究过程知

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n!}=1\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i1}+2\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i2}+3\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i3}+\cdots+n\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{in}=(1+2+3+\cdots+n)\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\frac{n(n+1)}{4}\cdot(n+1)!$$

推广 3　若此题中，记 $b_i=a_{i1}+2a_{i2}+4a_{i3}+\cdots+2^{n-2}a_{i(n-1)}+2^{n-1}a_{in}$，则求 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n!}$ 的值.

分析　由推广 1 的探究过程知

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n!}=1\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i1}+2\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i2}+2^2\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{i3}+\cdots+2^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n!}a_{in}=(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\frac{1-2^n}{1-2}\cdot\frac{(n+1)!}{2}=\frac{2^n-1}{2}\cdot(n+1)!$$

这样的结论还可以不断地进行推广.

点评　该问题以数阵形式给出，一改直接给出问题的常态，新颖别致，增加了解题的趣味性和新鲜感，同时也考查了会灵活运用整体思想解题. 通过该道高考题的推广及探索过程，对培养学生的探究能力，牢固树立学生的分类讨论思想、排列与组合思想以及数列求和思想都大有裨益，也对今后学习高等

数学中的矩阵问题打下伏笔,是一道难得的好题.

【例5】 在一个有限的实数列中,任意7个连续项之和都是负数,而任意11个连续项之和都是正数.试问:此数列最多能包含多少项?

分析 根据题目所给已知条件,可构造一个每横行7个数,每纵列11个数的数阵如下:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_8 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots & a_9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{17} \end{matrix}$$

考虑到没一横行为连续7项,其和小于0,没一纵列为连续11项,其和大于0,于是得到矛盾,所以 $n<17$.

另一方面有可能构造一个连续16项的数列满足题目要求:6,6,-15,6,6,6,-16,6,6,-16,6,6,6,-15,6,6,故符合条件的数列最多有16项.

点评 对于这一类问题的设计,可使学生心态开放,主体性凸现,个性张扬,创造性得到释放.

3.推陈出新——传统内容新考,试题形式引入新颖性的要求成为必然

对传统内容的处理,设计了新的考查形式,编拟了新的题型,开发了新的背景.试题切入容易,深入难,有利于区分考生,鼓励考生多层次、多样化的发展,贯彻了发展性课程评价的理念.此类信息迁移题是指以考生已有的知识为基础,在此基础上设置一个新的数学情境(数阵),或把已有的知识进一步引申,设置一个简单而又熟悉的物理情境或生活情境或定义新的数学内容,要求考生读懂题目,并根据题目引入的新内容解题.考试的目的不仅要把贮存于大脑之中的知识搬出来,而且要应用知识去解决不同情境的问题,也就是考查能力,所以考查信息、知识迁移的能力是今后高考命题的一个重要方向.

【例6】 将全体正整数排成一个三角形数阵

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \\ & & & \cdots & & & \end{matrix}$$

按照以上排列的规律,第 $n(n\geqslant 3)$ 行从左向右的第3个数为______.

解析 前 $n-1$ 行共用了 $1+2+3+\cdots(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$ 个数,因此第 $n(n\geqslant 3)$ 行从左向右的第3个数是全体正整数中的第 $\frac{(n-1)n}{2}+3$ 个,即为 $\frac{n^2-n+6}{2}$.

点评 高考对计算能力的考查是多角度、多层次的,尤其重视计算中的推理.本题对数阵中数字规律的探寻有一定的综合度和灵活性,运算中的推理性强.这启示我们,要充分重视解题过程中的推理,注意运用推理来简化运算.充分利用题目给出的信息,从不同的知识点切入,能运用不同的思想方法解题,其中的某些解法能使解题更为合理、快捷,认真提炼和总结解题方法能使运算能力不断提高.

【例7】 下表给出一个"三角形数阵"

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4},\frac{3}{8},\frac{3}{16}$$

…

已知每一列的数成等差数列;从第三行起,每一行的数成等比数列,每一行的公比都相等.记第 i 行第 j 列的数为 $a_{ij}(i \geqslant j, i, j \in \mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)求 a_{83};

(Ⅱ)试写出 a_{ij} 关于 i、j 的表达式;

(Ⅲ)记第 n 行的和为 A_n,求数列 $\{A_n\}$ 的前 m 项和 B_m 的表达式.

解析 弄清数阵中每一行(列)的数排列的规律,转化成相应的数列的问题.

(Ⅰ)由题知,$\{a_{i1}\}$ 为等差数列,因为,$a_{11}=\frac{1}{4}$,$a_{21}=\frac{1}{2}$,所以公差

$$d=\frac{1}{4},a_{81}=\frac{1}{4}+(8-1)\times\frac{1}{4}=2$$

又各行成等比数列,公比都相等,$a_{31}=\frac{3}{4}$,$a_{32}=\frac{3}{8}$,所以每行的公比是 $q=\frac{1}{2}$,所以

$$a_{83}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)知

$$a_{i1}=\frac{1}{4}+(i-1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{i}{4}$$

所以

$$a_{ij}=a_{i1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}=\frac{i}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}=i\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}$$

(Ⅲ)$A_n=a_{n1}\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{n}{4}\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{n}{2}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$B_m=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+m)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{m}{2^m}\right)$$

设

$$T_m=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{m}{2^m} \quad ①$$

则

$$\frac{1}{2}T_m=\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\cdots+\frac{m}{2^{m+1}} \quad ②$$

由①-②,得

$$\frac{1}{2}T_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^m}-\frac{m}{2^{m+1}}=1-\frac{1}{2^m}-\frac{m}{2^{m+1}}=1-\frac{m+2}{2^{m+1}}$$

所以

$$B_m=\frac{1}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}-\left(1-\frac{m+2}{2^{m+1}}\right)=\frac{m(m+1)}{4}+\frac{m+2}{2^{m+1}}-1$$

点评 解决数阵问题的关键是抓住题目中所给出的各行与各列所构成数列的类型,再根据所给出的特殊项推出各行、各列的前几项,进而求出通项.

【例8】(2008年山东文19·理20)将数列 $\{a_n\}$ 中的所有项按每一行比上一行多一项的规则排成如下数表

a_1

a_2 a_3

a_4 a_5 a_6

a_7 a_8 a_9 a_{10}

…

记表中的第一列数 $a_1,a_2,a_4,a_7,\cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$，$b_1=a_1=1$，S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，且满足

$$\frac{2b_n}{b_nS_n-S_n^2}=1,n\geqslant 2$$

（Ⅰ）证明：数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 成等差数列，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）上表中，若从第3行起，第一行中的数按从左到右的顺序均构成等比数列，且公比为同一个正数. 当 $a_{81}=-\frac{4}{91}$ 时，求上表中第 $k(k\geqslant 3)$ 行所有项的和.

解析 （Ⅰ）由已知，当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{2b_n}{b_nS_n-S_n^2}=1$，又 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，所以

$$\frac{2(S_n-S_{n-1})}{(S_n-S_{n-1})S_n-S_n^2}=1$$

即

$$\frac{2(S_n-S_{n-1})}{-S_{n-1}S_n}=1$$

所以 $\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=\frac{1}{2}$. 又 $S_1=b_1=a_1=1$，所以数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是首项为1，公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，由上可知

$$\frac{1}{S_n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$$

即

$$S_n=\frac{2}{n+1}$$

所以当 $n\geqslant 2$ 时

$$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=-\frac{2}{n(n+1)}$$

因此

$$b_n=\begin{cases}1, & n=1\\ -\frac{2}{n(n+1)}, & n\geqslant 2\end{cases}$$

（Ⅱ）设上表中从第3行起，每行的公比都为 q，且 $q>0$.

因为 $1+2+\cdots+12=\frac{12\times 13}{2}=78$，所以表中第1行至第12行共含有数列 $\{a_n\}$ 的前78项，故 a_{81} 在表中第13行第3列，因此 $a_{81}=b_{13}\cdot q^2=-\frac{4}{91}$，又 $b_{13}=-\frac{2}{13\times 14}$，所以 $q=2$.

记表中第 $k(k\geqslant 3)$ 行所有项的和为 S，则

$$S=\frac{b_k(1-q^k)}{1-q}=-\frac{2}{k(k+1)}\cdot\frac{(1-2^k)}{1-2}=\frac{2}{k(k+1)}(1-2^k),k\geqslant 3$$

点评 本题秉承历来高考的数数列解答题着重于抽象推理，考查理性思维能力的做法，能有效地考查考生的数学功底. 试题的条件，探索问题的给出为常见的，妙笔在于改变原来给出结论的做法，使考查的角度常考常新，需要考生现场发挥，独立思考，自主完成. 全题结构优美，一气呵成，前后呼应，表现出数学结构的严密，数学网络的畅通，能在较深的思维层次上考查理解、分析、解决问题的能力.

4. 知识应用生活化、科技化要求成为必然

解决实际生活和经济活动中的数学应用问题，首先要抓住题目所给的数据信息，将它们有机地结合在一起，找出它们之间的相互关系. 如果题设中存在相邻两项之差为一定值，我们通常构造等差数列模型；如果能找到前后两项之比为定值，则构建等比数列模型. 在正确选择数学模型之后，再用数列的知识和方法予以解决.

【例9】（2006广东·14）在德国不来梅举行的第48届世乒赛期间，某商场橱窗里用同样的乒乓球堆

成若干堆"正三棱锥"形的展品，其中第1堆只有一层，就一个乒乓球；第2,3,4,… 堆最底层(第一层)分别按图2中所示方式固定摆放，从第二层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球，以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数，则 $f(3)=$ ________，$f(n)=$ ________(答案用 n 表示)．

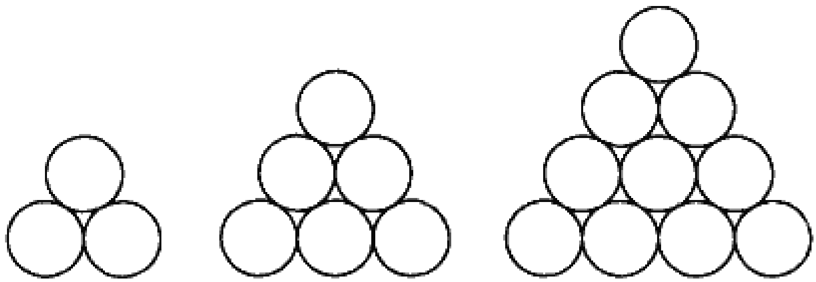


图2

解法1(猜想法) $a_1=1=\dfrac{1\times 2}{2}, a_2=3=\dfrac{2\times 3}{2}, a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$f(3)=1+3+6=10, f(n)=\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)$$

解法2(递推法) 由已知可得 $f(3)=1+3+6=10$．设第 n 层的乒乓球个数为 a_n，则

$$a_2-a_1=3-1=2, a_3-a_2=6-3=3, a_4-a_3=4, a_5-a_4=5, \cdots, a_n-a_{n-1}=n$$

将这 $n-1$ 个式子相加，可得

$$a_n-a_1=\frac{(n-1)(2+n)}{2}$$

即得

$$a_n=\frac{(n-1)(2+n)}{2}+1=\frac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2$$

所以

$$f(n)=C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{n+1}^2=C_3^3+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{n+1}^2=C_{n+2}^3=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

点评 本题以第48届世乒赛为背景，将乒乓球的堆垒问题与数列相结合，考查了二阶递推数列的通项公式的求解及数列前 n 项和的求解，将平方和的数列求和问题转化为组合数的性质公式运算，回避了对自然数平方数列求和公式的应用及掌握．

（十一）一道高考抛物线题的深层探究

1. 高考真题

（2007年高考江苏卷第19题）如图1，在平面直角坐标系 xOy 中，过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线，与抛物线 $y=x^2$ 相交于 A、B 两点，一条垂直于 x 轴的直线，分别与线段 AB 和直线 $l:y=-c$ 交于 P、Q.

（Ⅰ）若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，求 c 的值；

（Ⅱ）若 P 为线段 AB 的中点，求证：QA 为此抛物线的切线；

（Ⅲ）试问（Ⅱ）的逆命题是否成立？说明理由.

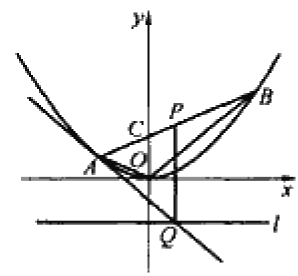


图 1

2. 试题解读

本题的背景取自人民教育出版社高中数学教材（必修）第二册（上）（2006年11月第2版）第137页习题8.6第6题，但进行了再创造，将解析几何与导数、向量等知识融为一体，主要考查抛物线的性质、直线与抛物线的位置关系、向量的数量积、导数的应用、简易逻辑等基础知识和基本运算，考查分析问题、探索问题的能力，重在考查通性通法——代入消元、设而不求、斜率与导数的关系，综合性极强，但难度并不大. 在高考考查的能力要求中，第（Ⅰ）问属第一层次，第（Ⅱ）、（Ⅲ）问属第二层次，虽说第（Ⅲ）问设计的是一个探究性问题，但（Ⅲ）和（Ⅱ）的处理方法类似，若能先完成（Ⅱ），然后作出判断，逆向证明（Ⅲ）也并不太困难，因此这是一道上手容易却又尽显精彩的好题，值得深研细究！

3. 解法探究

第（Ⅰ）问

常规解法

解法1 依已知，设过点 C 的直线方程为 $y=kx+c$，代入 $y=x^2$，得 $x^2-kx-c=0(c>0)$，设 $A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$，则

$$x_1+x_2=k \quad ①$$

$$x_1x_2=-c \quad ②$$

由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，得 $x_1x_2+(x_1x_2)^2=2$，即 $c^2-c-2=0$，故 $c=2$（因为 $c>0$，所以 $c=-1$ 应舍去）.

解法2 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，得 $x_1x_2+y_1y_2=2$，由前面解法知

$$x_1x_2+(kx_1+c)(kx_2+c)=2$$

即

$$(k^2+1)x_1x_2+kc(x_1+x_2)+c^2=2$$

将①、②代入，得 $c^2-c-2=0$，故 $c=2$（$c=-1$ 已舍去）.

特殊解法

解法1 设 $A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$，因 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则 $x_1x_2+(x_1x_2)^2=2$，所以 $x_1x_2=-2$，$x_1x_2=1$（不合已知，舍去）. 直线 AB 的斜率

$$k=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2$$

因为
$$\begin{cases}x_1^2=kx_1+c\\x_2^2=kx_2+c\end{cases}$$
所以
$$x_1^2+x_2^2=k(x_1+x_2)+2c$$
即
$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=k(x_1+x_2)+2c$$
也即 $k^2+4=k^2+2c$，所以 $c=2$.

注 关键揭示隐含条件"$k=x_1+x_2$".

解法2 设 $A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$，因 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则 $x_1x_2+(x_1x_2)^2=2$，所以 $x_1x_2=-2$，$x_1x_2=1$（不合已知，舍去），因为 $\frac{x_1^2-c}{x_1-0}=\frac{x_2^2-c}{x_2-0}$，化简得 $c=-x_1x_2=2$.

注 关键揭示隐含条件"$c=-x_1x_2$".

创新解法

解法1 假设 $AB\parallel x$ 轴，则 $A(-\sqrt{c},c)$、$B(\sqrt{c},c)$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，得 $-c+c^2=2$，所以 $c=2$（$c=-1$ 已舍）.

解法2 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，得 $x_1x_2+y_1y_2=2$. 因为 A、B 在抛物线 $y=x^2$ 上，不妨取 $A(-1,1)$、$B(2,4)$，由 A、B、C 三点共线易得 $c=2$.

解法3 假设 $AB\parallel x$ 轴，则
$$A(-\sqrt{c},c),|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{c+c^2},\cos\angle AOC=\frac{c}{\sqrt{c+c^2}}$$
所以
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos 2\angle AOC=(\sqrt{c+c^2})^2(2\cos^2\angle AOC-1)=$$
$$(c+c^2)\left(\frac{2c^2}{c+c^2}-1\right)=c^2-c=2$$
因此 $c=2$（$c=-1$ 已舍）.

注 创新解法创新之处在于"从特殊情形或极端情形"入手获解.

第（Ⅱ）问

常规解法

解法1 过点 A 的切线方程是 $y-y_1=2x_1(x-x_1)$，即 $y=2x_1x-x_1^2$，因为点 P 是 AB 的中点，所以 $Q(\frac{k}{2},-c)$，把 $x=\frac{k}{2}$ 代入 $y=2x_1x-x_1^2$，得 $y=kx_1-x_1^2$，即 $y=kx_1-y_1=-c$，即以 A 为切点的直线过点 Q，所以 AQ 为抛物线的切线.

解法2 过点 Q 且以 $2x_1$ 为斜率的直线 l' 的方程是 $y=-c+2x_1(x-\frac{k}{2})$，把 $x=x_1$ 代入得
$$y=-c+2x_1(x_1-\frac{x_1+x_2}{2})=x_1x_2+x_1^2-x_1x_2=x_1^2$$
因此直线 l' 过点 A，所以 AQ 为抛物线的切线.

解法3 将直线 l' 的方程 $y=-c+2x_1(x-\frac{k}{2})$ 与抛物线的方程 $y=x^2$ 联立，可证得此方程组有唯一解 $\begin{cases}x=x_1\\y=x_1^2\end{cases}$，故 AQ 为抛物线的切线.

注 以上3种常规解法（通法）的关键是证明"过点 A（点 Q）且以切线斜率 $2x_1$ 为斜率的直线，必通过点 Q（点 A）".

解法4 因为点 P 是 AB 的中点，所以
$$Q(\frac{x_1+x_2}{2},-c),k_{AQ}=\frac{x_1^2+c}{x_1-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{x_1^2-x_1x_2}{\frac{x_1-x_2}{2}}=2x_1$$

又 $y'=2x$，故以 A 为切点的切线斜率 $k_A=2x_1$，则 $k_{AQ}=k_A$，所以 AQ 为抛物线的切线.

解法 5 因为点 P 是 AB 的中点，所以 $Q(\frac{k}{2},-c)$，$k_{AQ}=\frac{y_1+c}{x_1-\frac{k}{2}}$，又 $x_1^2-kx_1-c=0$，故 $c=x_1^2-12x_1$，则

$$k_{AQ}=2\cdot\frac{x_1^2+(x_1^2-kx_1)}{2x_1-k}=2x_1$$

又 $y'=2x$，故以 A 为切点的切线的斜率 $k_A=2x_1$，从而 $k_{AQ}=k_A$，所以 AQ 为抛物线的切线.

注 以上 2 种常规解法(通法)的关键是证明"$k_{AQ}=k_A$".

解法 6 设过点 C 的直线方程是 $y=kx+c$，代入 $y=x^2$，得 $x^2-kx-c=0$，$x_1=\frac{k-\sqrt{k^2+4c}}{2}$，因为点 P 是 AB 的中点，故 $Q(\frac{k}{2},-c)$，所以

$$k_{AQ}=\frac{y_1+c}{x_1-\frac{k}{2}}=\frac{\left(k\cdot\frac{k-\sqrt{k^2+4c}}{2}+c\right)+c}{\frac{k-\sqrt{k^2+4c}}{2}-\frac{k}{2}}=k-\sqrt{k^2+4c}$$

因此 AQ 的直线方程是

$$y=(k-\sqrt{k^2+4c})(x-\frac{k}{2})-c$$

代入 $y=x^2$，得

$$x^2-(k-\sqrt{k^2+4c})x+\frac{k}{2}(k-\sqrt{k^2+4c})+c=0$$

$$\Delta=(k-\sqrt{k^2+4c})^2-4[\frac{k}{2}(k-\sqrt{k^2+4c})+c]=0$$

所以 AQ 为抛物线的切线.

解法 7

$$k_{AQ}=\frac{x_1^2+c}{x_1-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{x_1^2-x_1x_2}{\frac{x_1-x_2}{2}}=2x_1$$

所以 AQ 的直线方程是 $y-y_1=2x_1(x-x_1)$，即 $y=2x_1x-x_1^2$，代入 $y=x^2$，得 $x^2-2x_1x+x_1^2=0$，所以 $\Delta=(-2x_1)^2-4x_1^2=0$，所以 AQ 为抛物线的切线.

注 解法 6 和解法 7 关键是证明"$\Delta=0$".

解法 8 由 $x^2-kx-c=0$，得 $x_1=\frac{k-\sqrt{k^2+4c}}{2}$. 设过点 Q 与抛物线相切的左切线方程是 $y+c=m(x-\frac{k}{2})$，代入 $y=x^2$，得 $x^2-mx+\frac{km}{2}+c=0$，所以 $\Delta=m^2-4(\frac{km}{2}+c)=0$，$m=k-\sqrt{k^2+4c}$ 或 $m=k+\sqrt{k^2+4c}$(不合题意，舍去)，所以切点横坐标是 $\frac{m}{2}=\frac{k-\sqrt{k^2+4c}}{2}=x_1$，所以 AQ 为抛物线的切线.

注 解法 8 关键是证明"过点 Q 与抛物线相切的左切线的切点是点 A".

创新解法

设 $A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$，以 A、B 为切点的切线方程分别是

$$y-x_1^2=2x_1(x-x_1),\ y-x_2^2=2x_2(x-x_2)$$

联立解得 $\begin{cases}x=\frac{x_1+x_2}{2}\\ y=x_1x_2=-c\end{cases}$，即两切线交点必为点 Q，所以 AQ 为抛物线的切线.

注 此解法的创新之处是揭示了隐含条件"A、B两点是对称的"，从而减少了计算量.

第(Ⅲ)问

常规解法

解法1 设$A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$，以A为切点的切线方程是$y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，令$y=-c$，得

$$x=\frac{-c-x_1^2}{2x_1}+x_1=\frac{x_1^2-c}{2x_1}=\frac{x_1^2+x_1x_2}{2x_1}=\frac{x_1+x_2}{2}$$

即Q的横坐标是$\frac{x_1+x_2}{2}$，P是AB的中点，所以逆命题成立(显然此解法是(Ⅱ)中常规解法1的逆向推理).

解法2 设$A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$、$Q(x_0,-c)$，因为AQ为抛物线的切线，所以$\frac{x_1^2+c}{x_1-x_0}=2x_1$，又$c=-x_1x_2$，所以$\frac{x_1^2-x_1x_2}{x_1-x_0}=2x_1$，化简得$x_1^2-2x_0x_1+x_1x_2=0$，解得$x_1=0$或$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，但$x_1\neq0$，所以$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，所以$P$是$AB$的中点，所以逆命题成立.

注 审题时要深挖题中"隐含条件"，否则解题不畅、不全、不准，像本题中的$x_1\neq0$就较易忽视(因$x_1=0$时，直线与轴将会重合，与题设不符，所以不可).

解法3 设$A(x_1,x_1^2)$、$B(x_2,x_2^2)$、$Q(x_0,-c)$，因为AQ为抛物线的切线，所以$\frac{x_1^2+c}{x_1-x_0}=2x_1$，即$x_1^2-2x_0x_1-c=0$，因为$A$、$B$是对称的，所以$x_2^2-2x_0x_2-c=0$，则$x_1$、$x_2$均为方程$x^2-2x_0x-c=0$的两根，所以$x_1+x_2=2x_0$，即$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，所以$P$是$AB$的中点，故逆命题成立(此解法也是本题(Ⅱ)中常规解法2的逆向推理).

解法4 因为本题第(Ⅱ)问的证明步步可逆，所以逆命题成立.

解法5 因为以A为切点的抛物线的切线唯一，所以逆命题成立.

4.命题探究

探究1 由已知条件$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，我们可求出$c=2$，那么$c=2$是巧合吗?不妨设$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$，于是我们就可以得到如下命题：

命题1 过y轴正方向上一点$C(0,c)$任作一直线m，与抛物线$x^2=2py$相交于A、B两点，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$，则$c=p+\sqrt{p^2+t}$或$c=p-\sqrt{p^2+t}$.

由此可见，直线m与抛物线$x^2=2py$相交于A、B两点，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$，则直线$m$经过定点$(0,p+\sqrt{p^2+t})$或$(0,p-\sqrt{p^2+t})$.

证明 设直线m的方程为$y=kx+c$，代入抛物线方程$x^2=2py$，得$x^2-2pkx-2pc=0$，令$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t$，所以$x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=c^2-2pc=t$，解之得$c=p+\sqrt{p^2+t}$或$c=p-\sqrt{p^2+t}$.

注 由于原题中增加了"过y轴正方向上一点$C(0,c)$"这一条件，因此只有$c=p+\sqrt{p^2+t}$一解.

探究2 当$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$时，$OA\perp OB$，即$\angle AOB=90°$，那么此时我们又可以得到什么结论呢?实际上只要令命题1中的$t=0$，我们便得到：

命题2(1) 直线m与抛物线$x^2=2py$相交于A、B两点，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则直线$m$经过定点$(0,2p)$或$(0,0)$.

证明 设直线m的方程为$y=kx+c$，代入抛物线方程$x^2=2py$，得$x^2-2pkx-2pc=0$，

令 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=c^2-2pc=0$，解之得，$c=2p$ 或 $c=0$，即直线 m 经过定点 $(0,2p)$ 或 $(0,0)$. 反之，我们还可得到：

命题 2(2) 若直线 m 经过点 $(0,2p)$，且与抛物线 $x^2=2py$ 相交于 A、B 两点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

证明 设直线 m 的方程为 $y=kx+2p$，代入抛物线方程 $x^2=2py$，得 $x^2-2pkx-4p^2=0$，令 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=4p^2-4p^2=0$$

利用上述结论，我们可快速解出 2004 年高考重庆卷理科、文科第 21 题.

（理科）设 $p>0$ 是一常数，过点 $Q(2p,0)$ 的直线与抛物线 $y^2=2px$ 交于相异两点 A、B，以线段 AB 为直径作圆 H（H 为圆心），如图 2 所示. 试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上；并求圆 H 的面积最小时直线 AB 的方程.

（文科）设直线 $ay=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 交于相异两点 A、B，以线段 AB 为直径作圆 H（H 为圆心），如图 3 所示. 试证抛物线顶点在圆 H 的圆周上；并求 a 的值，使圆 H 的面积最小.

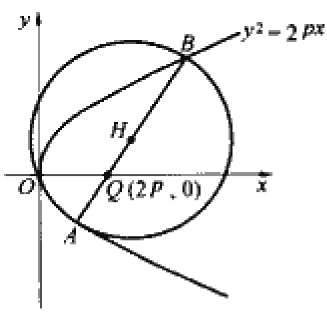


图 2

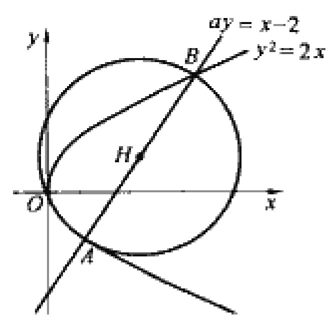


图 3

探究 3 当 P 为线段 AB 的中点时，QA 为此抛物线的切线，那么直线 QB 呢？由题意可知，点 Q 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},-c\right)$，则直线 QB 的斜率为 $k_{QB}=\dfrac{x_2^2+c}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}$，因为 $x_1\cdot x_2=-c$，所以

$$k_{QB}=\frac{x_2^2-x_1\cdot x_2}{x_2-\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{x_2\cdot(x_2-x_1)}{\frac{x_2-x_1}{2}}=2x_2$$

而 $y=x^2$ 的导数为 $y'=2x$，所以点 $B(x_2,y_2)$ 处切线的斜率为 $2x_2$，即直线 QB 为该抛物线的切线. 于是我们可进一步得到：

命题 3 过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线，与抛物线 $x^2=2py$ 相交于 A、B 两点，一条垂直于 x 轴的直线，分别与线段 AB 和直线 $l:y=-c$ 交于 P、Q，若 P 为线段 AB 的中点，则 QA、QB 都是此抛物线的切线.

注 利用命题 3，我们就可以作出抛物线上任意一点处的切线. 这是作抛物线切线的一个简便方法.

探究 4 设线段 PQ 的中点为 D，因为 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1^2+x_2^2}{4p}\right)$、$Q\left(\frac{x_1+x_2}{2},-c\right)$，而 $c=-\frac{x_1\cdot x_2}{2p}$，所以点 D 坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{(x_1+x_2)^2}{8p}\right)$，显然，$D$ 为抛物线上一点. 于是我们有以下命题：

命题 4 过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线，与抛物线 $x^2=2py$ 相交于 A、B 两点，一条垂直于 x 轴的直线，分别与线段 AB 和直线 $l:y=-c$ 交于 P、Q，当 P 为线段 AB 的中点时，线段 PQ 的中点 D 在抛物线上.

探究 5　延长 AO，设直线 AO 与 l 相交于点 E. 因为 $A(x_1,y_1)$、$E(x_E,-c)$，则 $\frac{y_1}{x_1}=\frac{-c}{x_E}$，化简得 $x_E=x_2$，联结 BE，显然 $BE\perp l$. 于是我们得到以下命题：

命题 5　延长 AO，与直线 l 相交于点 E，则有 $BE\perp l$. 同样，延长 BO，与直线 l 相交于点 F，则有 $AF\perp l$.

探究 6　在直线与抛物线位置关系的问题中，我们不得不讨论一下直线经过焦点的情况，于是可以得到：

命题 6(1)　一条直线经过抛物线 $x^2=2py$ 的焦点，且与抛物线相交于 A、B 两点，则分别过点 A、B 的切线互相垂直且它们的交点在此抛物线的准线上.

证明　设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，经过焦点的直线方程为 $y=kx+\frac{p}{2}$，将 $y=kx+\frac{p}{2}$ 代入抛物线方程 $x^2=2py$，得 $x^2-2pkx-p^2=0$，则 $x_1\cdot x_2=-p^2$. 因为 $y'=\left(\frac{x^2}{2p}\right)'=\frac{x}{p}$，所以在 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 两点处的切线的斜率分别为 $\frac{x_1}{p}$、$\frac{x_2}{p}$，于是经过 A、B 两点的切线方程分别为

$$y-y_1=\frac{x_1}{p}(x-x_1),\ y-y_2=\frac{x_2}{p}(x-x_2)$$

因为

$$\frac{x_1}{p}\cdot\frac{x_2}{p}=\frac{-p^2}{p^2}=-1$$

经过 A、B 两点的切线互相垂直，联立这两个方程得

$$\begin{cases}y-y_1=\dfrac{x_1}{p}(x-x_1)\\ y-y_2=\dfrac{x_2}{p}(x-x_2)\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ y=\dfrac{x_1x_2}{2p}\end{cases}$$

而 $x_1x_2=-p^2$，所以 $y=-\frac{p}{2}$，即经过 A、B 两点的切线的交点在抛物线的准线上.

这个结论稍作改变，即为 2006 年高考全国 Ⅱ 卷理科第 21 题、文科第 22 题：

已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A、B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M.

（Ⅰ）证明 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值；（Ⅱ）设 $\triangle ABM$ 的面积为 S，写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式，并求 S 的最小值.

对于命题 6(1)，反之，我们也有：

命题 6(2)　若抛物线 $x^2=2py$ 的两条切线的交点在准线上，则联结两个切点 A、B 的直线一定经过抛物线的焦点.

（十二）新高考圆锥曲线命题特点分析

圆锥曲线是平面几何的核心内容，也是学习高等数学的基础，当然是高考命题的热点之一．近几年高考数学对圆锥曲线的考查一直占有较大的比例，远远超过了其他各章，而且题型、题量、难度均保持相对稳定．尤其是“向量”和“导数”进入高中数学教材以后，更是拓宽了高考在圆锥曲线上的命题空间，不仅题型在变化，而且解决问题的方法也在不断创新．由于圆锥曲线是中学数学知识的一个重要交汇点，因此自然就成为联系多项内容的重要媒介，它常与方程、不等式、数列、平面向量、导数等内容交叉渗透，自然地交汇在一起，使数学问题的解题目标与已知条件之间的跨度增大，题型新颖别致、自然流畅，内容综合、解法灵活、思维抽象，所以它既是高考的热点题型，又是颇难解决的重点问题．以圆锥曲线交叉汇合处为主干，构筑成知识网络型圆锥曲线问题，在高考试题中出现的频率相当高，占据着令人瞩目的地位．以下对2008年全国高考圆锥曲线的命题规律、试题特点进行分析，并提出笔者的看法，供各位老师教学和复习时参考．

1. 命题规律

在2008年全国高考的20套（文、理共38份）数学试卷中，圆锥曲线试题共有69道，其中选择、填空题41道，解答题28道（压轴题约占解答题题数的一半）．试题既注重了通性通法、淡化特殊技巧的命题原则，又适度体现了灵活运用技巧解题的空间，真正做到了有效检测考生对圆锥曲线中所蕴含的数学思想和方法的掌握程度，具体见表1．

表1

卷型	科别	题号及考点	分值
全国卷 Ⅰ	理	15（椭圆），21（双曲线）	19
	文	14（抛物线），22（同理21）	19
全国卷 Ⅱ	理	9（双曲线），15（抛物线），21（直线＋椭圆）	24
	文	2（双曲线），14（抛物线），22（同理21）	24
北京卷	理	4（抛物线），19（椭圆＋直线）	17
	文	3（双曲线），20（同理19）	17
天津卷	理	5（椭圆），15（直线＋圆），21（双曲线）	24
	文	7（同理5），15（同理15），22（同理21）	24
重庆卷	理	8（双曲线），21（椭圆＋双曲线）	17
	文	21（同理12）	12
湖北卷	理	10（椭圆），19（椭圆＋圆）	18
	文	10（椭圆），20（同理19）	18
湖南卷	理	8（双曲线），12（椭圆），20（抛物线）	22
	文	10（双曲线），19（椭圆）	17

续表 1

卷型	科别	题号及考点	分值
浙江卷	理	7(双曲线),12(椭圆),20(抛物线)	25
	文	12(椭圆),21(同理 20)	20
江西卷	理	7(椭圆),15(抛物线),21(双曲线)	24
	文	7(椭圆),14(双曲线),22(抛物线)	24
辽宁卷	理	11(抛物线),20(椭圆)	17
	文	6(抛物线),21(同理 20)	19
福建卷	理	9(双曲线),21(椭圆)	19
	文	12(双曲线),22(类同理 20)	19
上海卷	理	10(椭圆),20(抛物线)	21
	文	6(抛物线),2(椭圆),22(双曲线)	26
江苏卷		12(椭圆)(未含附加题)	5
山东卷	理	22(抛物线)	14
	文	13(双曲线),22(椭圆)	19
安徽卷	理	22(椭圆)	14
	文	14(双曲线),22(椭圆)	19
广东卷	理	18(椭圆,抛物线)	12
	文	20(椭圆,抛物线)	12
四川卷	理	21(椭圆)	14
	文	22 椭圆)	14
陕西卷	理	8(双曲线),20(抛物线)	17
	文	21(抛物线)	12
海南、宁夏卷	理	11(抛物线),14(双曲线)	10
	文	2(双曲线),15(椭圆)	10

统计表明,在考基础、考能力、考方法、考素质、考潜能的高考数学考试目标的指导下,圆锥曲线在每份试卷中所占分值较大且比较平稳,最低为江苏卷 5 分,最高为上海文科 26 分,平均为 18.6 分,与 2007 年全国高考相比有较大的下降幅度.在所涉及的 69 道圆锥曲线试题中,文、理科完全相同的题目有 9 道,类似的题目有 7 道,但是在题目的排序上还是体现出了差异.

2. 试题特点

(1) 在抓纲务本中拓展命题空间

圆锥曲线的定义、标准方程、几何性质等是支撑圆锥曲线的基石,也是高考命题的源头.2008 年的高考也十分重视对这些基础知识的考查,其中 18 份试卷在选择题、填空题中考查了椭圆、双曲线、抛物线的离心率、准线等基本元素之间的关系,这些题目大都由课本中的例、习题改编而来.

【例 1】 (2008 年高考湖南卷理科第 12 题) 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F,右准线为 l,离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$.过顶点 $A(0,b)$ 作 $AM\perp l$,垂足为 M,则直线 FM 的斜率等于________.

解析 由题意可得

$$e=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{c}{a}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{5}}{5}a\Rightarrow b^2=\frac{4}{5}a^2$$

又
$$M\left(\frac{a^2}{c},b\right),\quad F(c,0)\quad\Rightarrow K_{FM}=\frac{b}{\frac{a^2}{c}-c}=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$$

注 这类题型是高考的重点和热点. 选择题、填空题、解答题常常涉及. 在直线与圆锥曲线位置关系的研究中,若能充分借助"平面几何性质",数形结合,往往能优化解题. 另外,求值要构造等式,求变量范围要构造不等式或函数(要注意不等量关系的来源). 如果在一条直线上出现三个或三个以上的点,可选择"斜率"为桥梁转化.

除此之外,直线与圆锥曲线的位置关系仍然是圆锥曲线命题的主旋律,在 20 套试卷中,有 12 套圆锥曲线的解答题都是结合直线与圆锥曲线的位置关系,对标准方程、轨迹方程以及曲线的几何性质进行了考查.

【例2】 (2008年湖南文科 19题)已知椭圆的中心在原点,一个焦点是 $F(2,0)$,且两条准线间的距离为 $\lambda(\lambda>4)$.

(Ⅰ)求椭圆的方程;(Ⅱ)若存在过点 $A(1,0)$ 的直线 l,使点 F 关于直线 l 的对称点在椭圆上,求 λ 的取值范围.

解 (Ⅰ)设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由条件知 $c=2$,且 $\frac{2a^2}{c}=\lambda$,所以 $a^2=\lambda$,$b^2=a^2-c^2=\lambda-4$,故椭圆的方程是

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-4}=1,\lambda>4$$

(Ⅱ)依题意,直线 l 的斜率存在且不为 0,记为 k,则直线 l 的方程是 $y=k(x-1)$. 设点 $F(2,0)$ 关于直线 l 的对称点为 $F'(x_0,y_0)$,则

$$\begin{cases}\frac{y_0}{2}=k(\frac{x_0+2}{2}-1)\\ \frac{y_0}{x_0-2}\cdot k=-1\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x_0=\frac{2}{1+k^2}\\ y_0=\frac{2k}{1+k^2}\end{cases}$$

因为点 $F'(x_0,y_0)$ 在椭圆上,所以

$$\frac{\left(\frac{2}{1+k^2}\right)^2}{\lambda}+\frac{\left(\frac{2k}{1+k^2}\right)^2}{\lambda-4}=1$$

即
$$\lambda(\lambda-4)k^4+2\lambda(\lambda-6)k^2+(\lambda-4)^2=0$$

设 $k^2=t$,则 $\lambda(\lambda-4)t^2+2\lambda(\lambda-6)t+(\lambda-4)^2=0$. 因为 $\lambda>4$,所以 $\frac{(\lambda-4)^2}{\lambda(\lambda-4)}>0$. 于是,当且仅当

$$\begin{cases}\Delta=[2\lambda(\lambda-6)]^2-4\lambda(\lambda-4)^3\geqslant 0\\ -\frac{2\lambda(\lambda-6)}{\lambda(\lambda-4)}>0\end{cases}\qquad ①$$

上述方程存在正实根,即直线 l 存在,解 ① 得 $\begin{cases}\lambda\leqslant\frac{16}{3}\\ 4<\lambda<6\end{cases}$,所以 $4<\lambda\leqslant\frac{16}{3}$. 即 λ 的取值范围是

$4 < \lambda \leqslant \frac{16}{3}$.

注　这是高考中常见的一类题，经常会综合其他知识，一度在高考中作为“压轴题”出现，难度为中档或中档偏上，近几年高考中难度有下降的趋势. 本题第(Ⅰ)问通过基本量的关系可以直接求椭圆的方程，也可以通过椭圆的定义及其几何特征求解椭圆的方程；本题第(Ⅱ)问以直线与椭圆位置关系为命题方向，利用对称点的性质，考查了考生对圆锥曲线问题解析法的思想掌握情况及分析问题与解决问题的能力. 直线与椭圆的位置关系是一个常考不衰的考点.

试题在考查相应的基础知识的同时，着重考查了基本数学思想和方法，如湖南卷文科第19题、山东卷理科第22题等考查了函数与方程的思想；宁夏海南卷理科第20题、陕西文科第22题、天津卷理科第21题、文科22题等考查了分类与整合的思想；上海、湖北、辽宁、安徽、四川、江西等卷考查了等价转换的思想、待定系数法. 除此之外，许多试卷在圆锥曲线部分都非常珍视对考生思维能力和思维品质的考查.

(2) 在课程改革中关注交汇融合

圆锥曲线融合了代数、三角和几何等知识，是考查学生综合能力的绝好素材，特别是由于向量具有代数与几何的双重身份，使得圆锥曲线与平面向量的整合交汇成为近几年高考命题的一个热点；而涉及圆锥曲线的最值问题，常常因为目标函数出现的形式多样化，用传统的知识和方法难以奏效，因而新增的导数知识为这类问题的解析提供了新视角、新方法.

2008年高考圆锥曲线试题的综合性主要体现在以下几个方面：一是圆锥曲线知识的纵向联系，特别是直线与圆锥曲线、圆锥曲线本身的位置关系；二是圆锥曲线与传统数学内容的横向联系，如与集合、简易逻辑、数列、三角函数、不等式、排列组合等知识的综合；三是圆锥曲线与向量、导数等新增内容的综合.

① 圆锥曲线与不等式交汇.

【例3】(2008年全国高考福建卷理科21题) 如图1，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的一个焦点是 $F(1,0)$，O 为坐标原点.

(Ⅰ) 已知椭圆短轴的两个三等分点与一个焦点构成正三角形，求椭圆的方程；

(Ⅱ) 设过点 F 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点. 若直线 l 绕点 F 任意转动，恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$，求 a 的取值范围.

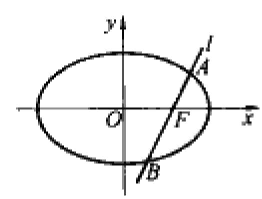


图 1

解　(Ⅰ) 如图2，设 M、N 为短轴的两个三等分点，因为 $\triangle MNF$ 为正三角形，所以 $|OF|=\frac{\sqrt{3}}{2}|MN|$，即 $1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2b}{3}$，解得 $b=\sqrt{3}$，$a^2=b^2+1=4$，因此，椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

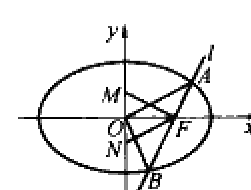


图 2

(Ⅱ) 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

① 当直线 AB 与 x 轴重合时，$|OA|^2+|OB|^2=2a^2$，$|AB|^2=4a^2(a^2>1)$，因此，恒有 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$.

② 当直线 AB 不与 x 轴重合时，设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，整理得

$$(a^2+b^2m^2)y^2+2b^2my+b^2-a^2b^2=0$$

所以
$$y_1+y_2=-\frac{2b^2m}{a^2+b^2m^2},y_1y_2=\frac{b^2-a^2b^2}{a^2+b^2m^2}$$

因为恒有$|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$,所以$\angle AOB$恒为钝角.

即$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2<0$恒成立.

$$x_1x_2+y_1y_2=(m^2+1)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=\frac{-m^2a^2b^2+b^2-a^2b^2+a^2}{a^2+b^2m^2}<0$$

又$a^2+b^2m^2>0$,所以$-m^2a^2b^2+b^2-a^2b^2+a^2<0$对$m\in\mathbf{R}$恒成立,即$a^2b^2m^2>a^2-a^2b^2+b^2$对$m\in\mathbf{R}$恒成立.

当$m\in\mathbf{R}$时,$a^2b^2m^2$最小值为0,所以$a^2-a^2b^2+b^2<0$.

$a^2<a^2b^2-b^2$,$a^2<(a^2-1)b^2=b^4$,因为$a>0,b>0$,所以$a<b^2$,即$a^2-a-1>0$,解得$a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$或$a<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去),即$a>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

综合①、②,a的取值范围为$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

注 此题主要考查直线、椭圆和不等式等基本知识,侧重考查椭圆与不等式交汇问题,是对多个知识点的综合考查.高考数学命题注重知识的整体性和综合性,重视知识的交互渗透,在知识网络的交汇点设计试题.

② 圆锥曲线与导数交汇.

【例4】 (2008年全国高考广东卷理科18题)设$b>0$,椭圆方程为$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,抛物线方程为$x^2=8(y-b)$.如图3,过点$F(0,b+2)$作$x$轴的平行线,与抛物线在第一象限的交点为$G$,已知抛物线在点$G$的切线经过椭圆的右焦点$F_1$.

(Ⅰ)求满足条件的椭圆方程和抛物线方程;

(Ⅱ)设A、B分别是椭圆长轴的左、右端点,试探究在抛物线上是否存在点P,使得$\triangle ABP$为直角三角形?若存在,请指出共有几个这样的点?并说明理由(不必具体求出这些点的坐标).

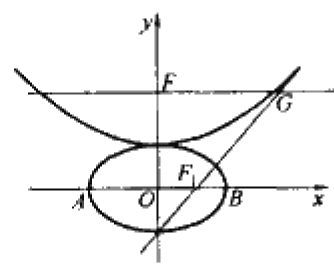


图 3

解 (Ⅰ)由$x^2=8(y-b)$得$y=\frac{1}{8}x^2+b$,当$y=b+2$得$x=\pm4$,所以点G的坐标为$(4,b+2)$,$y'=\frac{1}{4}x$,$y'\big|_{x=4}=1$,过点G的切线方程为$y-(b+2)=x-4$,即$y=x+b-2$.

令$y=0$得点F_1的坐标为$(2-b,0)$,由椭圆方程得点F_1的坐标为$(b,0)$,所以$2-b=b$,即$b=1$,即椭圆和抛物线的方程分别为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$和$x^2=8(y-1)$.

(Ⅱ)因为过A作x轴的垂线与抛物线只有一个交点P,所以以$\angle PAB$为直角的$\mathrm{Rt}\triangle ABP$只有一个,同理,以$\angle PBA$为直角的$\mathrm{Rt}\triangle ABP$只有一个.

若以$\angle APB$为直角,设点P坐标为$\left(x,\frac{1}{8}x^2+1\right)$,$A$、$B$两点的坐标分别为$(-\sqrt{2},0)$和$(\sqrt{2},0)$.

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-2+\left(\frac{1}{8}x^2+1\right)^2=\frac{1}{64}x^4+\frac{5}{4}x^2-1=0$$

关于x^2的二次方程有一个大于零的解,所以x有两解,即以$\angle APB$为直角的$\mathrm{Rt}\triangle ABP$有两个,因此抛物线上存在四个点使得$\triangle ABP$为直角三角形.

注 此题在考查椭圆与抛物线基本知识的同时,从数学思想方法的角度侧重考查了是否存在型的开放性问题,又考查了导数的应用,在解题中借用导数工具显然可以简化复杂的运算过程.

③ 圆锥曲线与平面向量交汇.

【例 5】（2008年全国高考四川卷理科试题）设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，右准线为$l$，$M$、$N$是$l$上的两个动点，$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$.

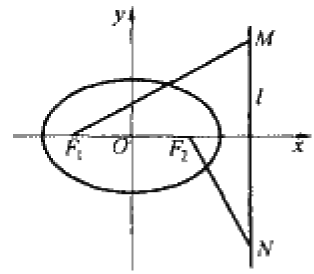


图 4

（Ⅰ）若$|\overrightarrow{F_1M}|=|\overrightarrow{F_2N}|=2\sqrt{5}$，求$a$、$b$的值；

（Ⅱ）证明：当$|\overrightarrow{MN}|$取最小值时，$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$与$\overrightarrow{F_1F_2}$共线.

解析　由$a^2-b^2=c^2$与$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$a^2=2b^2$，$F_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0)$，$F_2(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0)$，$l$的方程为$x=\sqrt{2}a$. 设$M(\sqrt{2}a,y_1)$，$N(\sqrt{2}a,y_2)$，则$\overrightarrow{F_1M}=(\frac{3\sqrt{2}}{2}a,y_1)$，$\overrightarrow{F_2N}=(\frac{\sqrt{2}}{2}a,y_2)$，由$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$得

$$y_1\cdot y_2=-\frac{3}{2}a^2<0 \qquad ①$$

（Ⅰ）由$|\overrightarrow{F_1M}|=|\overrightarrow{F_2N}|=2\sqrt{5}$，得

$$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a\right)^2+y_1^2}=2\sqrt{5} \qquad ②$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+y_2^2}=2\sqrt{5} \qquad ③$$

由①、②、③三式，消去y_1、y_2，并求得$a^2=4$，故

$$a=2,b=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

（Ⅱ）　$|\overrightarrow{MN}|^2=(y_1-y_2)^2=y_1^2+y_2^2-2y_1y_2\geqslant-2y_1y_2-2y_1y_2=-4y_1y_2=6a^2$

当且仅当$y_1=-y_2=\frac{\sqrt{6}}{2}a$或$y_2=-y_1=\frac{\sqrt{6}}{2}a$时，$|\overrightarrow{MN}|$取最小值$\sqrt{6}a$. 此时

$$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}=(\frac{3\sqrt{2}}{2}a,y_1)+(\frac{\sqrt{2}}{2}a,y_2)=(2\sqrt{2}a,y_1+y_2)=(2\sqrt{2}a,0)=2\overrightarrow{F_1F_2}$$

故$\overrightarrow{F_1M}+\overrightarrow{F_2N}$与$\overrightarrow{F_1F_2}$共线.

注　此题利用向量引进条件，加大了新增内容与传统内容的联系，在引入向量的坐标表示后，使向量之间的运算代数化，这样就可以将“形”和“数”紧密地结合在一起. 因此，许多几何问题，特别像共线、共点、垂直等较难问题的处理，常将几何问题坐标化、符号化、数量化，从而将推理转化为大家熟悉的代数运算.

(3) 在求实创新中贯彻课改理念

创新是高考命题的一条隐性原则，在历年的高考试题中确实涌现出了不少令人耳目一新的佳作，因此，我们应该在求实的基础上创新，在正确的高考命题原则下呈现亮点和彰显理念. 2008年高考数学试卷中的圆锥曲线试题，总体上仍保持了近几年的命题风格，既突出了圆锥曲线的本质特征，又体现了传统内容的横向联系和新增内容的纵向交汇，试题的背景深刻、载体多样、立意新颖、亮点突出. 2008年的传统式圆锥曲线综合题较往年有所减少，江苏试卷只考了5分，但却求真务实，考查目的明确. 以安徽卷文科第22题为例，虽然它是由一道陈题改编而来的，但却从圆锥曲线中动与静相宜的本质出发，以椭圆为载体，以直线和椭圆的位置关系为依托，并将直线、椭圆、三角和不等式进行整合，入口较宽，既考查了椭圆的基本性质，还考查了利用均值不等式求最值的方法，对思维的深刻性和灵

活性都有着较高的要求，是一道实实在在的好题. 当然，我们也看到了一大批既有创意、又能很好地考查数学知识和学生能力的亮点试题，如湖北卷的文、理科第10题，考查学生应用圆锥曲线解决实际问题的能力；湖南理科第20题，定义了抛物线中的“相关弦”，考查学生的探究能力和随机应变能力，开辟了圆锥曲线命题的新途径.

【例6】 若 A、B 是抛物线 $y^2=4x$ 上的不同两点，弦 AB(不平行于 y 轴)的垂直平分线与 x 轴相交于点 P，则称弦 AB 是点 P 的一条“相关弦”. 已知当 $x>2$ 时，点 $P(x,0)$ 存在无穷多条“相关弦”，给定 $x_0>2$.

(Ⅰ)证明：点 $P(x_0,0)$ 的所有“相关弦”的中点的横坐标相同；

(Ⅱ)试问：点 $P(x_0,0)$ 的“相关弦”的弦长中是否存在最大值?若存在，求其最大值(用 x_0 表示)；若不存在，请说明理由.

解析 (Ⅰ)设 AB 为点 $P(x_0,0)$ 的任意一条“相关弦”，且点 A、B 的坐标分别是 (x_1,y_1)、(x_2,y_2) $(x_1\neq x_2)$，则 $y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$，两式相减得

$$(y_1+y_2)(y_1-y_2)=4(x_1-x_2)$$

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $y_1+y_2\neq 0$.

设直线 AB 的斜率是 k，弦 AB 的中点是 $M(x_m,y_m)$，则

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{2}{y_m}$$

从而 AB 的垂直平分线 l 的方程为

$$y-y_m=-\frac{y_m}{2}(x-x_m)$$

又点 $P(x_0,0)$ 在直线 l 上，所以 $-y_m=-\frac{y_m}{2}(x_0-x_m)$. 而 $y_m\neq 0$，于是 $x_m=x_0-2$.

故点 $P(x_0,0)$ 的所有“相关弦”的中点的横坐标都是 x_0-2.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，弦 AB 所在直线的方程是 $y-y_m=k(x-x_m)$，代入 $y^2=4x$ 中，整理得

$$k^2x^2+2[k(y_m-kx_m)-2]x+(y_m-kx_m)^2=0 \qquad ①$$

则 x_1、x_2 是方程①的两个实根，且 $x_1\cdot x_2=\frac{(y_m-kx_m)^2}{k^2}$. 设点 P 的“相关弦”AB 的弦长为 l，则

$$\begin{aligned}l^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+k^2)(x_1-x_2)^2=\\&(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]=4(1+k^2)(x_m^2-x_1x_2)=\\&4\left(1+\frac{4}{y_m^2}\right)\left[x_m^2-\frac{\left(y_m-\frac{2}{y_m}x_m\right)^2}{\frac{4}{y_m^2}}\right]=\\&(4+y_m^2)(4x_m-y_m^2)=4(x_0-1)^2-[y_m^2-2(x_0-3)]^2\end{aligned}$$

因为 $0<y_m^2<4x_m=4(x_m-2)=4x_0-8$，于是设 $t=y_m^2$，则 $t\in(0,4x_0-8)$，记

$$l^2=g(t)=-[t-2(x_0-3)]^2+4(x_0-1)^2$$

若 $x_0>3$，则 $2(x_0-3)\in(0,4x_0-8)$，所以当 $t=2(x_0-3)$，即 $y_m^2=2(x_0-3)$ 时，l 有最大值 $2(x_0-1)$.

若 $2<x_0<3$，则 $2(x_0-3)\leqslant 0$，$g(t)$ 在区间 $(0,4x_0-8)$ 上是减函数，所以 $0<l^2<16(x_0-2)$，l 不存在最大值.

综上所述，当 $x_0>3$ 时，点 $P(x_0,0)$ 的“相关弦”的弦长中存在最大值，且最大值为 $2(x_0-1)$；当 $2<x_0\leqslant 3$ 时，点 $P(x_0,0)$ 的“相关弦”的弦长中不存在最大值.

注 这是一道存在性问题，先定义"相关弦"，再进行知识迁移，与抛物线知识、二次函数知识综合运用，在第（Ⅰ）问中，巧妙地利用两式相减，设而不求的方法求得斜率. 第（Ⅱ）问，利用了分类与整合的思想来探讨存在性问题，这道题把高中要掌握的主要知识点和常用解题方法进行了整合.

3. 几点思考

(1) 高中数学课程的选择性加大，学生可以自主选择课程，各省市自主命题，新高考如何体现课程的选择性？这是无法回避的一个热点问题. 今年高考中圆锥曲线有的高达30分，有的只有5分，也充分说明了这一点.

(2) 新增内容出现以后，既会改变传统命题方式，也会扩大原有命题空间. 比如，有的省市把圆锥曲线分两部分要求，一部分为必修，另一部分为选修. 但是，这些变化只是初步的，随着新增内容与传统内容的关联与融通，高考试题也将呈现新的变化.

(3) 圆锥曲线知识点多，运算量大，能力要求高，综合性强，其相关的高考试题源于教材又高于教材. 那么又如何搞好以后圆锥曲线的教学与复习？

① 重视通性通法. 深刻理解并熟练掌握圆锥曲线的基础知识和基本方法，是构建有关知识网络的基础，尤其要注意一些常规问题的基本解法，在抓住通性通法的同时，有意识地训练有关减少圆锥曲线运算量的常用解题技巧，从而使考生能准确、迅速地解析问题.

② 注重新旧整合. 圆锥曲线的重点是各种曲线的标准方程、几何性质以及基本的数学思想方法. 同时还要重视圆锥曲线知识的横向联系以及其他板块的交叉整合，提高运用函数与方程的思想、向量与导数的方法求解圆锥曲线问题的能力，力争突破高考圆锥曲线综合题这道难关.

③ 强化运算能力. 运算能力是圆锥曲线最突出的特点，而运算的求简意识则集中体现在圆锥曲线的有关综合问题之中，因此，遵循"设 — 列 — 解"的程序化运算本色，努力帮助学生克服重思路方法、轻运算技巧的顽疾，突破如何避繁就简这一瓶颈，充分发挥圆锥曲线的定义和利用平面几何化难为易、化繁为简的作用应为教学和复习好圆锥曲线的关键之所在，理当关注！

（十三）一道高考双曲线题的个性思考

1. 试题原型

（2007 年全国高考重庆卷，理科第 16 题）过双曲线 $x^2-y^2=4$ 的右焦点 F 作倾斜角为 $105°$ 的直线，交双曲线于 P、Q 两点，则 $|FP|\cdot|FQ|$ 的值为________.

2. 试题分析

(1) 本题是一道常规的解析几何题，主要考查直线与圆锥曲线的位置关系，这是解析几何的重点内容之一，也是高考的热点之一. 该题充分体现了由知识立意向能力立意转化，遵循教材（必修内容）但不拘泥于教材（不但考查必修内容，而且选修内容中阅读教材的知识点也在考查之列）的高考命题原则，解答此类问题的通法是将直线方程与圆锥曲线方程联立，组成方程组，通过消元、利用韦达定理和判别式等知识并结合解析几何的相关知识，进而获解. 不过解题时务必要明白我们的解题目标是什么？

(2) 本题中求 $|FP|\cdot|FQ|$ 的值无法通过分别求 $|FP|$、$|FQ|$ 的值的方法来实现，只有通过整体计算来完成，故只好整体转化为相关点的坐标来计算，但转化过程中是消去 x 还是消去 y，对后续的计算影响很大，因此我们应慎重选择.

(3) 此题虽是常规题型，用常规方法固然可以求解，但运算量较大，计算较繁，如果换个思维角度，借助等价转化的思想，利用阅读教材中的知识点，就可以使问题获得简洁的解答.

以下对此分述.

3. 大众思考

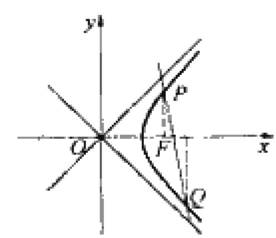


图 1

（利用双曲线的第二定义或焦半径公式）如图 1，双曲线 $x^2-y^2=4$ 的右焦点为 $F(2\sqrt{2},0)$，右准线方程为 $x=\sqrt{2}$，离心率 $e=\sqrt{2}$. 设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，因为 $105°<135°$，所以点 P、Q 均在双曲线的右支上，由双曲线的第二定义，得 $\dfrac{|FP|}{x_1-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $|FP|=\sqrt{2}(x_1-\sqrt{2})$，同理可得，$|FQ|=\sqrt{2}(x_2-\sqrt{2})$（此式也可利用焦半径公式写出），所以

$$|FP|\cdot|FQ|=\sqrt{2}(x_1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}(x_2-\sqrt{2})=2[x_1x_2-\sqrt{2}(x_1+x_2)+2] \quad ①$$

又直线 PQ 的方程为 $y=\tan105°(x-2\sqrt{2})$，即 $y=-(2+\sqrt{3})(x-2\sqrt{2})$.

代入 $x^2-y^2=4$ 整理，得

$$(6+4\sqrt{3})x^2-4\sqrt{2}(7+4\sqrt{3})x+60+32\sqrt{3}=0$$

所以

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{4\sqrt{2}(7+4\sqrt{3})}{6+4\sqrt{3}} \\ x_1x_2=\dfrac{60+32\sqrt{3}}{64+4\sqrt{3}} \end{cases} \quad ②$$

将②代入①，得

$$|FP|\cdot|FQ|=2\left[\frac{60+32\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}-\frac{8(7+4\sqrt{3})}{6+4\sqrt{3}}+2\right]=\frac{8(2+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

教学反思　这种常规方法求解，运算十分复杂，很难算出正确结果，应该说有相当多的学生难以承受.此解法有两点可以改进：

(1) 斜率 $\tan 105°$ 计算过早，增加了后续的计算负担；

(2) 建立 $|FP|\cdot|FQ|$ 与 y_1、y_2 的关系比建立 $|FP|\cdot|FQ|$ 与 x_1、x_2 的关系更简洁.针对以上所述，我们可以这样思考：

个性思考1　(利用双曲线的第二定义) 如图2，分别过点 P、Q 作 x 轴的垂线，垂足分别为 M、N，则点 P、Q 到右准线 $x=\sqrt{2}$ 的距离分别为 $2\sqrt{2}-|FP|\cos 75°-\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}+|FQ|\cos 75°-\sqrt{2}$，根据双曲线的第二定义，得

$$\frac{|FP|}{2\sqrt{2}-|FP|\cos 75°-\sqrt{2}}=\sqrt{2},\quad \frac{|FQ|}{2\sqrt{2}+|FQ|\cos 75°-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

解得　$|FP|=\dfrac{2}{1+\sqrt{2}\cos 75°}$，　$|FQ|=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}\cos 75°}$

所以　$|FP|\cdot|FQ|=\dfrac{4}{1-2\cos^2 75°}=\dfrac{4}{-\cos 150°}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

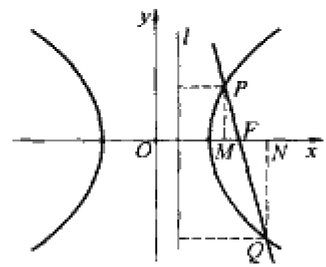


图 2

个性思考2　(仍然使用双曲线的焦半径公式) 设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-2\sqrt{2})$，$k=\tan 105°$.代入 $x^2-y^2=4$，整理，得

$$(1-k^2)x^2+4\sqrt{2}k^2x-8k^2-4=0$$

所以
$$x_1+x_2=\frac{4\sqrt{2}k^2}{k^2-1},x_1x_2=\frac{8k^2+4}{k^2-1}$$

由焦半径公式得　$|FP|=\sqrt{2}(x_1-\sqrt{2})$，$|FQ|=\sqrt{2}(x_2-\sqrt{2})$

所以

$$|FP|\cdot|FQ|=\sqrt{2}(x_1-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}(x_2-\sqrt{2})=2x_1x_2-2\sqrt{2}(x_1+x_2)+4=\frac{16k^2+8}{k^2-1}-\frac{16k^2}{k^2-1}+4=$$

$$\frac{8}{k^2-1}+4=\frac{8}{\tan^2 105°-1}+4=\frac{4(1+\cos 210°)}{-\cos 210°}+4=\frac{8\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+4=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

个性思考3　(换位使用直线的普通方程) 如图2，设过焦点 $F(2\sqrt{2},0)$，倾斜角为 $105°$ 的直线 PQ 方程为 $ty=x-2\sqrt{2}$(其中 $t=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{\tan 105°}=\cot 105°$)，将 $x=ty+2\sqrt{2}$ 代入双曲线 $x^2-y^2=4$ 方程中，整理得

$$(1-t^2)y^2-4\sqrt{2}ty-4=0$$

方程的两根为交点 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 的纵坐标，所以 $y_1y_2=\dfrac{-4}{1-t^2}$，又因为

$$\frac{|y_1|}{|FP|}=\sin\angle PFO=\sin 75°,\frac{|y_2|}{|FQ|}=\sin\angle QFx=\sin 75°$$

所以　$|FP|\cdot|FQ|=\dfrac{|y_1y_2|}{\sin^2 75°}=\dfrac{4}{(1-t^2)\sin^2 75°}=\dfrac{4}{\sin^2 75°-\cos^2 75°}=\dfrac{4}{-\cos 150°}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

教学反思　(1) 在解决圆锥曲线问题中是将直线方程设为 $x=ty+x_0$ 的形式好，还是设为直线的斜截式等常规形式的方程好，应视具体问题而设.

(2) 斜率 $\tan 105°$ 的值不必急于算出，最后整体计算应该更好.

(3) 这种解法中，$|FP|\cdot|FQ|$ 与 y_1、y_2 的关系一目了然，这才是本解法明显优于大众解法的最主要原因.

个性思考4 （利用双曲线的参数方程）易知点 P、Q 均在双曲线的右支上，所以可设直线 PQ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} + t\cos 105° \\ y = t\sin 105° \end{cases}$（$t$ 为参数），代入双曲线的方程 $x^2 - y^2 = 4$ 中，整理得

$$(\cos^2 105° - \sin^2 105°)t^2 + 4\sqrt{2}t\cos 105° + 4 = 0$$

即

$$\cos 210°t^2 + 4\sqrt{2}\cos 105°t + 4 = 0$$

利用参数 t 的几何意义，得

$$|FP|\cdot|FQ| = |t_P t_Q| = \left|\frac{4}{\cos 210°}\right| = \left|\frac{4}{-\cos 30°}\right| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

教学反思 此解法利用了阅读教材中的知识（人教大纲版高中数学教材第二册（2006年11月第二版，必修）第60页阅读材料“向量与直线”中直线的参数方程）解答，十分简洁．该法应该是求解本题的最佳方法．

个性思考5 （利用双曲线的极坐标方程）双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 的离心率为$\sqrt{2}$，$c = \sqrt{2}b = 2\sqrt{2}$，焦点到准线的距离 $p = c - \frac{a^2}{c} = \frac{b^2}{c} = \sqrt{2}$，设双曲线的极坐标方程

$$\rho = \frac{2}{1 - \sqrt{2}\cos\theta}$$

$$|FP|\cdot|FQ| = \rho_1\cdot\rho_2 = \frac{2}{1-\sqrt{2}\cos 105°}\cdot\frac{2}{1-\sqrt{2}\cos(-75°)} = -\frac{4}{\cos 150°} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

教学反思 （1）该解法特别适合解答过焦点的直线与圆锥曲线的相交问题．

（2）虽然极坐标方程已淡出现行高中教材，但近年来广东等全国高中新课改区对理科生又重新要求掌握此内容．由此看来，不管今后此内容的发展何去何从，我们应沉着应对．

拓展思考1 假设将试题原型改编为：

过双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 所在平面里一定点 $A(m, n)$，作倾斜角为105°的直线，交双曲线于 P、Q 两点，则 $|FP|\cdot|FQ|$ 的值为________．

用以上方法处理之，又将如何？

点评 （1）若点 A 在 x 轴上，即 $n = 0$，但不在焦点处（$m \neq \pm c$）时，个性思考1、个性思考3、个性思考4的方法仍然可以使用，运算量与本例无大差异，大众解法、个性思考2、个性思考5则不适用．

（2）若点 A 在 y 轴上，即 $m = 0(n \neq 0)$ 时，个性思考3、4的方法仍然适用，大众解法、个性思考2、个性思考5的方法亦适用．

（3）若点 A 不在坐标轴上，即 $mn \neq 0$ 时，以上方法中除个性思考5之外均可使用，个性思考3的方法在运算量上与大众解法及个性思考1大致相等，而个性思考4的方法则独树一帜，明显占有绝对优势．

拓展思考2 假设将试题原型改编为：

过双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 所在平面里一定点 $A(m, n)$，作倾斜角为105°的直线，交双曲线于 P、Q 两点，则 $|AP|\cdot|AQ|$ 的值为________．

再用前面所述方法处理之，又将如何？

点评 上述方法中，只有个性思考3、个性思考4最适合，而其他方法就较难实施．

（十四）在变式探究中学习圆锥曲线方程

圆锥曲线的方程是高中数学中的一个重点内容，每年高考必考，涉及此内容的问题变化无穷，只靠大量重复性训练很难取得理想的教学效果．在常规教学和复习课教学中，笔者试结合一些典型例题的变式探究来引导学生创造性的学习，对学生掌握这部分知识有较大促进和提升．

变式设计整体思路：从"解析几何"自身特征出发，结合新课程理念，共设计了13个变式，按三条线路构思：① 从"形"的角度（点 → 直线 → 曲线）；② 从"数"的角度（方程的变换）；③ 从"创新"的角度（设问形式的变换）；④ 从"通性通法"的角度（所有变式都围绕最基本的思想方法应用而设计）．

变式探究涉及知识：椭圆的方程、双曲线的方程、直线方程、直线与圆锥曲线的位置关系、椭圆的焦点、双曲线的焦点、点的轨迹、中点坐标等"圆锥曲线方程"一章中的多个知识点，同时还交汇了一元二次方程根与系数的关系、三角形的"四心"、平面向量等知识．

问题　已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点，椭圆与 y 轴的正半轴交于点 B，若 $\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆右焦点上，则直线 l 的方程为（　　）

A. $6x-5y-28=0$　　B. $6x+5y-28=0$

C. $5x+6y-28=0$　　D. $5x-6y-28=0$

其解答思路是：设点 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，由已知得 $B(0,4)$，右焦点坐标为 $(2,0)$，根据三角形重心的坐标公式得 $x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=-4$，故 MN 的中点的坐标为 $(3,-2)$．又因为点 M、N 在椭圆上，分别将其坐标代入椭圆的方程，相减，得直线的斜率 $k=\frac{6}{5}$，由直线方程的点斜式得 l：$6x-5y-28=0$（或设出直线方程代入椭圆的方程消 x 或 y，由根与系数的关系求得 l 的方程：$6x-5y-28=0$），故选 A．

这一题目，其构图元素有着良好的变化基础，我们不妨设以此题为原型设计如下变式练习课，引导学生在变式探究中学习和巩固圆锥曲线的方程知识．

1. 变动点 B 或重心的位置

变式 1　已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点，椭圆与 y 轴的负半轴（或 x 轴的正半轴，或 x 轴的负半轴，或椭圆的左焦点）交于点 B，若 $\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆右焦点上，则直线 l 的方程为________．

答案　$6x+5y-28=0$，或 $y-\frac{3}{2}=\frac{8\sqrt{5}-24}{15}(x-3+\sqrt{5})$，或 $y-\frac{3}{2}=-\frac{8\sqrt{5}+24}{15}(x+3+\sqrt{5})$，或 $x=1$．

变式 2　已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点，椭圆与 y 轴的正半轴交于 B 点，若 $\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆左焦点（或椭圆中心）上，则直线 l 的方程为________________．

答案　$6x+5y+28=0$ 或 $y=-2$．

变式 3　已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点，椭圆与 y 轴的负半轴交于点 B，若 $\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆左焦点（或椭圆中心）上，则直线 l 的方程为________．

答案 $6x-5y+28=0$ 或 $y=2$.

变式 4 已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点,椭圆与 x 轴的正半轴交于点 B,若 $\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆中心上,则直线 l 的方程为______.

答案 $x=-\sqrt{5}$.

变式 5 已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点,椭圆与 x 轴的负半轴交于点 B,若 $\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆左焦点(或椭圆中心)上,则直线 l 的方程为______.

答案 $x=-3+\sqrt{5}$ 或 $x=\sqrt{5}$.

以上变式 1、2、3、4、5 的解答方法与原题类似,此处从略.

本组变式训练,其目的是使学生进一步熟练运用.设直线方程代入椭圆的方程消 x 或 y,由根与系数的关系求解,或直接利用设坐标代入曲线方程联立作差的方法,寻求所在直线 MN 的斜率与中点坐标之间的关系,从而使问题得到解决或转化.

5 种变式的共同特点:只变换题目条件,解题思路、方法和结论不变,实质由重心坐标推中点坐标.

2.变重心为三角形的其他特征点

变式 6 已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点,椭圆与 y 轴的正半轴交于点 B,若 $\triangle BMN$ 的垂心恰好落在椭圆右焦点上,则直线 l 的方程为______.

解析 因为 $B(0,4)$,右焦点即 $\triangle BMN$ 的垂心,其坐标为 $(2,0)$,所以可得直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$,故可设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+b$.设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$,有 $\frac{y_1-0}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-4}{x_2-0}=-1$,即

$$x_1x_2+y_1y_2=4y_1+2x_2$$

代入,整理得

$$\frac{5}{4}x_1x_2+(\frac{1}{2}b-2)(x_1+x_2)+b^2-4b=0 \qquad ①$$

将 $y=\frac{1}{2}x+b$ 代入已知椭圆方程并整理,得

$$21x^2+20bx+20b^2-320=0$$

且

$$\Delta=(20b)^2-84(20b^2-320)\geqslant 0$$

$$b^2\leqslant 21, x_1+x_2=-\frac{20b}{21}, x_1x_2=\frac{20b^2-320}{21}$$

代入式 ① 并整理得 $9b^2-11b-100=0$,解得 $b=4$ 或 $b=-\frac{25}{9}$,因此所求直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+4$ 或 $y=\frac{1}{2}x-\frac{25}{9}$.

变式 7 已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点,椭圆与 y 轴的正半轴交于点 B,是否存在直线 l 使 $\triangle BMN$ 的外心恰好落在椭圆右焦点上?若存在,求出直线 l 的方程;若不存在,请说明理由.

解析 设 $M(x_1,y_1)$,则

$$\frac{y_1-4}{x_1-0}\cdot\frac{\frac{y_1+4}{2}-0}{\frac{x_1+0}{2}-2}=-1, y_1^2-16=-x_1^2+4x$$

又 $y_1^2=\frac{80-4x_1^2}{5}$,所以 $x_1=0$ 或 $x_1=20$.设 $N(x_2,y_2)$,MN 的中点 (x_0,y_0),则

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{4(x_1+x_2)}{5(y_1+y_2)}=-\frac{4x_0}{5y_0}$$

故

$$-\frac{4x_0}{5y_0}\cdot\frac{y_0-0}{x_0-2}=-1$$

解得 $x_0 = 10$，因此不存在满足题意的直线．

变式 7 从几何意义上来说，是以(2,0)为圆心，$2\sqrt{5}$ 为半径的圆与椭圆只有两个交点(0,4)、(0，-4)．

本组变式训练，改变提问方式，主要目的是强化解析几何与平面向量、三角形等章节内容的联系，提高学生综合运用所学解析几何知识解决数学问题的能力．

由重心联想其他“四心”(内心、旁心也可设置思考题)，主要培养学生的发散思维能力以及创新意识，例如按此思路还可作如下变式：

已知直线 l 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点，椭圆与 y 轴的正半轴交于点 B，是否存在直线 l 使 $\triangle BMN$ 的内心恰好落在椭圆右焦点上？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由．

3．变直线 l 所满足的条件或研究的对象

变式 8 椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 与 y 轴的正半轴交于点 B，直线 l 交坐标轴于 M、N 两点，若 $\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆右焦点(或左焦点，或椭圆右顶点，或左顶点)上，则直线 l 的方程为________．

答案 $2x-3y-12=0$，或 $2x+3y+12=0$，或 $\frac{x}{6\sqrt{5}}+\frac{y}{-4}=1$，或 $\frac{x}{-6\sqrt{5}}+\frac{y}{-4}=1$．

解 设直线 l 与坐标轴交点的坐标分别为 $(s,0)$，$(0,t)$，易得 $s=6$，$t=-4$，因此由截距式得直线 l 的方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}=1$，即 $2x-3y-12=0$．

变式 9 l 过定点 $P(1,-1)$，与椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 交于 M、N 两点，求 MN 的中点 H 的轨迹方程．

思路 1 设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$、$H(x,y)$，则

$$\begin{cases}4x_1^2+5y_1^2=80 & ①\\ 4x_2^2+5y_2^2=80 & ②\\ x_1+x_2=2x & ③\\ y_1+y_2=2y & ④\\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y+1}{x-1} & ⑤\end{cases}$$

整理得所求的轨迹方程为

$$4x^2-4x+5y^2+5y=0$$

思路 2 设直线 l 的方程为 $y+1=k(x-1)$，$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$、$H(x,y)$，由

$$\begin{cases}y+1=k(x-1)\\ 4x^2+5y^2=80\end{cases}$$

解出 x，y，消去 k 即得

$$4x^2-4x+5y^2+5y=0$$

当 $l\perp x$ 轴时，MN 的中点坐标适合上述方程，故所求的轨迹方程为

$$4x^2-4x+5y^2+5y=0$$

[redacted]

1．(2007 年湖南卷，理科第 20 题)已知双曲线 $x^2-y^2=2$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过点 F_2 的动直线与双曲线相交于 A、B 两点．

(Ⅰ)若动点 M 满足 $\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}+\overrightarrow{F_1O}$(其中 O 为坐标原点)，求点 M 的轨迹方程；

(Ⅱ)在 x 轴上是否存在定点 C，使 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数？若存在，求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由．

2.(2007年湖南卷,文科第19题)已知双曲线 $x^2-y^2=2$ 的右焦点为 F,过点 F 的动直线与双曲线相交与 A、B 两点,点 C 的坐标是(1,0).

(Ⅰ)证明:$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ 为常数;

(Ⅱ)若动点 M 满足$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CO}$(其中 O 为坐标原点),求点 M 的轨迹方程.

4.变椭圆为双曲线(或抛物线)

变式10　已知直线 l 交双曲线 $4x^2-5y^2=80$ 于 M、N 两点,点 B 坐标为(0,4),若△BMN 的重心恰好落在双曲线右焦点上,则直线 l 的方程为____________.

答案　$18x+5y-152=0$.

通过本变式训练,学生能够把椭圆中这种"点差法"寻求直线的斜率与中点坐标的关系,类比地应用到所有类似的中心弦题型中.

5.变椭圆方程的已知为未知,变直线方程的未知为已知

变式11　设焦点在 x 轴上的椭圆与直线 $x+y=1$ 相交于 A、B 两点,若 $|AB|=2\sqrt{2}$,点 C 为线段 AB 的中点,OC 的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,求椭圆的方程.

解法1　设椭圆的方程为 $ax^2+by^2=1$,由已知得直线 OC 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,与直线方程 $x+y=1$ 联立,得 AB 中点 C 的坐标为 $(2-\sqrt{2},\sqrt{2}-1)$,结合图形可得 A、B 两点的坐标分别为 $(1-\sqrt{2},\sqrt{2})$,$(3-\sqrt{2},\sqrt{2}-2)$,所以

$$\begin{cases}a(1-\sqrt{2})^2+2b=1\\a(3-\sqrt{2})^2+b(\sqrt{2}-2)^2=1\end{cases}$$

得所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{3}+\frac{\sqrt{2}y^2}{3}=1$$

解法2　先求得点 C 的坐标为 $(2-\sqrt{2},\sqrt{2}-1)$,设椭圆的方程为 $ax^2+by^2=1$,$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}ax^2+by^2=1\\x+y-1=0\end{cases}$,得 $(a+b)x^2-2bx+b-1=0$,所以

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2b}{a+b}\\x_1x_2=\dfrac{b-1}{a+b}\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}2\sqrt{2}=\sqrt{2}|x_1-x_2|\\x_1+x_2=\dfrac{2b}{a+b}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

得所求椭圆的方程为

$$x^2+\sqrt{2}y^2=3$$

通过本变式,学生可进一步熟练掌握解析几何中的通性通法,并增强利用数形结合的思想解决相关问题的意识,更为灵活地处理此类问题.

6.变原命题为其逆命题

变式12　已知直线 $l:6x-5y-28=0$ 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点,椭圆与 y 轴的正半轴交于点 B,判断△BMN 的重心在什么位置.

解　设 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$,由直线 l 与椭圆方程整理得 $7x^2-42x+48=0$,所以 $x_1+x_2=6$,$y_1+y_2=-4$.又 $B(0,4)$,得△BMN 的重心为(2,0),而椭圆的右焦点为(2,0),故△BMN 的重心恰好落在椭圆右焦点上.

变式 13　已知直线 $l: 6x-5y-28=0$ 交椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 于 M、N 两点，$\triangle BMN$ 的重心恰好落在椭圆右焦点上，则点 B 是椭圆与 y 轴的正半轴的交点吗？

变式 7、12、13 均属探索性题目，虽然本质上还是解析几何中通性通法的训练，但对处理此类问题方法的灵活选择要求较高，具有一定的深度和难度. 它重在训练学生的分析能力、探索能力和思维的发散性.

（十五）如何求解高考中的轨迹方程问题

求解符合某种条件的动点的轨迹方程是解析几何的基本问题之一，其实质就是利用题设中的几何条件，用"坐标化"的方法将其转化为寻求变量间的关系．这类问题不但能考查学生对圆锥曲线的定义、性质等基础知识的掌握情况，而且还能充分考查各种数学思想方法的熟练运用程度，同时更能检测学生的推理能力及运算能力，因此这类问题很快成为近几年高考命题的热点，也是教和学的一大难点．求解点的轨迹方程问题在解答题中往往是解析几何考题的第一问，能否顺利求出直接关系到该解答题的得分状况．以下归类探讨全国高考轨迹问题的求解．

1. 直接法求轨迹方程

若曲线上的动点满足的条件是一些集合量的等量关系，则只须直接把这种关系"翻译成"动点的坐标 x、y 的方程，经化简即得同解的最简方程．

【例1】　已知曲线 C 是到点 $P\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{8}\right)$ 和到直线 $y=-\frac{5}{8}$ 距离相等的点的轨迹；l 是过点 $Q(-1,0)$ 的直线，M 是 C 上（不在 l 上）的动点；A、B 在 l 上，$MA\perp l$，$MB\perp x$ 轴（图1）．

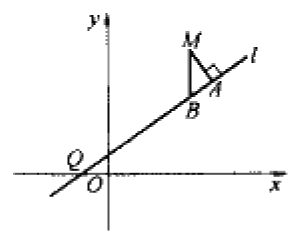


图1

（Ⅰ）求曲线 C 的方程；（Ⅱ）求出直线 l 的方程，使得 $\frac{|QB|^2}{|QA|}$ 为常数．

解析　（Ⅰ）设 $N(x,y)$ 为 C 上的点，则

$$|NP|=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2}$$

N 到直线 $y=-\frac{5}{8}$ 的距离为 $\left|y+\frac{5}{8}\right|$．由题设得

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{8}\right)^2}=\left|y+\frac{5}{8}\right|$$

化简得曲线 C 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x^2+x)$．

（Ⅱ）略．

点评　直接法是求解轨迹方程的一种常见方法，其最大特点是思路简单、计算量较大．

2. 定义法求轨迹方程

若动点轨迹的条件符合某一基本轨迹的定义（如椭圆、双曲线、抛物线、圆等），则可用定义直接探求．

【例2】　在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 到两点 $(0,-\sqrt{3})$、$(0,\sqrt{3})$ 的距离之和等于4，设点 P 的轨迹为 C．

（Ⅰ）写出 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 $y=kx+1$ 与 C 交于 A、B 两点．当 k 为何值时 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$？此时 $|\overrightarrow{AB}|$ 的值是多少？

解析　（Ⅰ）设 $P(x,y)$，由椭圆定义可知，点 P 的轨迹 C 是以 $(0,-\sqrt{3})$、$(0,\sqrt{3})$ 为焦点，长半轴为2

的椭圆,它的短半轴 $b=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$,故曲线 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

(Ⅱ)略.

【例3】　如图2,在以点 O 为圆心,$|AB|=4$ 为直径的半圆 ADB 中,$OD\perp AB$,P 是半圆弧上一点,$\angle POB=30°$,曲线 C 是满足 $||MA|-|MB||$ 为定值的动点 M 的轨迹,且曲线 C 过点 P.

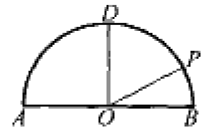


图 2

(Ⅰ)建立适当的平面直角坐标系,求曲线 C 的方程;

(Ⅱ)设过点 D 的直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 E、F.若 $\triangle OEF$ 的面积不小于 $2\sqrt{2}$,求直线 l 斜率的取值范围.

解析　(Ⅰ)以 O 为原点,AB、OD 所在直线分别为 x 轴、y 轴,建立平面直角坐标系(图 3),则 $A(-2,0)$、$B(2,0)$、$D(0,2)$、$P(\sqrt{3},1)$,依题意得

$$||MA|-|MB||=|PA|-|PB|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{2}<|AB|=4$$

所以曲线 C 是以原点为中心,A、B 为焦点的双曲线.

设实半轴长为 a,虚半轴长为 b,半焦距为 c,则 $c=2$,$2a=2\sqrt{2}$,所以 $a^2=2$,$b^2=c^2-a^2=2$,所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ)略.

点评　利用圆锥曲线的第一定义可直接得到所求轨迹方程的各种参量,计算量小.

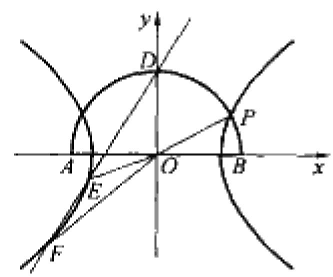


图 3

3.相关点法求轨迹方程

如果轨迹点 $P(x,y)$ 依赖于另一动点 $Q(a,b)$,而 $Q(a,b)$ 又在某已知曲线上,则可先列出关于 x、y、a、b 的方程组,利用 x、y 表示出 a、b,把 a、b 代入已知曲线方程便得动点 P 的轨迹方程.

【例4】　设点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $x=m(y\neq\pm m,0<m<1)$ 上,过点 P 作双曲线 $x^2-y^2=1$ 的两条切线 PA、PB,切点为 A、B,定点 $M(\frac{1}{m},0)$.

(Ⅰ)过点 A 作直线 $x-y=0$ 的垂线,垂足为 N,试求 $\triangle AMN$ 的垂心 G 所在的曲线方程;

(Ⅱ)求证:A、M、B 三点共线.

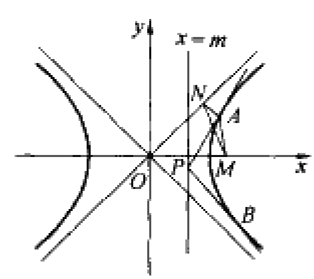


图 4

解析　(Ⅰ)设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.由已知得到 $y_1y_2\neq0$,且 $x_1^2-y_1^2=1$,$x_2^2-y_2^2=1$.

垂线 AN 的方程为:$y-y_1=-x+x_1$,由 $\begin{cases}y-y_1=-x+x_1\\x-y=0\end{cases}$ 解得垂足 N 的坐标 $\left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_1+y_1}{2}\right)$.

设重心 $G(x,y)$,所以

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3}(x_1+\frac{1}{m}+\frac{x_1+y_1}{2})\\y=\frac{1}{3}(y_1+0+\frac{x_1+y_1}{2})\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{9x - 3y - \dfrac{3}{m}}{4} \\ y_1 = \dfrac{9y - 3x + \dfrac{1}{m}}{4} \end{cases}$$

由 $x_1^2 - y_1^2 = 1$ 可得

$$(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) = 1$$

代入得
$$(3x - 3y - \frac{1}{m})(3x + 3y - \frac{1}{m}) = 2$$

化简得
$$(x - \frac{1}{3m})^2 - y^2 = \frac{2}{9}$$

即$(x - \frac{1}{3m})^2 - y^2 = \frac{2}{9}$为重心 G 所在曲线方程.

(Ⅱ)略.

点评 利用相关点法求轨迹方程必须有清楚的思路,时刻注意下一步该干什么,不要受繁琐过程的干扰,它的实质就是利用已知方程上的已知点来求能被已知点表示的未知点的运动轨迹方程.大致分为三步,第一步是根据题意设点(未知点)并寻找已知点和所设点的关系,第二步是用所设点的横、纵坐标分别表示已知点的横、纵坐标,第三步是把已用所设点表示的已知点坐标代入已知方程从而求得轨迹方程.

4.参数法求轨迹方程

若动点的坐标(x,y)中的 x、y 分别随另一变量的变化而变化,我们可以以这个变量为参数,建立轨迹的参数方程,再消去这个参数便可得到 x、y 之间的关系.

【例5】 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$过点 $M(\sqrt{2},1)$,且左焦点为$F_1(-\sqrt{2},0)$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)当过点 $P(4,1)$的动直线 l 与椭圆 C 相交于两不同点 A、B 时,在线段 AB 上取点 Q 满足$|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{AQ}|\cdot|\overrightarrow{PB}|$,证明:点 Q 总在某定直线上.

解析 (Ⅰ)由题意

$$\begin{cases} c^2 = 2 \\ \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$

解得 $a^2 = 4, b^2 = 2$,所求椭圆方程为$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(Ⅱ)**证法1** 设点 Q、A、B 的坐标分别为(x,y)、(x_1,y_1)、(x_2,y_2).

由题设知$|\overrightarrow{AP}|$、$|\overrightarrow{PB}|$、$|\overrightarrow{AQ}|$、$|\overrightarrow{QB}|$均不为零,记$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|}$,则$\lambda > 0$且$\lambda \neq 1$.

又 A、P、B、Q 四点共线,从而$\overrightarrow{AP} = -\lambda\overrightarrow{PB}$,$\overrightarrow{AQ} = \lambda\overrightarrow{QB}$,于是

$$4 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, 1 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

对应相乘从而得

$$\frac{x_1^2 - \lambda^2 x_2^2}{1 - \lambda^2} = 4x \quad ①$$

$$\frac{y_1^2 - \lambda^2 y_2^2}{1 - \lambda^2} = y \quad ②$$

又点 A、B 在椭圆 C 上，即

$$x_1^2+2y_1^2=4 \quad ③$$

$$x_2^2+2y_2^2=4 \quad ④$$

① + ② × 2 得

$$4x+2y=\frac{x_1^2-\lambda^2x_2^2}{1-\lambda^2}+\frac{2y_1^2-2\lambda^2y_2^2}{1-\lambda^2}$$

结合 ③、④ 得 $4x+2y=4$，即点 $Q(x,y)$ 总在定直线 $2x+y-2=0$ 上.

证法 2　设点 $Q(x,y)$、$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，由题设知 $|\overrightarrow{AP}|$、$|\overrightarrow{PB}|$、$|\overrightarrow{AQ}|$、$|\overrightarrow{QB}|$ 均不为零，且 $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AQ}|}=\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{QB}|}$. 又 P、A、Q、B 四点共线，可设 $\overrightarrow{PA}=-\lambda\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{PB}=\lambda\overrightarrow{BQ}(\lambda\neq0,\pm1)$，于是

$$x_1=\frac{4-\lambda x}{1-\lambda},\quad y_1=\frac{1-\lambda y}{1-\lambda} \quad ⑤$$

$$x_2=\frac{4+\lambda x}{1+\lambda},\quad y_2=\frac{1+\lambda y}{1+\lambda} \quad ⑥$$

由于 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 在椭圆 C 上，将 ⑤、⑥ 分别代入 C 的方程 $x^2+2y^2=4$，整理得

$$(x^2+2y^2-4)\lambda^2-4(2x+y-2)\lambda+14=0 \quad ⑦$$

$$(x^2+2y^2-4)\lambda^2+4(2x+y-2)\lambda+14=0 \quad ⑧$$

⑧ − ⑦ 得 $8(2x+y-2)\lambda=0$，因为 $\lambda\neq0$，所以 $2x+y-2=0$，即点 $Q(x,y)$ 总在定直线 $2x+y-2=0$ 上.

点评　如果不能直接求得轨迹方程，可以退而求其次，用共同的参数来表示所求轨迹上任意一点的横、纵坐标，也就是轨迹的参数方程形式，然后消掉参数即得轨迹方程. 本题第(Ⅱ)问中，两种方法相比较而言，还是证法 1 计算量较小些，其中证法 2 还利用了相关点法. 解答这类试题首先要明确圆锥曲线的性质，做好对图形变化可能性的总体分析，做好相应的解题策略和具体方法，注意将动点的集合特性用数学语言来表述. 在求轨迹方程问题中易于出错的是对轨迹纯粹性及完备性的忽略，因此求出点的轨迹方程之后，要仔细检查有无增解和漏解.

(十六)“传统解法”与“向量解法”比较研究

空间问题是高中数学的重要内容，也是历年高考的必考内容，其相关分值一般在20分左右，而学生得分情况却并不乐观．尤其是2003年的立体几何题(全国卷)出的太难，是令众多考生“铩羽而归”的一道题．新教材引进了“空间向量”，使一些空间问题(例如，求异面直线所成的角、二面角，证线线平行、线面平行，证异面直线垂直和线面垂直等基本问题)的处理得以简化，这样不但能减轻学生的负担，而且还开阔了学生的视野．因此，也就有了“传统解法”和“向量解法”两种趋向．解题中，若能从分析“题设背景”的角度，把握这两种方法的“交汇点”，将大大提高我们的解题效率．下面以全国高考题为例，予以分类导析．

1．题设背景之一

几何体是正方体或长方体．

【例1】 如图1，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是棱 BC 的中点，点 F 是棱 CD 上的动点．

(Ⅰ)试确定点 F 的位置，使得 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F；

(Ⅱ)当 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F 时，求二面角 C_1-EF-A 的大小(结果用反三角函数值表示)．

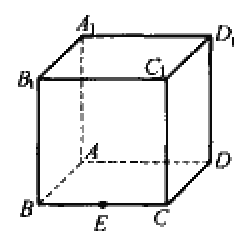


图1

传统解法 (Ⅰ)如图2，联结 A_1B，则 A_1B 是 D_1E 在面 ABB_1A 内的射影．因为 $AB_1\perp A_1B$，所以 $D_1E\perp AB_1$，于是 $D_1E\perp$ 平面 $AB_1F\Leftrightarrow D_1E\perp AF$．

联结 DE，则 DE 是 D_1E 在底面 $ABCD$ 内的射影．

所以 $D_1E\perp AF\Leftrightarrow DE\perp AF$．

因为 $ABCD$ 是正方形，E 是 BC 的中点，所以当且仅当 F 是 CD 的中点时，$DE\perp AF$，即当点 F 是 CD 的中点时，$D_1E\perp$ 平面 AB_1F．

(Ⅱ)当 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F 时，由(Ⅰ)知点 F 是 CD 的中点．

又已知点 E 是 BC 的中点，联结 EF，则 $EF\parallel BD$．联结 AC，设 AC 与 EF 交于点 H(图2)，则 $CH\perp EF$，联结 C_1H，则 CH 是 C_1H 在底面 $ABCD$ 内的射影．所以 $C_1H\perp EF$，即 $\angle C_1HC$ 是二面角 C_1-EF-C 的平面角．

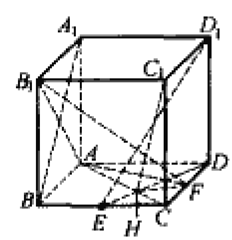


图2

在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1CH$ 中，因为 $C_1C=1$，$CH=\frac{1}{4}AC=\frac{\sqrt{2}}{4}$，所以

$$\tan\angle C_1HC=\frac{C_1C}{CH}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}}=2\sqrt{2}$$

所以 $\angle C_1HC=\arctan 2\sqrt{2}$，从而 $\angle AHC_1=\pi-\arctan 2\sqrt{2}$．

故二面角 $C_1—EF—A$ 的大小为 $\pi-\arctan 2\sqrt{2}$．

向量解法 (关键：以其中一顶点为坐标原点建立空间直角坐标系，相关问题常用向量解法)

(Ⅰ)以 A 为坐标原点，建立如图3所示的空间直角坐标系．

设 $DF=x$，则 $A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$D(0,1,0)$、$A_1(0,0,1)$、$B_1(1,0,1)$、$D_1(0,1,1)$，$E(1,\frac{1}{2},0)$，$F(x,1,0)$，所以 $\overrightarrow{D_1E}=(1,-\frac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AF}=(x,1,0)$，所以 $\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{AB_1}=1-1=0$，即 $D_1E\perp AB_1$，于是 $D_1E\perp$ 平面 $AB_1F\Leftrightarrow D_1E\perp AF\Leftrightarrow\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{AF}=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0$，即 $x=\frac{1}{2}$，故当点 F 是 CD 的中点时，$D_1E\perp$ 平面 AB_1F.

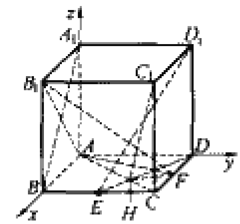


图 3

（Ⅱ）当 $D_1E\perp$ 平面 AB_1F 时，F 是 CD 的中点，又 E 是 BC 的中点，联结 EF，则 $EF\parallel BD$. 联结 AC，设 AC 与 EF 交于点 H，则 $AH\perp EF$. 联结 C_1H，则 CH 是 C_1H 在底面 $ABCD$ 内的射影.

所以 $C_1H\perp EF$，即 $\angle AHC_1$ 是二面角 C_1-EF-A 的平面角.

因为 $C_1(1,1,1)$，$H(\frac{3}{4},\frac{3}{4},0)$，所以

$$\overrightarrow{HC_1}=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1),\overrightarrow{HA}=(-\frac{3}{4},-\frac{3}{4},0)$$

所以
$$\cos\angle AHC_1=\frac{\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC_1}}{|\overrightarrow{HA}|\cdot|\overrightarrow{HC_1}|}=\frac{-\frac{3}{8}}{\sqrt{\frac{9}{8}}\times\sqrt{\frac{9}{8}}}=-\frac{1}{3}$$

即
$$\angle AHC_1=\arccos(-\frac{1}{3})=\pi-\arccos\frac{1}{3}$$

故二面角 C_1-EF-A 的大小为 $\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

2. 题设背景之二

几何体某一顶点处有两两互相垂直的三条棱.

【例 2】 如图 4，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=1$，$CB=\sqrt{2}$，侧棱 $AA_1=1$，侧面 AA_1B_1B 的两条对角线交点为 D，B_1C_1 的中点为 M.

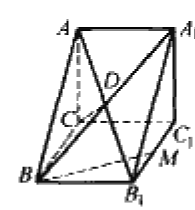


图 4

（Ⅰ）求证：$CD\perp$ 平面 BDM；（Ⅱ）求面 B_1BD 与面 CBD 所成二面角的大小.

传统解法　（Ⅰ）如图 5，联结 CA_1、AC_1、CM，则 $CA_1=\sqrt{2}$.

因为 $CB=CA_1=\sqrt{2}$，所以 $\triangle CBA_1$ 为等腰三角形，又知 D 为其底面 A_1B 的中点，

所以 $CD\perp A_1B$. 因为 $A_1C_1=1$，$C_1B_1=\sqrt{2}$，所以 $A_1B_1=\sqrt{3}$.

又 $BB_1=1$，$A_1B=2$，因为 $\triangle A_1CB$ 为直角三角形，D 为面 A_1B 的中点，

所以 $CD=\frac{1}{2}A_1B=1$，$CD=CC_1$. 又 $DM=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$DM=C_1M$，所以 $\triangle CDM\cong\triangle CC_1M$，$\angle CDM=\angle CC_1M=90°$，即 $CD\perp DM$.

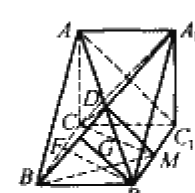


图 5

因为 A_1B、DM 为平面 BDM 内两条相交直线，所以 $CD\perp$ 平面 BDM.

（Ⅱ）设 F、G 分别为 BC、BD 的中点，联结 B_1G、FG、B_1F，则 $FG\parallel CD$、$FG=\frac{1}{2}CD$. 所以 $FG=\frac{1}{2}$，$FG\perp BD$.

由侧面矩形 BB_1A_1A 的对角线的交点为 D 知 $BD=B_1D=\frac{1}{2}A_1B=1$，所以 $\triangle BB_1D$ 是边长为 1 的正三角形.

于是 $B_1G\perp BD$，$B_1G=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle B_1GF$ 是所求二面角的平面角，又

$$B_1F^2 = B_1B^2 + BF^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

所以
$$\cos\angle B_1GF = \frac{B_1G^2 + FG^2 - B_1F^2}{2B_1C \cdot FG} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

即所求二面角的大小为 $\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

向量解法　(关键:找准非顶点的坐标).

如图6,以 C 为原点建立坐标系.

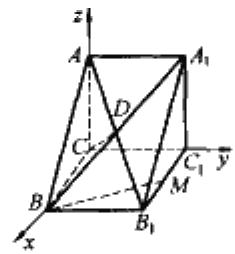


图6

(Ⅰ) $B(\sqrt{2},0,0)$、$B_1(\sqrt{2},1,0)$、$A_1(0,1,1)$、$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$、$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0\right)$、

$\overrightarrow{CD} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{A_1B} = (\sqrt{2},-1,-1)$,$\overrightarrow{DM} = \left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$,则 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{A_1B} = 0$,$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DM} = 0$,所以 $CD \perp A_1B$,$CD \perp DM$.

因为 A_1B、DM 为平面 BDM 内两条相交直线,所以 $CD \perp$ 平面 BDM.

(Ⅱ) 设 BD 中点为 G,联结 B_1G,则

$G\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$,$\overrightarrow{BD} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{B_1G} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$

所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{B_1G} = 0$,所以 $BD \perp B_1G$. 又 $CD \perp BD$,所以 $\overrightarrow{BD}$ 与 $\overrightarrow{B_1C}$ 的夹角 θ 等于所求的二面角的平面角. 所以

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以所求的二面角等于 $\pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例题链接　在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$,$PD = DC$,E 是 PC 的中点,作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F.

(Ⅰ) 证明:PA // 平面 EDB;(Ⅱ) 证明:$PB \perp$ 平面 EFD;(Ⅲ) 求二面角 $C-PB-D$ 的大小.

(此题由同学们自己独立思考完成. 第(Ⅲ)问答案:$\frac{\pi}{3}$)

3. 题设背景之三

几何体中只有两棱互相垂直的特殊体.

【例3】　如图7,已知四棱锥 $P-ABCD$,$PB \perp AD$,侧面 PAD 为边长等于2的正三角形,底面 $ABCD$ 为菱形,侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 $120°$.

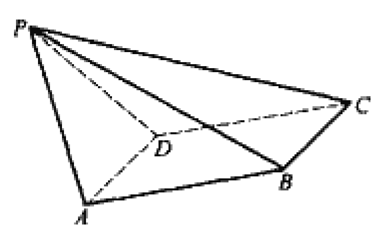


图7

(Ⅰ) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;

(Ⅱ) 求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.

传统解法　(Ⅰ) 如图8,作 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,垂足为点 O. 联结 OB、OA、OD,OB 与 AD 交于点 E,联结 PE.

因为 $AD \perp PB$,所以 $AD \perp OB$,因为 $PA = PD$,所以 $OA = OD$,于是 OB 平分 AD,点 E 为 AD 的中点,所以 $PE \perp AD$.

由此知 $\angle PEB$ 为面 PAD 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角,所以 $\angle PEB = 120°$,$\angle PEO = 60°$. 由已知可求得 $PE = \sqrt{3}$.

所以 $PO = PE \cdot \sin 60° = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$，即点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{3}{2}$.

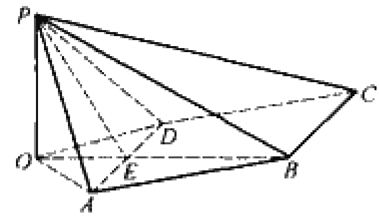


图 8

(Ⅱ) 如图 9，取 PB 的中点 G，PC 的中点 F，联结 EG、AG、GF，则 $AG \perp PB$，$FG \parallel BC$，$FG = \frac{1}{2}BC$.

因为 $AD \perp PB$，所以 $BC \perp PB$，$FG \perp PB$，所以 $\angle AGF$ 是所求二面角的平面角.

因为 $AD \perp$ 面 POB，所以 $AD \perp EG$.

又因为 $PE = BE$，所以 $EG \perp PB$，且 $\angle PEG = 60°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PEG$ 中，$EG = PE \cdot \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PEG$ 中，$EG = \frac{1}{2}AD = 1$，于是 $\tan \angle GAE = \frac{EG}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $\angle AGF = \pi - \angle GAE$，所以所求二面角的大小为 $\pi - \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$.

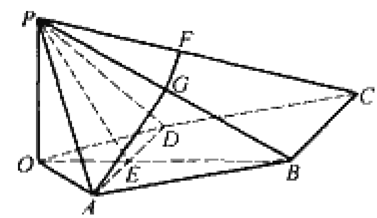


图 9

向量解法　（关键：建立适当的坐标系）

(Ⅱ) 如图 10，建立直角坐标系，其中 O 为坐标原点，x 轴平行于 DA. $P(0,0,\frac{3}{2})$，$B(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$，$PB$ 中点 G 的坐标为 $(0,\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4})$. 联结 AG.

又知 $A(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$C(-2,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$. 由此得到

$\overrightarrow{GA} = (1,-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4})$，$\overrightarrow{PB} = (0,\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{BC} = (-2,0,0)$

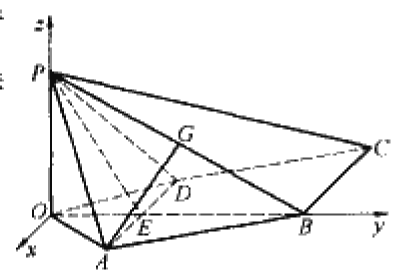


图 10

于是有　$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$，$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$

所以 $\overrightarrow{GA} \perp \overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{GA}$、$\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 等于所求二面角的平面角，于是 $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{GA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$，所以所求二面角的大小为 $\pi - \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$.

4. 题设背景之四

几何体中隐含两互相垂直直线的特殊体.

【例 4】　如图 11，在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形，平面 $SAC \perp$ 平面 ABC，$SA = SC = 2$，M、N 分别为 AB、SB 的中点.

(Ⅰ) 证明：$AC \perp SB$；

(Ⅱ) 求二面角 $N-CM-B$ 的大小；

(Ⅲ) 求点 B 到平面 CMN 的距离.

传统解法

(Ⅰ) 如图 12，取 AC 中点 D，联结 SD、DB.

因为 $SA = SC$，$AB = BC$，所以 $AC \perp SD$ 且 $AC \perp BD$，所以 $AC \perp$ 平面 SDB，又 SB 平面 SDB，所以 $AC \perp SB$.

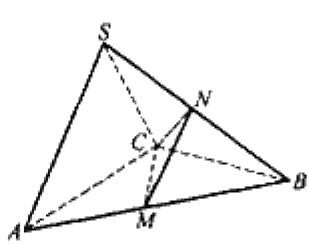


图 11

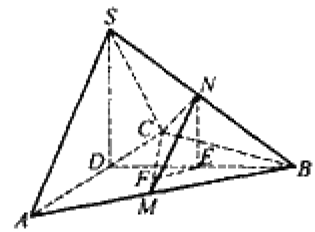


图 12

(Ⅱ) 因为 $AC \perp$ 平面 SDB，$AC \perp$ 平面 ABC，所以平面 $SDB \perp$ 平面 ABC. 过 N 作 $NE \perp BD$ 于 E，$NE \perp$ 平面 ABC，过 E 作 $EF \perp CM$ 于 F，联结 NF，则 $NF \perp CM$，所以 $\angle NFE$ 为二面角 $N-CM-B$ 的平面角.

因为平面 $SAC \perp$ 平面 ABC，$SD \perp AC$，所以 $SD \perp$ 平面 ABC. 又因为 $NE \perp$ 平面 ABC，所以 $NE \parallel SD$. 因为 $SN = NB$，所以

$$NE = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 - AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{12-4} = \sqrt{2}$$

且 $ED = EB$.

在正 $\triangle ABC$ 中，由平面几何知识可求得 $EF = \frac{1}{4}MB = \frac{1}{2}$.

在 Rt$\triangle NEF$ 中，$\tan\angle NFE = \frac{EN}{EF} = 2\sqrt{2}$，所以二面角 $N-CM-B$ 的大小是 $\arctan 2\sqrt{2}$.

(Ⅲ) 在 Rt$\triangle NEF$ 中

$$NF = \sqrt{EF^2 + EN^2} = \frac{3}{2}$$

所以
$$S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2}CM \cdot NF = \frac{3}{2}\sqrt{3},\ S_{\triangle CMB} = \frac{1}{2}BM \cdot CM = 2\sqrt{3}$$

设点 B 到平面 CMN 的距离为 h，因为 $V_{B-CMN} = V_{N-CMB}$，$NE \perp$ 平面 CMB，所以

$$\frac{1}{3}S_{\triangle CMN} \cdot h = \frac{1}{3}S_{\triangle CMB} \cdot NE$$

所以 $h = \frac{S_{\triangle CMB} \cdot NE}{S_{\triangle CMN}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$，即点 B 到平面 CMN 的距离为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

向量解法　（关键：找出隐含其中的两条互相垂直的直线，再以此建立坐标系）

(Ⅰ) 取 AC 中点 O，联结 OS、OB. 因为 $SA = SC$，$AB = BC$，所以 $AC \perp SO$ 且 $AC \perp BO$.

因为平面 $SAC \perp$ 平面 ABC，平面 $SAC \cap$ 平面 $ABC = AC$，所以 $SO \perp$ 面 ABC，所以 $SO \perp BO$.

如图 13，建立空间直角坐标系 $O-xyz$. 则 $A(2,0,0)$、$B(0,2\sqrt{3},0)$、$C(-2,0,0)$、$S(0,0,2\sqrt{2})$、$M(1,\sqrt{3},0)$、$N(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$，所以

$$\overrightarrow{AC} = (-4,0,0),\ \overrightarrow{SB} = (0,2\sqrt{3},-2\sqrt{2})$$

因为 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (-4,0,0)\cdot(0,2\sqrt{3},-2\sqrt{2}) = 0$，所以 $AC \perp SB$.

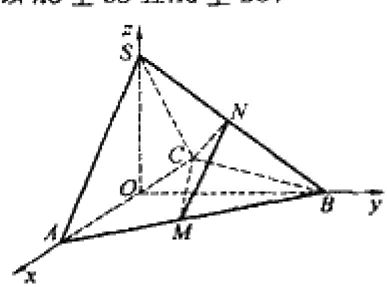


图 13

(Ⅱ) 由(Ⅰ)得 $\overrightarrow{CM} = (3,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{MN} = (-1,0,\sqrt{2})$. 设 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$ 为平面 CMN 的一个法向量，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{CM} \cdot \boldsymbol{n} = 3x + \sqrt{3}y = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \boldsymbol{n} = -x + \sqrt{2}z = 0\end{cases}$$

取 $z=1$,则 $x=\sqrt{2}$,$y=-\sqrt{6}$,所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},1)$,又 $\overrightarrow{OS}=(0,0,2\sqrt{2})$ 为平面 ABC 的一个法向量,所以

$$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OS}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OS}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{OS}|}=\frac{1}{3}$$

所以二面角 $N-CM-B$ 的大小为 $\arccos\frac{1}{3}$.

(Ⅲ)由(Ⅰ)(Ⅱ)得 $\overrightarrow{MB}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},1)$ 为平面 CMN 的一个法向量,所以点 B 到平面 CMN 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

两种解法各有利弊优劣,应视具体情况而定,灵活处理,择优选用.从以上几种"题设背景"来看,"传统解法"需作辅助线,有时一窍难得,不易解出;而使用"向量解法"程序化强、便于操作,求解的关键在于建立恰当的空间直角坐标系(基本原则:使图中尽可能多的点落在坐标轴上,这样便于用坐标表示相关的点及向量),然后利用坐标系确定各相关点及向量的坐标,再借助向量坐标运算法则、公式,无须添加辅助线,即可达到解题目的.一言以蔽之,处理空间问题不可忽视"以数助形"这种空间向量解析化思想.

(十七)"直线、平面和简单几何体"专题复习

1. 高考热点与复习建议

纵观近几年高考试题,涉及本专题的试题难度不大,最多是中等难度,基本题型、中等难度的综合题型仍会继续保留.随着空间向量的出现,利用空间向量进行论证和计算的问题肯定会出现但难度不大.运用所学知识解决现实问题,考查学生动手操作、主动探索的新题型应给予足够重视.本专题的定义、定理多,要学会把主要知识系统化,复习中要注意以下几点:

(1) 归纳总结,理线串点,从知识上可分为①平面的基本性质;②两个特殊的位置关系,即线线、线面、面面的平行与垂直;③三个角、三个距离,根据每部分内容选择典型的例题,总结出解题方法,对于空间位置关系的论证及空间角与距离的求解,还要注意把空间向量贯彻、渗透其中,通过一题多解,使学生把所学知识真正学活、会用.

(2) 抓主线攻重点,可以针对一些重点内容进行训练,平行和垂直是位置关系的核心,而线面垂直又是核心中的核心,线面角、二面角、距离均与线面垂直密切相关.因此对于这部分内容复习中要强化,并要注意用空间向量去解空间位置关系及空间量的问题.

(3) 复习中要加强数学思想方法的总结与提炼,本专题内容蕴涵着丰富的思想方法,一些判断、推理、证明题,首先应熟练掌握基本定理,然后借助数学思想方法(如割补思想、降维转化思想等)把空间问题转化为平面问题来解决,即化空间问题到平面图形中去解决,又如证线面间的位置关系常需经过多次转换才能获得解决,再如可把空间位置关系及空间量的求解转化为空间向量的运算,这些无不体现着化归转化的思想.因此自觉地学习和运用数学思想方法去解题,常能收到事半功倍之效果.

(4) 做题时要善于总结规律,找出共性的东西,高考对本专题的考查不外乎两大问题,一类是空间位置关系的论证,这类问题应熟练掌握公理、定理、定义或用空间向量来论证,位置关系的论证要注意其间的转化.如线面平行可转化为线线平行等;另一类问题是空间量(空间角、距离、体积、侧面积)的计算.如线面角、二面角的求解,用几何法都要涉及面的垂线,而面的垂线又常常借助于垂面来作,若用向量法求解,则要涉及平面的法向量,因此做立体几何题思路要清晰、方法选择要得当,这样复习才能达到预期的目的.附:本专题主要知识框架图(图1).

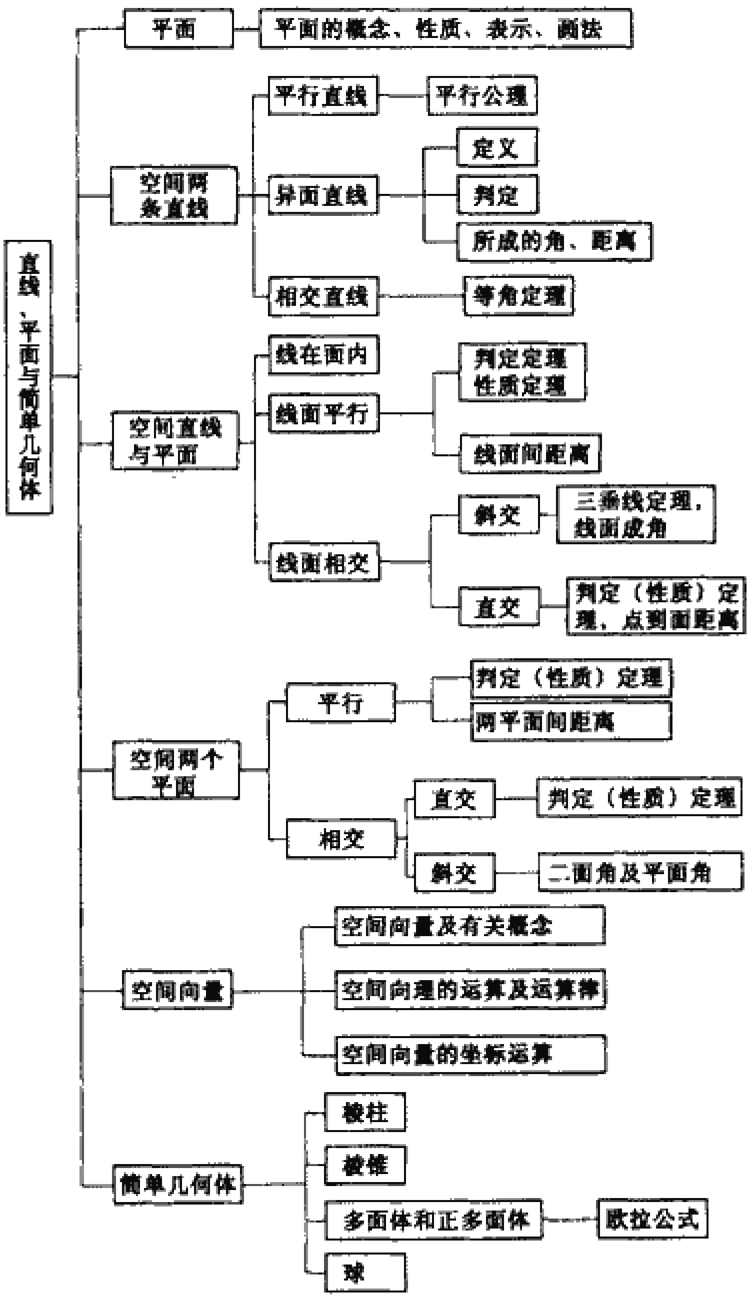


图 1

2. 典例选讲

(1) 以开放型问题形式，考查直线、平面位置关系的判定和性质

【例 1】 已知 m、n 是不重合的直线，α、β 是不重合的平面，有下列命题：① 若 $m \subset \alpha, n \parallel \alpha$，则 $m \parallel n$；② 若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$，则 $\alpha \parallel \beta$；③ 若 $\alpha \cap \beta = n, m \parallel n$，则 $m \parallel \alpha$ 且 $m \parallel \beta$；④ 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta$，则 $\alpha \parallel \beta$.

其中真命题的个数是(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

解析　本题考查空间几何中线、面的基础知识，可利用线面平行、线面垂直定理判断. ① 不正确，因为有可能是异面直线；② 不正确，因为有可能两平面相交；③ 不正确，因为有可能 $m \subset \alpha$ 或 $m \subset \beta$；④ 正确. 故选 B.

点评　本题属近几年高考试卷中出现的立体几何新题型 —— 开放型问题，属选择题中的多选题，解决此类问题必须对每个备选答案一一仔细辨清真伪，方可得出正确答案.

例题链接　1. 已知 a、b 为不垂直的异面直线，α 是一个平面，则 a、b 在 α 上的射影有可能是：① 两条平行直线；② 两条互相垂直的直线；③ 同一条直线；④ 一条直线及其外一点.

在上面结论中，正确结论的编号是________(写出所有正确结论的编号).

解析　画出满足条件的直观图，得正确结论应为 ①②④.

2. 设 α、β、γ 为两两不重合的平面，l、m、n 为两两不重合的直线，给出下列四个命题：

① 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$，则 $\alpha \parallel \beta$；　② 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha, m \parallel \beta, n \parallel \beta$，则 $\alpha \parallel \beta$；

③ 若 $\alpha \parallel \beta, l \subset \alpha$，则 $l \parallel \beta$；　④ 若 $\alpha \cap \beta = l, \beta \cap \gamma = m, \gamma \cap \alpha = n, l \parallel \gamma$，则 $m \parallel n$.

其中真命题的个数是(　　)

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

解析　本题考查了立体几何中面面垂直、平行的性质和判定；线面平行的性质及相关线线、线面平行的判定等，同时考查了空间想象能力，综合推理能力等. ① 由面面垂直知，不正确；② 由线面平行判定定理知，缺少 m、n 相交于一点这一条件，故不正确；③ 由线面平行判定定理知，正确；④ 由线面相交、及线面、线线平行分析知，正确. 综上所述知，③、④ 正确，故选 B.

(2) 以棱柱、棱锥等几何体为载体，考查线线、线面、面面的位置关系和空间角、空间距离、面积、体积等度量关系

① 高考中以棱柱、棱锥为载体的立体几何试题，常以解答题形式出现，且考查的知识点较多，进行分步设问，第一问往往考查线线、线面、面面的位置关系，后面几问常考查空间角、空间距离、面积、体积等度量关系.

② 涉及空间向量应用于立体几何的高考试题，都着重考查应用空间向量求异面直线所成的角、二面角，证明线线平行、线面平行以及异面直线垂直和线面垂直等问题.

历年高考试题显示，空间角考查的比重较大，这是因为空间角的计算是对空间线与线，线与面，面与面位置关系的一种定量研究，它与空间距离的计算相结合，能对上述诸几何对象间的位置关系作出准确的刻画. 空间角的计算问题联系广，涉及面宽，便于综合考查学生分析问题、解决问题的能力，是高考每年必考的内容. 通过这部分内容的学习，可以培养学生的空间想象能力、逻辑推理能力和快速、准确的运算能力，强化转化与化归、分类讨论等数学思想方法的应用意识，养成用运动、变化、联系的观点看问题的习惯，培养辩证唯物主义世界观.

空间角包括三类，即空间内直线所成角，空间直线和平面所成的角以及二面角(空间两直线所成角的重点是两条异面直线所成的角). 基本方略：可将空间图形问题转化为平面图形问题，用传统的几何法求解，也可用向量法求解.

【例 2】　如图 2，已知四棱锥 $P-ABCD$，$PB \perp AD$，侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形，底面 $ABCD$ 为菱形，侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 $120°$.

(Ⅰ) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离；

(Ⅱ) 求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.

解析　本小题以多面体(棱锥)为载体，全面考查空间中线线、线面、面面的关系以及有关角、距离等几何量大小的求法等基本知识，同时考查空间想象能力和推理、运算能力.

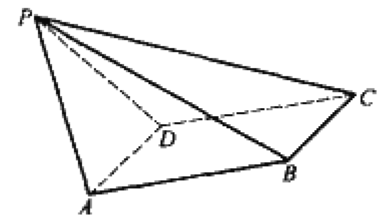


图 2

传统解法

（Ⅰ）**解法 1**　如图 3，作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$ 于点 O.

联结 OB 交 AD 于点 E，联结 PE. 因为 $AD\perp PB$，所以 $AD\perp OB$，因为 $PA=PD$，所以 $OA=OD$，于是 OB 平分 AD，所以 $PE\perp AD$. 由此知 $\angle PEB$ 为面 PAD 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角，所以 $\angle PEO=60°$，求得 $PE=\sqrt{3}$. 所以 $PO=PE\cdot\sin 60°=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$，即点到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{3}{2}$.

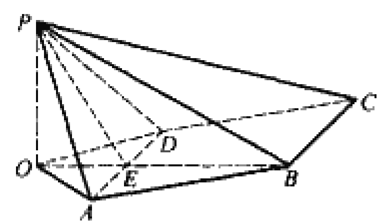


图 3

解法 2（等积变换）　取 AD 的中点 E，联结 PE、BE，可推得 $\angle PEB=120°$，再由 $V_{P-AEB}=V_{A-PEB}$，得点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{3}{2}$.

解法 3（构造直角三角形）　取 AD 的中点 E，联结 PE、BE，推得 $\angle PBE=30°$，$PB=3$，过点 P 作 $PO\perp BE$ 于 O，可推得 $PO=PB\cdot\sin 30°=\frac{3}{2}$.

解法 4（构造新几何体）　以共顶点 A 的三条棱 AB、AD、AP 为棱，构造平行六面体，使它的每个面都是全等的菱形，则点 P 到平面 $ABCD$ 的距离等于点 B 到平面 PAD 的距离. 取 AD 的中点 E，可推得 $\angle PEB=120°$，所以点 B 到平面 PAD 的距离 $h=BE\cdot\sin 60°=\frac{3}{2}$.

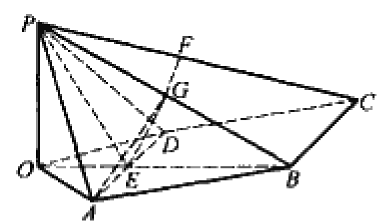


图 4

（Ⅱ）**解法 1**　如图 4，取 PB 的中点 G，PC 的中点 F，联结 EG、AG、GF，则 $AG\perp PB$，$FG\parallel BC$，$FG=\frac{1}{2}BC$. 因为 $AD\perp PB$，所以 $BC\perp PB$，$FG\perp PB$，所以 $\angle AGF$ 是所求二面角的平面角. 因为 $AD\perp$ 面 POB，所以 $AD\perp EG$.

又因为 $PE=BE$，所以 $EG\perp PB$，且 $\angle PEG=60°$. 在 Rt△PEG 中，$EG=PE\cdot\cos 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 在 Rt△$PEG$ 中，$EG=\frac{1}{2}AD=1$，于是 $\tan\angle GAE=\frac{EG}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\angle AGF=\pi-\angle GAE$，所以所求二面角的大小为 $\pi-\arctan\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2（化整为零）　实际上二面角 $A-PB-C$ 的大小等于二面角 $C-PB-E$ 与 $A-PB-E$ 的和.

解法 3（等积变换）　过 C 作 $CM\perp$ 面 PAB 于 M，联结 BM，可推得 $\angle CBM$ 为所求二面角 $A-PB-C$ 的平面角的补角，由 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PO=\frac{1}{3}S_{\triangle ABP}\cdot CM$，得 $\sin\angle CBM=\frac{CM}{BC}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以二面角 $A-PB-C$ 的大小为 $\pi-\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

解法 4（利用异面直线两点间的距离公式）　取 PB 的中点 G，联结 AG，可推得 BG 为异面直线 AG、BC 的公垂线段，设二面角 $A-PB-C$ 的大小为 θ，由距离公式得 $\cos\theta=\frac{AG^2+GB^2+BC^2-AC^2}{2AG\cdot BC}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，故所求二面角的大小为 $\pi-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

向量解法

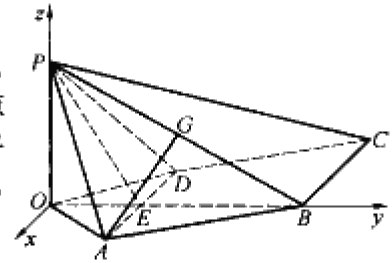


图 5

（Ⅰ）（利用法向量）如图 5，作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$ 于 O，联结 OB，则由三垂线定理的逆定理知 $OB\perp AD$，作 $Ox\,/\!/\,AD$，建立以 O 为原点，Ox 为轴，OB 为 y 轴，OP 为 z 轴的空间直角坐标系 $O-xyz$，设平面 $ABCD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OB}$，推得 $\boldsymbol{n}=(O,O,z)$，所以点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\left|\frac{\overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{3}{2}$.

（Ⅱ）**解法 1** （利用向量的几何运算）取 PB 的中点 G，联结 AG，得 $\overrightarrow{GA}\perp\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PB}$，所以 $\overrightarrow{GA}$、$\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 等于所求二面角的平面角.

解法 2 （常规向量法）如图 5，建立直角坐标系，其中 O 为坐标原点，x 轴平行于 DA，$P(0,0,\frac{3}{2})$，$B(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$，$PB$ 中点 G 的坐标为 $(0,\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4})$，联结 AG.

又知 $A(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$C(-2,\frac{3\sqrt{3}}{2},0)$. 由此得到

$$\overrightarrow{GA}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4}\right),\overrightarrow{PB}=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right),\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$$

于是有
$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$$

所以 $\overrightarrow{GA}\perp\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{GA}$、$\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 等于所求二面角的平面角，于是

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{GA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

所以，所求二面角的大小为 $\pi-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

解法 3（借助法向量） 以 E 为坐标原点，EA 所在直线为 x 轴，EB 所在直线为 y 轴建立空间直角坐标系，设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，可推得 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，同理设平面 PAB 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，推得 $\boldsymbol{n}_2=(0,-1,-\sqrt{3})$，设二面角 $A-PB-C$ 的大小为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，故所求二面角的大小为 $\pi-\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

【例 3】 如图 6，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，$AB\,/\!/\,DC$，$\angle DAB=90°$，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=AD=DC=\frac{1}{2}AB=1$，M 是 PB 的中点.

（Ⅰ）证明：面 $PAD\perp$ 面 PCD；

（Ⅱ）求 AC 与 PB 所成的角；

（Ⅲ）求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.

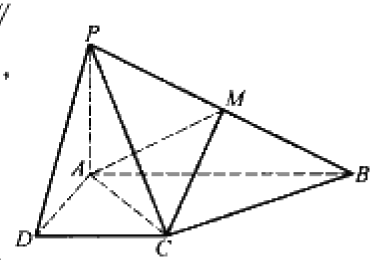


图 6

解析 本小题主要考查直线与平面垂直、直线与平面所成角的有关知识及思维能力和空间想象能力. 考查应用向量知识解决数学问题的能力.

传统解法

（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$CD\perp AD$，所以由三垂线定理得 $CD\perp PD$. 因而，CD 与面 PAD 内两条相交直线 AD、PD 都垂直，所以 $CD\perp$ 面 PAD. 又 $CD\subset$ 面 PCD，所以面 $PAD\perp$ 面 PCD.

（Ⅱ）**解法 1** 如图 7，过点 B 作 $BE\,/\!/\,CA$，且 $BE=CA$，则 $\angle PBE$ 是 AC 与 PB 所成的角. 联结 AE，

可知 $AC = CB = BE = AE = \sqrt{2}$，又 $AB = 2$，所以四边形 $ACBE$ 为正方形. 由 $PA \perp$ 面 $ABCD$ 得 $\angle PEB = 90°$. 在 $Rt\triangle PEB$ 中 $BE = \sqrt{2}$，$PB = \sqrt{5}$，所以 $\cos\angle PBE = \frac{BE}{PB} = \frac{\sqrt{10}}{5}$，所以 AC 与 PB 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

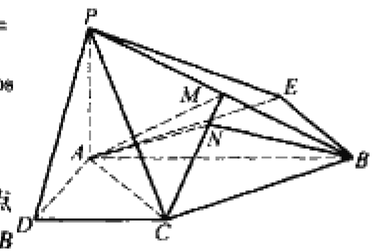


图 7

解法 2 （利用三角形中位线性质平移）分别取 AB、BC、PC 的中点 E、F、N，联结 EF、FN、NE，则 $\angle NFE$（或其补角）是异面直线 AC 与 PB 所成角. 取 AC 中点 O，联结 NO、OE，然后计算求得.

解法 3 （利用三角形中位线性质平移）分别取 AB、PA、PC 的中点 E、Q、N，同解法 2 易知 $\angle NQE$（或其补角）为所求.

解法 4 （构造平行四边形，利用三角形中位线性质平移）分别取 AB、PA 的中点 E、Q，延长 DC 至 F，使得 $CF = AE$，则 $\angle QEF$ 或其补角为所求.

解法 5 （构造平行四边形平移）延长 DC 至 R，使 $CR = AB$，则有 $\angle PBR$ 或其补角为所求.

解法 6 （补成正方体）据已知条件，将原图补成一个棱长为 1 的正方体，则 $\angle RPM$ 或其补角为异面直线 AC 与 PB 所成的角.

（Ⅲ）**解法 1** 作 $AN \perp CM$，垂足为 N，联结 BN. 在 $Rt\triangle PAB$ 中，$AM = MB$，又 $AC = CB$，所以 $\triangle AMC \cong \triangle BMC$，所以 $BN \perp CM$，故 $\angle ANB$ 为所求二面角的平面角. 因为 $CB \perp AC$，由三垂线定理，得 $CB \perp PC$，在 $Rt\triangle PCB$ 中，$CM = MB$，所以 $CM = AM$.

在等腰 $\triangle AMC$ 中

$$AN \cdot MC = \sqrt{CM^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} \cdot AC$$

所以

$$AN = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

所以 $AB = 2$，所以

$$\cos\angle ANB = \frac{AN^2 + BN^2 - AB^2}{2 \times AN \times BN} = -\frac{2}{3}$$

故所求的二面角为 $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

解法 2 利用射影面积公式 $\cos\theta = \frac{S_{射影图形}}{S_{原斜面图}}$（其中 θ 为二面角的平面角）求解.

向量解法

因为 $PA \perp PD$，$PA \perp AB$，$AD \perp AB$，以 A 为坐标原点，AD 长为单位长度，如图 8 所示建立空间直角坐标系，则各点坐标为 $A(0,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(1,1,0)$、$D(1,0,0)$、$P(0,0,1)$、$M(0,1,\frac{1}{2})$.

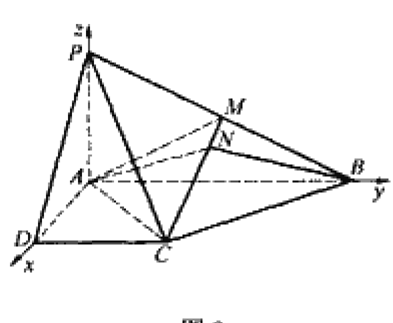


图 8

（Ⅰ）因 $\overrightarrow{AP} = (0,0,1)$，$\overrightarrow{DC} = (0,1,0)$，故 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$，所以 $AP \perp DC$.

由题设知 $AD \perp DC$，且 AP 与 AD 是平面 PAD 内的两条相交直线，由此得 $DC \perp$ 面 PAD. 又 DC 在面 PCD 上，故面 $PAD \perp$ 面 PCD.

（Ⅱ）因 $\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$，$\overrightarrow{PB} = (0,2,-1)$，故 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$，$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{5}$，$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PB} = 2$，所以

$$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

（Ⅲ）**解法1** 在 MC 上取一点 $N(x,y,z)$，则存在 $\lambda\in\mathbf{R}$ 使 $\overrightarrow{NC}=\lambda\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{NC}=(1-x,1-y,-z)$，$\overrightarrow{MC}=(1,0,-\frac{1}{2})$，所以 $x=1-\lambda,y=1,z=\frac{1}{2}\lambda$.

要使 $AN\perp MC$，只须 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$，即 $x-\frac{1}{2}z=0$，解得 $\lambda=\frac{4}{5}$.

可知当 $\lambda=\frac{4}{5}$ 时，点 N 坐标为 $\left(\frac{1}{5},1,\frac{2}{5}\right)$，能使 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$，此时 $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{1}{5},1,\frac{2}{5}\right)$，$\overrightarrow{BN}=\left(\frac{1}{5},-1,\frac{2}{5}\right)$，有 $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$，由 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$，$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{MC}=0$，得 $AN\perp MC$，$BN\perp MC$，所以 $\angle ANB$ 为所求二面角的平面角.因为 $|\overrightarrow{AN}|=\frac{\sqrt{30}}{5}$，$|\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{30}}{5}$，$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}=-\frac{4}{5}$，所以

$$\cos\langle\overrightarrow{AN},\overrightarrow{BN}\rangle=\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AN}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=-\frac{2}{3}$$

故所求的二面角为 $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

解法2 建立坐标系同解法1，设平面 AMC 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,1)$，平面 BMC 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(\lambda,\mu,1)$，则可求出 $\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$，$\boldsymbol{n}_2=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，从而 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{3}$.因为 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的方向都指向二面角外，故所求二面角的大小为 $\pi-\arccos\frac{2}{3}$.

例题链接 如图9，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PD=AB=a$，E 是 PB 的中点.

（Ⅰ）求异面直线 PD、AE 所成的角；

（Ⅱ）在平面 PAD 内求一点 F，使得 $EF\perp$ 平面 PBC；

（Ⅲ）求二面角 $F-PC-E$ 的大小.

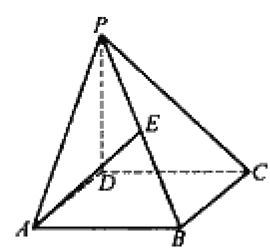


图9

解析 （Ⅰ）以 $\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DP}$ 为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，则 $A(a,0,0)$、$B(a,a,0)$、$C(0,a,0)$、$P(0,0,a)$、$E(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$，所以

$$\overrightarrow{AE}=(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}),\overrightarrow{DP}=(0,0,a)$$

所以 $$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{a^2}{2},|\overrightarrow{DP}|=a,|\overrightarrow{AE}|=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\cos\langle\overrightarrow{DP},\overrightarrow{AE}\rangle=\frac{\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{DP}|\cdot|\overrightarrow{AE}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以异面直线 AE、DP 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（Ⅱ）设 $F(t,0,s)$，则 $\overrightarrow{EF}=(t-\frac{a}{2},-\frac{a}{2},s-\frac{a}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-a,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(0,a,-a)$，$EF\perp$ 平面 PBC，所以 $EF\perp BC$，$EF\perp PC$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}(-\frac{a}{2})a+(s-\frac{a}{a})(-a)=0\\(t-\frac{a}{2})(-a)=0\end{cases}$$

从而 $\begin{cases}t=\frac{a}{2}\\s=0\end{cases}$，所以 $F(\frac{a}{2},0,0)$，即 F 为 AD 的中点.

(Ⅲ)因为 $EF\perp$ 平面 PBC,所以 $\overrightarrow{EF}$ 是平面 PBC 的法向量,设平面 PFC 的法向量为 $n=(t,s,1)$,

$$\begin{cases}(t,s,1)\cdot(0,a,-a)=0\\(t,s,1)\cdot\left(\frac{a}{2},0,-a\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=2\\s=1\end{cases}$$

所以
$$\cos\langle n,\overrightarrow{EF}\rangle=\frac{(2,1,1)\cdot\left(0,-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以二面角 $F-PC-E$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

点评 本题考查立体几何中的求角问题,可用传统方法求解,也可建立空间直角坐标系,利用向量方法解决.特别是第(Ⅲ)问中,通过构造法向量来求二面角的平面角,很好!

3.解题方略

立体几何中计算问题传统解法的一般思路:"作 — 证 — 求",强调作图、证明和计算相结合.在计算的时候要注意把某些平面图形分离出来运用平面几何方法进行解决,这是解决立体几何中计算问题的重要方法和技巧.特别地,两个"截面"(直角三角形)是解棱锥问题的"钥匙".

传统解法中求异面角的基本思路是经平移,把它转化成相交直线所成角,再运用解三角形的知识加以计算.空间直线和平面所成的角重点是平面的斜线和这平面所成的角,计算时,要先找出斜线在平面内的射影.计算二面角时,也要先恰当构造二面角的平面角,它们都是转化成两相交直线所成角后,再计算求得大小(求异面角重点是作出空间各种角的方法:两条异面直线所成的角,是通过平移一条直线使之与另一条直线相交(或同时平移两条直线使之相交),而"平移"应是在某一个平面内来完成的;作斜线与平面所成的角时,首先应过斜线上的点(异于斜足)作平面的垂线,从而作出斜线在平面内的射影而得到线面角;作二面角平面角的最重要的方法就是过二面角的一个面上的某已知点,作另一个面的垂线,再作棱的垂线,利用三垂线定理(或其逆定理)而得出二面角).这时,问题的处理过程往往与线面、线线的垂直关系有关,也会涉及平面的一条垂线及有关距离的计算.和求距离题一样,求有关角的大小问题正确的思维和表述步骤应包括作图、证明、计算三步,三步缺一不可.

空间角结构关系可简单归纳如下:

求解策略也可简要归纳如下:线线角,用平移,妙选顶点;线面角,作射影,二足相连;二面角,求法多,择优选用;平面角,三垂线,抓住重点;熟划归,三角形,算准结果,作、论、求,三环节,环环相连.不可忽视"以数助形"这种空间向量解析化思想.对空间角的取值范围应有所理解,如两异面直线所成的角 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$;直线与平面所成的角 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$;二面角的大小,可用它们的平面角来度量,其平面角 $\theta\in(0,\pi]$.

用空间向量解决立体几何问题一般可按以下过程进行思考:① 要解决的问题可用什么向量知识来解决?需要用到哪些向量?② 所需要的向量是否已知?若未知,是否可用已知条件转化成的向量直接表示?③ 所需要的向量若不能直接用已知条件转化成的向量表示,则它们分别最易用哪个未知向量表示?这些未知向量与由已知条件转化的向量有何关

- 空间角的求法
  - 异面直线所成的角
    - 特殊情形（垂直）
    - 一般情形（平移）
  - 线面角
    - 特殊情形
      - 线在面内或线面平等
      - 垂直
    - 一般情形（斜足、垂足，射影，成角）
  - 二面角
    - 特殊情形（垂直）
    - 一般情形
      - 直接法（作出平面角）
        - 定义法
        - 三垂线定理法
        - 线面垂直法
        - 面面垂直法
      - 间接方法（投影法）

系?④ 怎样对已经表示出来的所需向量进行运算,才能得到需要的结论?

以图形中的翻折问题为背景,考查平面几何与立体几何之间的亲密关系.

【例4】 如图10,已知 $ABCD$ 是上、下底边长分别为2和6,高为$\sqrt{3}$的等腰梯形,将它沿对称轴 OO_1 折成直二面角,如图11所示.

（Ⅰ）证明:$AC \perp BO_1$;

（Ⅱ）求二面角 $O-AC-O_1$ 的大小.

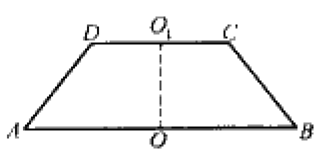


图10

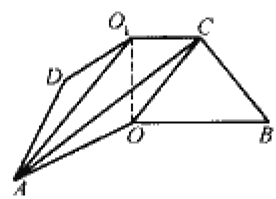


图11

解析 （Ⅰ）由题设知 $OA \perp OO_1$、$OB \perp OO_1$,所以$\angle AOB$是所折成的直二面角的平面角,即 $OA \perp OB$.故可以 O 为原点,OA、OB、OO_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,如图12所示,则相关各点的坐标是 $A(3,0,0)$、$B(0,3,0)$、$C(0,1,\sqrt{3})$、$O_1(0,0,\sqrt{3})$.

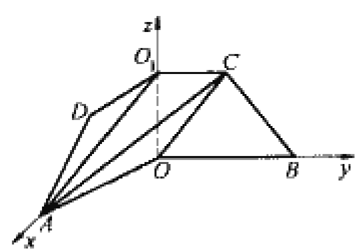


图12

从而$\overrightarrow{AC}=(-3,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BO_1}=(0,-3,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BO_1}=-3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=0$.所以 $AC \perp BO_1$.

（Ⅱ）因为$\overrightarrow{BO_1}\cdot\overrightarrow{OC}=-3+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=0$,所以 $BO_1 \perp OC$.

由（Ⅰ）$AC \perp BO_1$,所以 $BO_1 \perp$ 平面 OAC,$\overrightarrow{BO_1}$ 是平面 OAC 的一个法向量.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 O_1AC 的一个法向量,由

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{O_1C}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x+y+\sqrt{3}z=0\\ y=0\end{cases}$$

取 $z=\sqrt{3}$,得 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3})$.

设二面角 $O-AC-O_1$ 的大小为 θ,由 $\boldsymbol{n}$,$\overrightarrow{BO_1}$ 的方向可知 $\theta=\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BO_1}\rangle$,所以

$$\cos\theta=\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{BO_1}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BO_1}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BO_1}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

即二面角 $O-AC-O_1$ 的大小是 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

例题链接 1.在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=BC=\sqrt{2}$,$BB_1=2$,$\angle ABC=90°$,E、F 分别为 AA_1、C_1B_1 的中点,棱柱的表面从 E 到 F 两点的最短路径的长度为________.

解析 本题主要考查空间距离转化为平面距离.分别延长 BB_1、A_1C_1 和 A_1B_1 将 E、F 展开到同一平面内,则易得

$$EF=\sqrt{\frac{9}{2}+1}=\frac{\sqrt{22}}{2},EF=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

或
$$EF=\sqrt{2+\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4}}=\frac{\sqrt{16+4\sqrt{2}}}{2}$$

比较可得,最小值为 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

点评 将平面图形空间化是立体几何的另一种问题形式,大家知道在立体几何中,许多问题都可进行空间图形平面化,即将一个个空间图形,通过所学的几何知识,转化成平面图形,最后使用平面几何的若干知识得以解决.而本题却反其道而行之,所以在做法上就不能和上述的方法相同,但在本质上有许多相通之处,在这类题目中,尽量找出两图形变化过程中的相关联之处,哪些量变了,哪些量没有变,然后解决起来,就会顺手多了!

2.如图13,正方形 A_1BA_2C 的边长为4,D 是 A_1B 的中点,E 是 BA_2 上的点,将 $\triangle A_1DC$ 及 $\triangle A_2EC$ 分别沿 DC 和 EC 折起,使 A_1、A_2 重合于 A,且二面角 $A—DC—E$ 为直二面角.

(Ⅰ)求证:$CD\perp DE$;

(Ⅱ)求 AE 与面 DEC 所成角的正弦值;

(Ⅲ)求点 D 到平面 AEC 的距离.

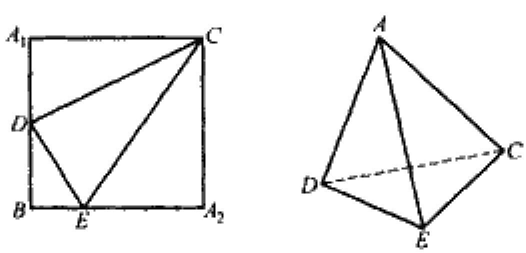


图 13

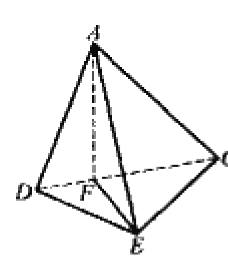


图 14

解 (Ⅰ)因为 A_1、A_2 重合于 A,所以 $AC\perp AD$,$AC\perp AE$,故 $AC\perp$ 面 ADE,所以 $AC\perp DE$,因为 $A-DC-E$ 为直二面角,所以过 A 作 $AF\perp CD$ 于 F,则 $AF\perp$ 面 CDE,故 CD 为AC 在面CDE 上的射影,由三垂线定量的逆定理有 $CD\perp DE$.

(Ⅱ)因为 $AF\perp$ 面 CDE,所以 $\angle AEF$ 为 AE 与面 DEC 所成的角,在 Rt$\triangle CAD$ 中,$AD=2$,$AC=4$,所以 $DC=2\sqrt{5}$,$AF=\frac{4}{\sqrt{5}}$,又 $CD\perp DE$,所以在正方形 A_1BA_2C 中,$\triangle DBE\backsim\triangle CA_1D$,$\frac{A_1C}{A_1D}=\frac{BD}{BE}\Rightarrow BE=1$,所以 $DE=\sqrt{5}$,又因为 $DE\perp CD$,$DE\perp AC$,所以 $DE\perp$ 面 ACD,则 $DE\perp AD$.所以在 Rt$\triangle ADE$ 中,$AE=3$,故在

Rt△AFE 中，$\sin\angle AEF=\frac{AF}{AE}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，所以 AE 与面 DEC 所成角的正弦值为$\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

（Ⅲ）设 D 到面 AEC 的距离为 d，则由 $V_{D-AEC}=V_{A-DEC}$ 有

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AE\cdot AC\cdot d=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot CD\cdot DE\cdot AF$$

所以 $3\times4d=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}$，故 $d=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，即点 D 到平面 AEC 的距离为$\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

4. 归纳点拨

(1) 空间各种角的度量都可以转化为平面角来实现，要熟练掌握各类角转化为平面角的方法. 为了实现这种转化，一要靠经验与知识的积累，二要重视识图与画图的训练，三要以推理为主要依据. 求角的一般步骤：① 找出或作出有关的平面角；② 证明它符合定义；③ 归到某一三角形中进行计算.

具体操作时，是采用传统解法还是向量解法要视具体情况而定.

解题中，若能从分析"题设背景"的角度，把握这两种方法的"交汇点"，将大大提高我们的解题效率，能使用向量解法的常见题设背景：

题设背景之一：几何体是正方体或长方体

向量解法关键：以其中一顶点为坐标原点建立空间直角坐标系，相关问题常用向量解法

题设背景之二：几何体某一顶点处有两两互相垂直的三条棱

向量解法关键：找准非顶点的坐标

题设背景之三：几何体中只有两棱互相垂直的特殊体

向量解法关键：建立适当的坐标系

题设背景之四：几何体中隐含两互相垂直直线的特殊体

向量解法关键：找出隐含其中的两互相垂直的直线，再以此建系

(2) 求距离体现了化归的思想，常用的方法大致分以下两种：① 把距离问题转化为解三角形问题，在三角形中解决；② 体积法也是一种常用的方法.

(3) 计算 A、B 两点间的球面距离步骤：① 计算线段 AB 的长度；② 计算 A、B 到球心 O 的张角；③ 计算求大圆在 A、B 两点间所夹的劣弧长.

(4) 翻折问题的解题关键有：① 画好两个图 —— 翻折前的平面图和翻折后生成的立体直观图；② 分析好两个关系 —— 翻折前后哪些位置关系和度量关系发生变化，哪些没有改变.

(5) 根据高考对空间问题的考查要求，复习时我们应做到"四会"：① 会画图 —— 根据题设条件画出适合题意的图形或画出自己想作的辅助线(面)，作出的图形要直观、虚实分明；② 会识图 —— 根据题目给出的图形，想象出立体的形状和有关线面的位置关系；③ 会析图 —— 对图形进行必要的分解、组合；④ 会用图 —— 对图形或其某部分进行平移、翻折、旋转、展开或实行割补术.

（十八）一道课本立体几何题的模型探究

1. 模型及来源

（现行人教大纲版高中数学第二册（下 B）的复习参考题九第 2 题）

如图 1，四面体 $ABCD$ 中，AB、BC、CD 两两垂直.

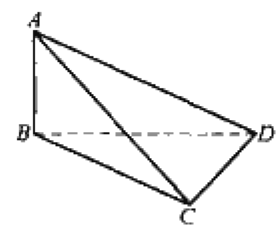


图 1

此四面体中蕴含着很多丰富而独特的性质，这些性质在许多有关立体几何的问题处理中起着模型带动的作用. 它的性质由三条相互连接且两两垂直的棱所确定，我们不妨称这样的四面体为“三垂型”. 以下对其性质予以探究和应用.

2. 性质及应用

性质 1　“三垂型”的四个面都是直角三角形.

由 AB、BC、CD 两两垂直易知 $AB\perp$ 平面 BCD，$CD\perp$ 平面 ABC，所以四面体 $ABCD$ 的四个面都是直角三角形.

【例 1】（2007 年高考安徽卷理科第 15 题）在正方体上选择 4 个顶点，它们可能是如下几何形体的 4 个顶点，则这些几何形体是______（写出所有正确结论的编号）.

① 矩形；② 不是矩形的平行四边形；③ 三个面为等腰直角三角形，一个面为正三角形的四面体；④ 每个面都是等边三角形的四面体；⑤ 每个面都是直角三角形的四面体.

解析　对于 ⑤，就是我们所列举的“三垂型”，只要在正方体中找三条顺次连接且两两垂直的三条棱对应的点作为四面体的顶点即可. 实际上，这也给我们一个启示，对于“三垂型”性质的研究，我们可以把它补成正方体或长方体，将会有利于发挥空间想象力. 正确答案：①③④⑤.

性质 2　四面体 $ABCD$ 中，以六条边为棱可以构成六个二面角，在这些二面角中：

(1) AB 和 CD 为棱的二面角的平面角分别为 $\angle CBD=\arctan\dfrac{CD}{CB}$、$\angle ACB=\arctan\dfrac{AB}{CB}$；

(2) 以 BC 的对棱 AD 为棱的二面角的平面角为 $\arccos\dfrac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$；

(3) 其余二面角均为直二面角.

以下给出(2)的证明，如图 2，过 C 作 $CE\perp BD$，垂足为 E，则 $CE\perp$ 平面 ABD，过 E 作 $EF\perp AD$，垂足为 F，联结 CF，易知 $Rt\triangle CEF$ 中 $\angle CFE$ 为二面角 $C-AD-B$ 的平面角，且

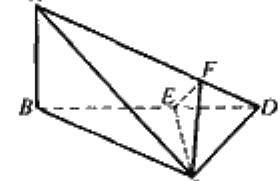


图 2

$$\cos\angle CFE=\frac{EF}{CF} \tag{①}$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中

$$\frac{EF}{DF}=\frac{AB}{BD}\Rightarrow EF=\frac{AB\cdot DF}{BD} \tag{②}$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中

$$\frac{CF}{DF}=\frac{AC}{CD}\Rightarrow CF=\frac{AC\cdot DF}{CD} \tag{③}$$

把②③代入①得

$$\cos\angle CFE = \frac{AB \cdot CD}{BD \cdot AC}$$

所以

$$\angle CFE = \arccos\frac{AB \cdot CD}{BD \cdot AC}$$

【例2】 (2007年高考天津卷理科第19题)如图3,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PA \perp$ 底面 $ABCD$,$AB \perp AD$,$AC \perp CD$,$\angle ABC = 60°$,$PA = AB = BC$,E 是 PC 的中点.

(Ⅰ)证明:$CD \perp AE$;(Ⅱ)证明:$PD \perp$ 平面 ABE;(Ⅲ)求二面角 $A-PD-C$ 的大小.

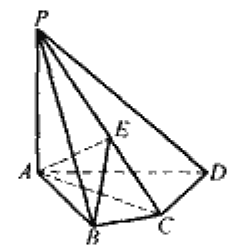


图3

解析 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$,所以 $CD \perp PA$,又因为 $AC \perp CD$,$CD \perp$ 面 PAC,所以四面体 $P-ACD$ 是"三垂型",对于(Ⅰ)由性质1知 $CD \perp AE$.

(Ⅱ)略.

(Ⅲ)设 $PA = AB = BC = a$,因为 $\angle ABC = 60°$,所以 $AC = a$,Rt△ACD 中,$AC = a$,$\angle CAD = 30°$,所以 $CD = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,$AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$,Rt△$PAC$ 中,$PC = \sqrt{2}a$.二面角 $A-PD-C$ 是以 PD 为棱的二面角,所以其大小为

$$\arccos\frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$$

【例3】 (2006年高考陕西卷理科第19题)如图4,平面 $\alpha \perp \beta$,$\alpha \cap \beta = l$,$A \in \alpha$,$B \in \beta$,点 A 在直线 l 上的射影为 A_1,点 B 在 l 上的射影为 B_1,已知 $AB = 2$,$AA_1 = 1$,$BB_1 = \sqrt{2}$.

(Ⅰ)求直线 AB 与 α,β 所成角的大小;

(Ⅱ)求二面角 A_1-AB-B_1 的大小.

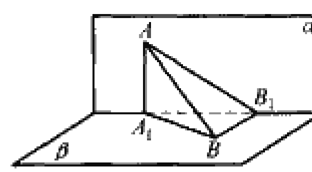


图4

解析 (Ⅰ)略.

(Ⅱ)联结 AB_1、A_1B,四面体 AA_1BB_1 中,易知 AA_1、A_1B_1、B_1B 两两垂直,所以四面体 AA_1BB_1 是"三垂型",由条件知 $AA_1 = 1$,$BB_1 = \sqrt{2}$,$AB_1 = \sqrt{3}$,二面角 A_1-AB-B_1 以"三垂型"中 A_1B_1 的对棱为棱,所以其大小为

$$\arccos\frac{AA_1 \cdot BB_1}{AB_1 \cdot A_1B} = \arccos\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$$

由以上两例可见,在实际问题处理过程中,若能充分利用几何体的特征构造恰当的"三垂型",可以简化对几何形体的解析和复杂的运算过程,从而提高解答问题的速度和准确率.

性质3 对棱所成的角中:(1)AB 和 CD 垂直;(2)BC 和 BC 的对棱 AD 所成的角为 $\arccos\frac{BC}{AD}$;(3)两斜棱 AC 和 BD 所成角为 $\arccos\frac{BC^2}{AC \cdot BD}$.

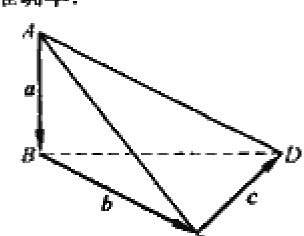


图5

以下给出(2)和(3)的证明,如图5,设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$,它们的模分别为 a、b、c.则 $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$,若 BC 和 AD 所成的角为 θ,则

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{|\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})|}{|\boldsymbol{b}| \cdot |(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})|} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2 + a^2}} = \frac{BC}{AD}$$

所以 $\theta = \arccos \dfrac{BC}{AD}$.

而$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}$,若 AC 和 BD 所成角为 φ,则有

$$\cos\varphi = \frac{|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})|}{|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})|\cdot|(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})|} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{BC^2}{AC\cdot BD}$$

所以
$$\varphi = \arccos\frac{BC^2}{AC\cdot BD}$$

注 这种方法选择基底,利用向量求异面直线所成角值得关注.

【例4】 (2007年高考全国卷Ⅰ理科第7题)如图6,正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$,$AA_1 = 2AB$,则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为(　　)

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

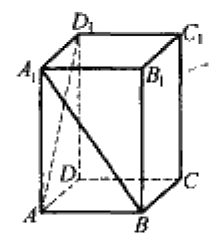


图6

解析 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,D_1A_1、A_1A、AB 所在的四面体 D_1A_1AB 是"三垂型",A_1B 和 AD_1 是其两条斜棱,设它们成的角是 θ,由性质3知 $\cos\theta = \dfrac{AA_1^2}{AD_1\cdot A_1B} = \dfrac{4}{5}$.故选D.

【例5】 (2007年高考上海卷文科第7题)如图7,在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,$\angle ACB = 90°$,$AA_1 = 2$,$AC = BC = 1$,则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的大小为________.

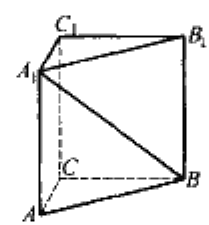


图7

解析 由条件知,四面体 A_1ACB 为"三垂型",设 AC 和 A_1B 所成的角为 θ,由性质3知 $\cos\theta = \dfrac{AC}{A_1B} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$,所以 $\theta = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

性质4 对棱间的距离:(1)首尾两节间的距离为为中节长 $|BC|$;

(2) BC 和其对棱 AD 间的距离为 $\dfrac{|AB|\cdot|CD|}{\sqrt{|AB|^2+|CD|^2}}$;

(3)两斜棱间距离为 $\dfrac{|BC|\cdot|CD|}{|BD|}$.

证明 如图8,建立坐标系,设 $|AB| = a$,$|BC| = b$,$|CD| = c$.则 $B(b,0,0)$,$D(0,c,0)$,$A(b,0,a)$,所以,$\overrightarrow{CB} = (b,0,0)$,$\overrightarrow{DA} = (b,-c,a)$,设 $\boldsymbol{n}_1 = (x,1,y)$,且 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{CB}$,$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DA}$,则 $\begin{cases} bx = 0 \\ bx - c + ay = 0 \end{cases}$ 得 $x = 0$,$y = \dfrac{c}{a}$,即 $\boldsymbol{n}_1 = (0,1,\dfrac{c}{a})$,$\overrightarrow{CD} = (0,c,0)$,所以 BC 和 AD 间的距离为

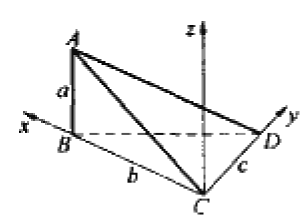


图8

$$\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}_1|} = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{|AB|\cdot|CD|}{\sqrt{|AB|^2+|CD|^2}}$$

同理可得 CA 和 BD 间的距离为

$$\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{|BC|\cdot|CD|}{|BD|}$$

【例6】 (根据2007年高考重庆卷理科第19题改编而成)如图9,在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,$AA_1 = 2$,$AB = 1$,$\angle ABC = 90°$,点 D、E 分别在 BB_1、A_1D 上,且 $B_1E\perp A_1D$,四棱锥 $C - ABDA_1$ 与之三棱柱的体积之比为 $3:5$.

(Ⅰ)求异面直线 DE 与 B_1C_1 的距离;

(Ⅱ)若 $BC = \sqrt{2}$,求二面角 $A_1 - DC_1 - B_1$ 的正切值;

(Ⅲ)若 $BC = \sqrt{2}$,求异面直线 B_1E 与 C_1D 之间的距离.

解析 设 BD 的长度为 x，则四棱锥 $C-ABDA_1$ 的体积

$$V_1=\frac{1}{3}S_{四边形ABDA_1}\cdot BC$$

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积

$$V_2=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot AA_1=BC$$

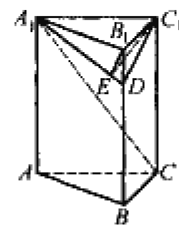


图 9

因为 $V_1:V_2=3:5$，即 $\frac{1}{6}(x+2)=\frac{3}{5}$，得 $x=\frac{8}{5}$，所以 $B_1D=\frac{2}{5}$. 联结 C_1E，在四面体 C_1B_1ED 中 C_1B_1、B_1E、ED 两两垂直，所以四面体 C_1B_1ED 是"三垂型".

（Ⅰ）由性质 4(1) 知，B_1C_1 和 DE 之间的距离为线段 B_1E 的长，在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1D$ 中

$$B_1E=\frac{A_1B_1\cdot B_1D}{\sqrt{A_1B_1^2+B_1D^2}}=\frac{1\times\frac{2}{5}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{5}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{29}}{29}$$

（Ⅱ）若 $BC=\sqrt{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1ED$ 中

$$DE=\sqrt{B_1D^2-B_1E^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)^2}=\frac{4\sqrt{29}}{145}$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1B_1E$ 中

$$C_1E=\sqrt{C_1B_1^2+B_1E^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)^2}=\sqrt{\frac{62}{29}}$$

二面角 A_1-DC_1-B 是以 DC_1 为棱的二面角，设其大小为 θ，由性质 2(2) 知

$$\cos\theta=\frac{DE\cdot B_1C_1}{B_1D\cdot C_1E}=\frac{\frac{4\sqrt{29}}{145}\times\sqrt{2}}{\frac{2}{5}\times\sqrt{\frac{62}{29}}}=\frac{2\sqrt{31}}{31}$$

所以

$$\tan\theta=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

（Ⅲ）在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1B_1D$ 中

$$C_1D=\sqrt{2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$$

由性质 4(2) 知，B_1E 和 C_1D 间的距离为

$$\frac{B_1E\cdot C_1D}{\sqrt{B_1E^2+C_1D^2}}=\frac{\frac{2\sqrt{29}}{29}\times\frac{3\sqrt{6}}{5}}{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{6}}{5}\right)^2}}=\frac{6\sqrt{51}}{119}$$

以上列出的只是"三垂型"这类四面体的 4 条主要性质，其他性质如表面积、体积、点到面的距离、每条棱与其相交面所成的角等，都与"三垂型"对应的三条线段的长度有关，关键是利用好它们之间的垂直关系. 在解决问题的过程中，若能恰当构造出这种模型，定能给解题带来很大的便利. 同时我们也真正体会到了深挖教材习题功能，是搞好数学常规教学不可忽视的一条重要途径.

(十九)一道高考立体几何题的深层探究

2008年高考数学安徽卷理科第18题(文科第19题)如下:

如图1,在四棱锥 $O-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是四边长为1的菱形,$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$,$OA\perp$ 底面 $ABCD$,$OA=2$,M 为 OA 的中点,N 为 BC 的中点.

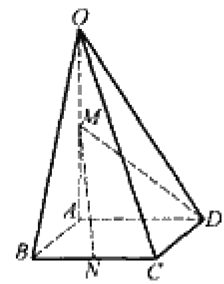


图1

(Ⅰ)(理科)证明:直线 MN // 平面 OCD;

(Ⅱ)(文、理)求异面直线 AB 与 MD 所成角的大小;

(Ⅲ)(文、理)求点 B 到平面 COD 的距离.

1.关于问题设置的探究

(1)文字简洁,表述清晰

这道题的文字和符号,理科共77个,文科共66个,阅读完全题用时大概40秒左右.这样可以减少考生的阅读量,把全卷2个小时的应试时间,更多地让位于思维,使考生思维驰骋的时空更加充裕.

(2)自然质朴,回归本源

① 以熟悉的静态四棱锥为载体,避开了流行的"展开"、"折叠"、"结合"等不规则几何体;也没有追求动态的"探索"、"空间轨迹"等问题.

② 没有"在知识的交汇点处"命题,回归到空间元素的数量关系和位置关系研究这两个立体几何的基本问题上来,用"纯立体几何问题"强化空间想象能力的考查.

这样一来,呈现在考生面前的是一道背景熟悉、问题典型、亲切朴素的"立体几何"试题.改变了愈演愈烈地给立体几何试题赋予太多考查功能,而使问题变得面目可畏的局面,体现了对考生的人文关怀.

(3)正视差别,区分文理

文科与理科考生的数学素质不同,在该题的命制上,正视了这种差别,抓住考查的重点,恰当地把握难易程度的取舍,空间元素位置关系的判断和推理对文科考生不作要求.

(4)方法多样,解法典型

无论是理科的线面平行的判定,还是文理兼有的角和距离的求解;既可利用传统解法,也可利用向量解法,是一道典型的立体几何学习和复习的实例.

2.关于问题解法的探究

由于空间向量进入高中数学教材已有多年,所以近几年立体几何命题一直呈现出"一题两法"的新局面,使问题的解法丰富多样,精彩纷呈.我们以第(Ⅰ)问为重点,对问题的解法给以分析,以期给立体几何的学习和复习带来一些启示.

第(Ⅰ)问

传统解法

解法1 构造线线平行证明线面平行.

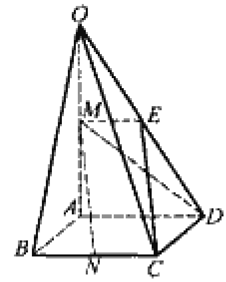


图2

思考1 如图2,取 OD 的中点 E,联结 ME、CE,因为 $ME \parallel AD$,$CN \parallel AD$,且 $ME = \frac{1}{2}AD = CN$,所以四边形 $MECN$ 是平行四边形,所以 $MN \parallel CE$,而 $CE \subseteq$ 平面 OCD,所以 $MN \parallel$ 平面 OCD.

思考2 如图3,联结 AN 并延长交 DC 延长线于 F,因为 M 为 OA 的中点,N 为 BC 的中点,因为 $\triangle OAF$ 中,$MN \parallel OF$,而 $OF \subseteq$ 平面 OCD,所以 $MN \parallel$ 平面 COD.

解法2 构造面面平行证明线面平行.

思考1 如图4,取 AD 的中点 G,联结 MG、NG,易证平面 $MNG \parallel$ 平面 OCD,所以 $MN \parallel$ 平面 OCD.

思考2 如图5,取 OB 的中点 H,联结 MH、NH,易证平面 $MHN \parallel$ 平面 OCD,所以 $MN \parallel$ 平面 OCD.

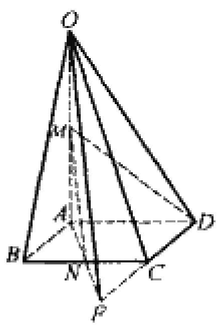


图3

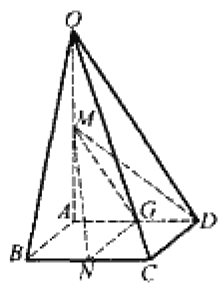


图4

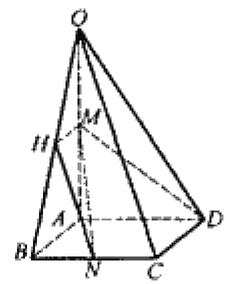


图5

向量解法

解法1 选基底,利用向量运算.

令 $\overrightarrow{AO} = \boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$、$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{c}$,则

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\boldsymbol{c} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}$$

所以 $MN \parallel$ 平面 OCD.

解法2 建立坐标系,利用向量的坐标运算.

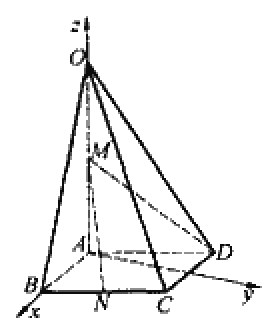


图6

思考1 利用平面的法向量,作 $AP \perp CD$ 于 P,如图6所示,分别以 AB、AP、AO 为 x、y、z 轴建立直角坐标系,则有 $A(0,0,0)$、$B(1,0,0)$、$P(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0)$、$D(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$、$O(0,0,2)$,$M(0,0,1)$、$N(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},0)$,则 $\overrightarrow{MN} = (1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-1)$,$\overrightarrow{OP} = (0,\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$,$\overrightarrow{OD} = (-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-2)$.设平面 OCD 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$,则

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{OP} = 0, \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$$

即

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2z = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2z = 0 \end{cases}$$

取 $z=\sqrt{2}$，解得 $\boldsymbol{n}=(0,4,\sqrt{2})$，因为 $\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4},-1\cdot(0,4,\sqrt{2})\right)=0$，所以 MN // 平面 OCD.

思考 2 利用共面向量定理.

设 $\overrightarrow{MN}=\lambda_1\overrightarrow{OP}+\lambda_2\overrightarrow{OD}$，由解法 2 的思考 1 中所求坐标得

$$\begin{cases}1-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1\\ \frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_2\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\lambda_1=\sqrt{2}\\ \lambda_2=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\sqrt{2}\,\overrightarrow{OP}+(\frac{1}{2}-\sqrt{2})\overrightarrow{OD}$，所以 MN // 平面 OCD.

点评 (1) 线线、线面、面面的平行是相辅相成的，可以相互转化，本题要证的线面平行处于中心地位，联系着另外两种平行关系.

(2) 对于向量解法：① 可以直接利用向量运算的运算法则，亦可建立坐标系利用向量的坐标运算进行；② 对于证明线面平行，要用共面向量定理；③ 空间元素位置关系的判断用向量的方法，达不到方法上的优化，反而显得冗繁.

第(Ⅱ)问

传统解法

因为 CD // AB，所以 $\angle MDC$ 为异面直线 AB 和 MD 所成的角(或其补角). 如图7，作 $AP\perp CD$ 于 P，联结 MP，因为 $OA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $CD\perp MP$，因为 $\angle ADP=\frac{\pi}{4}$，所以 $DP=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$MD=\sqrt{MA^2+AD^2}=\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle MDP=\frac{DP}{MD}=\frac{1}{2}$，$\angle MDC=\angle MDP=\frac{\pi}{3}$，所以 AB 和 MD 所成角大小为 $\frac{\pi}{3}$.

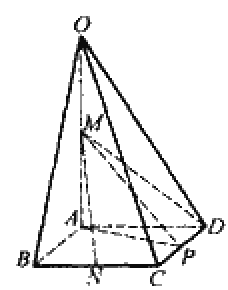


图 7

向量解法

解法 1 因为 $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DM}$，所以

$$\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{DC}^2+\overrightarrow{DM}^2-2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DM}$$

而
$$\overrightarrow{MC}^2=\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{AC}^2=3-\sqrt{2},\overrightarrow{DC}^2=1,\overrightarrow{DM}^2=2$$

所以
$$3-\sqrt{2}=1+2-2\sqrt{2}\cos\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DM}\rangle$$

则
$$\cos\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DM}\rangle=\frac{1}{2},\langle\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DM}\rangle=\frac{\pi}{3}$$

所以 AB 和 DM 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$.

解法 2 设 AB 与 MD 所成的角为 θ，因为 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，所以

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{MD}|}=\frac{1}{2}$$

所以 AB 和 MD 所成角大小为 $\frac{\pi}{3}$.

第(Ⅲ)问

传统解法

因为 AB // 平面 COD，所以点 A 和点 B 到平面 OCD 的距离相等，由第(Ⅱ)问解法 1 知，平面 $OAP\perp$ 平面 COD，如图 8 所示在 $\triangle OAP$ 内. 过 A 作 $AQ\perp OP$，垂足为 Q，则 AQ 的长即为所求. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADP$ 中，

$AP = DP = \frac{\sqrt{2}}{2}$，在 Rt△$OPD$ 中，可求 $OP = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 Rt△OAP 中，$AQ = \frac{OA \cdot AP}{OP} = \frac{2}{3}$，即 B 到平面 OCD 的距离为$\frac{2}{3}$.

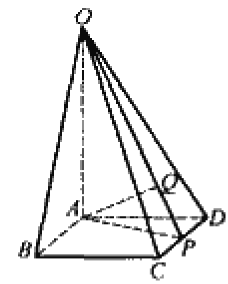


图 8

向量解法

设点 B 到平面 OCD 的距离为 d，则 d 为$\overrightarrow{OB}$ 在平面 OCD 法向量 $\boldsymbol{n} = (0,4,\sqrt{2})$ 上的投影的绝对值，由$\overrightarrow{OB} = (1,0,-2)$，得 $d = \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{2}{3}$.

所以点 B 到平面 OCD 的距离为$\frac{2}{3}$.

点评 空间量的求解若用向量解法显然简洁，但并不是认识和方法上的简单. 应该辩证地看待这一问题，一是传统解法对论证的要求较高，运算相对简单；二是向量解法对论证的要求不高，但必须具备较强的运算能力. 无论怎样，两种方法对空间想象能力、逻辑推理能力的要求是几乎同等的，这正是立体几何试题所要考查的根本点.

3. 关于问题探究的启示

(1) 对于命题的启示

① 应在回归中强化对考生空间想象能力、逻辑推理能力、运算能力的考查，没必要赋予立体几何试题太多的考查功能，让立体几何试题面目全非、喧宾夺主，失去其本来所具有的"几何"特征.

② 抓住立体几何的核心内容，如线面关系的判断(常与命题、充要条件等融合)和论证，空间角(3 种)与距离(8 种)的求解，体积及面积的计算. 对于近几年高考中的一些热点、重点的问题也要特别关注，如球面距离的考查(2007 年高考安徽卷文 10、理 8；福建卷理 10，江西卷文 9，四川卷文、理 6，2008 年安徽卷文、理 16 等)、2006 年高考悄然兴起的空间轨迹的考查，在经历了 2007 年高考的沉寂后，2008 年高考又有所回头. 这类问题新颖别致，灵活多变，但不能一味追求热点、难点，这样势必使立体几何的教学和学习呈现舍本逐末的局面. 值得我们注意的是高考试题不仅具有考查、选拔和甄别的功能，同时还对教学有着很强的导向作用.

(2) 对于解题的启示

准确地理解题目的条件、合理作图、问题的转化、传统方法、向量方法、简洁的描述等，这些处理立体几何问题的基本思想方法，是通过对该问题解法分析所收获的一个显性的成果.

(3) 对于教学的启示

考题的特点在教学中不容置之不理，这并不是以考论教的狭隘观点，相反考题所蕴含的信息却是教学取之不尽的有效资源. 本题的探究可以给我们的教学以下启示：抓住立体几何的核心内容，重在揭示其本质；对于方法而言，应综合传统解法和向量解法齐头并重，没必要强此弱彼；没必要追逐所谓的热点、难点，应追求全面综合地提高.

（二十）破解高中几何中的最值问题

作为反映实践数量关系及几何图形性质的数学中，最值问题是中学数学的重要内容之一，它分布在各知识点，各个知识水平层面，以最值为载体，可以考查中学数学的所有知识点，考查分类讨论、数形结合、转化与化归等诸多数学思想和方法，还可以考查学生的思维能力、实践和创新能力. 因此，它在高考中占有比较重要的地位.

从近几年的高考题型来看，最值问题大多数是一道填空题或选择题，一道解答题；从分值来看，约占总分的10%左右；从考查内容的热点来看，越来越多地将最值问题蕴含在立体几何、解析几何中考查. 由此看来，最值问题虽然是个老问题，但一直十分活跃，尤其是导数的引入，更是为最值问题的研究注入了新的活力. 可以预见，今后各地高考数学命题中，有关最值问题的题型、题量、分值将保持稳定，题目的背景会更贴近学生的实际生活，更加关注社会热点问题，难度不会太大.

为更好地做好最值问题的复习，以下精选典型例题，谈谈几何学中最值问题的处理策略.

(1) 总体思路

几何学中的最值问题与几何图形的性质相关联，常常通过画图、几何变换和利用几何中不等量的关系来求解，也可以建立函数关系，把几何问题转化为代数问题（即代数化）进行求解等.

(2) 要点导读

立体几何主要研究空间点、线、面之间的位置关系，与空间图形有关的线段、角、体积等最值问题常常在试题中出现. 立体几何中的最值问题的解法要通过对图形中几何元素之间的数量关系的分析，选择一个恰当的量（角、线段等）作为自变量，建立表示因变量（面积、体积等）的函数表达式，利用代数中的求函数最值的方法来求出最值，应特别注意自变量的选取对于解题的难易程度有较大的影响. 对于立体几何中的最值问题，经常要通过图形的变换，如平移、旋转、展开等方法，把立体图形转化为平面、代数或三角的问题来解决.

解析几何中的最值问题，是从动态角度来研究数学问题的主要内容，因而在高考中经常出现. 解析几何中最值的题型可分为用曲线定义或几何性质求最值；用三角函数求最值；用二次函数值域求最值；用二次方程根的判别式求最值和用算术平均值不小于几何平均值（均值定理）求最值等类型.

1. 化曲为直求最值

对于立体几何中的某些最值问题，可通过图形的变换，如平移、旋转、展开等方法，把立体图形化为平面问题来解决.

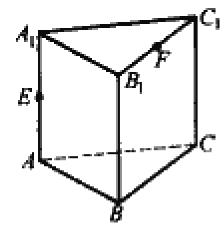


图 1

【例1】 如图1,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=BC=\sqrt{2}$,$BB_1=2$,$\angle ABC=90°$,E、F 分别为 AA_1、C_1B_1 的中点,沿棱柱的表面从 E 到 F 两点的最短路径的长度为________.

解析 将三棱柱侧面、底面展开有三种情形.

① 沿 AA_1 剪开、平铺,使平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 重合,此时

$$EF=\sqrt{A_1E^2+A_1F^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

②沿 A_1C_1、B_1C_1 剪开、平铺,使平面 $A_1B_1C_1$ 与平面 ABB_1A_1 重合,此时

$$EF=\sqrt{EG^2+FG^2}=\frac{\sqrt{14+4\sqrt{2}}}{2}$$

③ 沿 A_1B_1、B_1C_1 剪开、平铺,使平面 $A_1B_1C_1$ 与平面 ACC_1A_1 重合,此时

$$EF=\sqrt{EG^2+FG^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

通过比较知 E 沿平面 ACC_1A_1 过棱 A_1C_1 到点 F 路径最短,其值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

点评 在求表面上两点间的最短距离问题时,常常把立体图形按不同方向展开,通过各种侧面展开图的结果来比较.

例题链接 如图2,已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为1,高为8,一质点自点 A 出发,沿着三棱柱的侧面绕行两周到达点 A_1 的最短路线的长为________.

解析 将正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 沿侧棱 CC_1 剪开、拼接,其侧面展开图如图3所示,由图中路线可得最短路线的长为 $\sqrt{6^2+8^2}=10$.

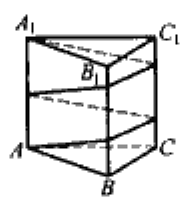
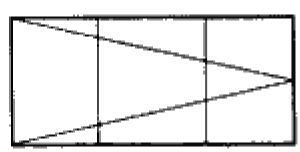


图 2


图 3

2.利用割补思想求最值

根据解题需要,将所给图形进行重新构造(割形、补形),也是研究几何最值的一种好方法.

【例2】 有两个相同的直三棱柱,如图4所示,高为 $\frac{2}{a}$,底面三角形的三边长分别为 $3a$、$4a$、$5a(a>0)$.用它们拼成一个三棱柱或四棱柱,在所有可能的情况中,全面积最小的是一个四棱柱,则 a 的取值范围是________.

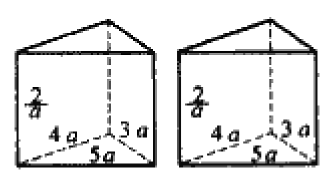


图 4

解析 两个相同的直三棱柱并排放拼成一个三棱柱或四棱柱,有三种情况.

① 四棱柱有一种,就是边长为 $5a$ 的边重合在一起,表面积为 $24a^2+28$.

② 三棱柱有两种,边长为 $4a$ 的边重合在一起,表面积为 $24a^2+32$.

③ 边长为 $3a$ 的边重合在一起,表面积为 $24a^2+36$.

两个相同的直三棱柱竖直放在一起,有一种情况,表面积为 $12a^2+48$.

最小的是一个四棱柱,这说明 $24a^2+28<12a^2+48 \Rightarrow 12a^2<20 \Rightarrow 0<a<\frac{\sqrt{15}}{3}$.

点评 本题主要考查有关多面体的拼接、全面积等知识.注意拼成四棱柱时,欲使全面积最小,需把两面积最大的侧面接合.

注 将平面图形空间化也是立体几何的另一种问题形式,在立体几何中,许多问题都是空间图形进行平面化,努力将一个个空间图形,通过所学的几何知识,转化成平面图形,最后使用平面几何的若干知识解决,而本题却反其道而行之,所以在做法上就不能和上述的方法相同,但在本质上有许多相通之处,在这类题目中,尽量找出两者图形过程中的联系之处,哪些量变了,哪些量没有变,然后解决起来,就会顺手得多.

3.用曲线定义、图形、范围和性质求最值

有些几何最值问题可先利用圆锥曲线的定义、图形、范围或性质给出关系式,再利用几何方法或代数方法求最值.这样可使题目中的数量关系更直观,解题方法更简洁.

【例3】 P 是双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的右支上一点,M、N 分别是圆 $(x+5)^2+y^2=4$ 和 $(x-5)^2+y^2=1$ 上的点,则 $|PM|-|PN|$ 的最大值为(　　)

A.6　　B.7　　C.8　　D.9

解析 设双曲线的两个焦点分别是 $F_1(-5,0)$ 与 $F_2(5,0)$,则这两点正好是两圆的圆心,当且仅当点 P 与 M、F_1 三点共线以及 P 与 N、F_2 三点共线时所求的值最大,此时 $|PM|-|PN|=(|PF_1|-2)-(|PF_2|-1)=10-1=9$,故选 D.

点评 利用圆锥曲线的性质求最值是一种特殊方法,技巧性虽强,但可以避繁就简,化难为易,使思路清晰,过程简洁.

例题链接 1.抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是(　　)

A.$\frac{4}{3}$　　B.$\frac{7}{5}$　　C.$\frac{8}{5}$　　D.3

解析 通过直线 $4x+3y-8=0$ 平移与抛物线 $y=-x^2$ 相切,设切线为 $4x+3y+b=0$,与 $y=-x^2$ 联立消去 y 得 $3x^2-4x-b=0$,令此方程中的 $\Delta=0$,得 $b=-\frac{4}{3}$,所以切线方程为 $4x+3y-\frac{4}{3}=0$,则切点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离最小值即为两直线间的距离,即 $d=\frac{\left|-8+\frac{4}{3}\right|}{5}=\frac{4}{3}$.

2.如图5,B 地在 A 地的正东方向 4 km 处,C 地在 B 地的北偏东 30° 方向 2 km 处,河流的沿岸 PQ(曲线)上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2 km.现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头,向 B、C 两地转运货物.经测算,从 M 到 B、M 到 C 修建公路的费用分别是 a 万元/km、$2a$ 万元/km,那么修建这两条公路的总费用最低是(　　)

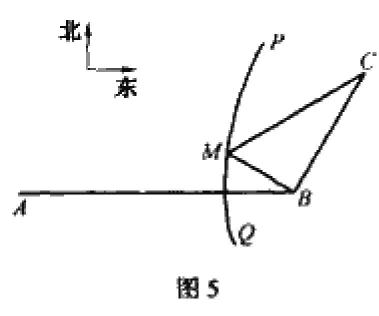


图5

A.$(2\sqrt{7}-2)a$ 万元　　B.$5a$ 万元

C.$(2\sqrt{7}+1)a$ 万元　　D.$(2\sqrt{3}+3)a$ 万元

解析 首先将实际问题转化为解析几何问题,然后利用双曲线的标准方程及第二定义转化为所熟悉的平面几何问题,设总费用为 y 万元,则 $y=a\cdot MB+2a\cdot MC$,因为河流的沿岸 PQ(曲线)上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2 km,所以曲线 PG 是双曲线的一支,B 为焦点,且 $a=1,c=2$.

过 M 作双曲线的焦点 B 对应的准线 l 的垂线,垂足为 D(图6).由双曲线的第二定义,得 $\frac{MB}{MD}=e$,即 $MB=2MD$,所以

$$y=a\cdot 2MD+2a\cdot MC=2a\cdot(MD+MC)\geqslant 2a\cdot CE$$

其中 CE 是点 C 到准线 l 的垂线段.

因为 $CE = GB + BH = (c - (-\frac{a^2}{c})) + BC \cdot \cos 60° = (2 - \frac{1}{2}) + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$，所以 $y \geqslant 5a$(万元). 故选 B.

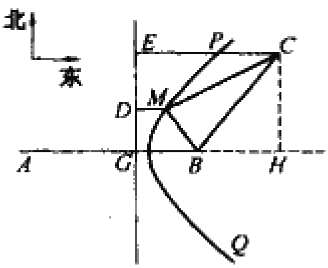


图 6

3. 已知点 $M(-2,0)$、$N(2,0)$，动点 P 满足条件 $|PM| - |PN| = 2\sqrt{2}$，记动点 P 的轨迹为 W.

(Ⅰ)求 W 的方程；(Ⅱ)若 A、B 是 W 上的不同两点，O 是坐标原点，求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的最小值.

解 (Ⅰ)由 $|PM| - |PN| = 2\sqrt{2}$ 知动点 P 的轨迹是以 M、N 为焦点的双曲线的右支，实半轴长 $a = \sqrt{2}$，又半焦距 $c = 2$，故虚半轴长 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2}$，所以 W 的方程为 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1, x \geqslant \sqrt{2}$.

(Ⅱ)设 A、B 的坐标分别为 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)，当 $AB \perp x$ 轴时，$x_1 = x_2$，从而 $y_1 = -y_2$，从而

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1^2 - y_1^2 = 2$$

当 AB 与 x 轴不垂直时，设直线 AB 的方程为 $y = kx + m$，与 W 的方程联立，消去 y 得

$$(1 - k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 2 = 0$$

故

$$x_1 + x_2 = \frac{2km}{1 - k^2}, x_1x_2 = \frac{m^2 + 2}{k^2 - 1}$$

所以

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{(1 + k^2)(m^2 + 2)}{k^2 - 1} + \frac{2k^2m^2}{1 - k^2} + m^2 = \frac{2k^2 + 2}{k^2 - 1} = 2 + \frac{4}{k^2 - 1}$$

又因为 $x_1x_2 > 0$，所以 $k^2 - 1 > 0$，从而 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 2$. 综上，当 $AB \perp x$ 轴时，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 取得最小值 2.

4. 利用函数的性质求最值

有些几何最值问题，可先转化成函数问题，然后利用函数的单调性、有界性等性质求最值.

【例 4】 请你设计一个帐篷. 它下部的形状是高为 1 m 的正六棱柱，上部的形状是侧棱长为 3 m 的正六棱锥，如图 7 所示. 试问当帐篷的顶点 O 到底面中心 O_1 的距离为多少时，帐篷的体积最大？

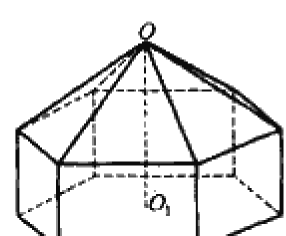


图 7

解 设 OO_1 为 x m，则 $1 < x < 4$.

由题设可得正六棱锥底面边长为

$$\sqrt{3^2 - (x - 1)^2} = \sqrt{8 + 2x - x^2}$$

故底面正六边形的面积为

$$6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{8 + 2x - x^2})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (8 + 2x - x^2)$$

帐篷的体积为

$$V(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}(8 + 2x - x^2)\left[\frac{1}{3}(x - 1) + 1\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}(16 + 12x - x^3)$$

求导得 $V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(12 - 3x^2)$. 令 $V'(x) = 0$，解得 $x = -2$(不合题意，舍去)，$x = 2$.

当 $1 < x < 2$ 时，$V'(x) > 0$，$V(x)$ 为增函数；

当 $2<x<4$ 时，$V'(x)<0$，$V(x)$ 为减函数.

所以当 $x=2$ 时，$V(x)$ 最大.

点评　本题主要考查利用导数研究函数的最值的基础知识，以及运用数学知识解决实际问题的能力，关于帐篷体积的最大值就是要先将体积表达式求解出来，然后用导数知识加以解决.

【例5】 在平面直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$ 的长为2，宽为1，AB、AD 边分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，点 A 与坐标原点重合，如图8所示. 将矩形折叠，使点 A 落在线段 DC 上.

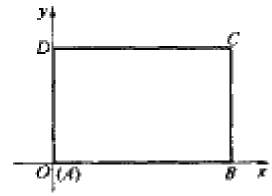


图8

（Ⅰ）若折痕所在直线的斜率为 k，试写出折痕所在直线的方程；

（Ⅱ）求折痕的长的最大值.

解　（Ⅰ）① 当 $k=0$ 时，此时点 A 与点 D 重合，折痕所在的直线方程 $y=\frac{1}{2}$.

② 当 $k\neq 0$ 时，设点 A 落在线段 DC 上的点 $A'(x_0,1)(0\leqslant x_0\leqslant 2)$，则直线 OA' 的斜率 $k_{OA'}=\frac{1}{x_0}$. 因为折痕所在直线垂直平分 OA'，所以 $k_{OA'}\cdot k=-1$，$\frac{1}{x_0}\cdot k=-1$，所以 $x_0=-k$，又因为折痕所在的直线与 OA' 的交点坐标（线段 OA' 的中点）为 $M(-\frac{k}{2},\frac{1}{2})$，所以折痕所在的直线方程 $y-\frac{1}{2}=k(x+\frac{k}{2})$，即

$$y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}$$

由①②得折痕所在的直线方程为

$$y=kx+\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2},\ -2\leqslant k\leqslant 0$$

（Ⅱ）折痕所在的直线与坐标轴的交点坐标为 $E\left(0,\frac{k^2+1}{2}\right)$、$F\left(-\frac{k^2+1}{2k},0\right)$.

由（Ⅰ）知，$k=-x_0$，因为 $0\leqslant x_0\leqslant 2$，所以 $-2\leqslant k\leqslant 0$，设折痕长度为 d，所在直线的倾斜角为 θ.

① 当 $k=0$ 时，此时点 A 与点 D 重合，折痕的长为2；

② 当 $-2\leqslant k<0$ 时，设 $a=-\frac{k^2+1}{2k}$，$b=\frac{k^2+1}{2}$.

当 $0<a\leqslant|AB|=2$ 时，l 与线段 AB 相交，此时 $-2\leqslant k\leqslant -2+\sqrt{3}$；

当 $a>|AB|=2$ 时，l 与线段 BC 相交，此时 $-2+\sqrt{3}<k<0$；

当 $0<b\leqslant 1$ 时，l 与线段 AD 相交，此时 $-1\leqslant k<0$；

当 $b>1$ 时，l 与线段 DC 相交，此时 $-2\leqslant k<-1$.

所以将 k 所在的分为3个子区间.

① 当 $-2\leqslant k<-1$ 时，折痕所在的直线 l 与线段 DC、AB 相交，折痕的长

$$d=\frac{1}{|\sin\theta|}=\frac{1}{\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{|k|}=\sqrt{\frac{1}{k^2}+1}$$

所以

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant d<\sqrt{2}$$

② 当 $-1\leqslant k\leqslant -2+\sqrt{3}$ 时，折痕所在的直线 l 与线段 AD、AB 相交，折痕的长

$$d=\sqrt{\left(-\frac{1+k^2}{2k}\right)^2+\left(\frac{1+k^2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{k^4}{4}+\frac{3k^2}{4}+\frac{1}{4k^2}+\frac{3}{4}}$$

令 $g'(x)\geqslant 0$，即 $k^3+\frac{3k}{2}-\frac{1}{2k^3}\geqslant 0$，即 $2k^6+3k^4-1\leqslant 0$，即 $(k^2+1)^2(k^2-\frac{1}{2})\leqslant 0$，因为 $-1\leqslant k\leqslant$

$-2+\sqrt{3}$，所以解得 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant k \leqslant -2+\sqrt{3}$.

令 $g'(x) \leqslant 0$，解得 $-1 \leqslant k \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$，故当 $-1 \leqslant k \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$g(x)$ 是减函数，当 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant k \leqslant -2+\sqrt{3}$ 时，$g(x)$ 是增函数，因为

$$g(-1)=2, g(-2+\sqrt{3})=4(8-4\sqrt{3})$$

所以
$$g(-1)<g(-2+\sqrt{3})$$

所以当 $k=-2+\sqrt{3}$ 时

$$g(-2+\sqrt{3})=4(8-4\sqrt{3})$$

$$d=\sqrt{g(-2+\sqrt{3})}=2\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

所以当 $-1 \leqslant k \leqslant -2+\sqrt{3}$ 时，$d \leqslant 2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

③ 当 $-2+\sqrt{3}<k<0$ 时，折痕所在的直线 l 与线段 AD、BC 相交，折痕的长

$$d=\frac{2}{|\cos\theta|}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}}=2\sqrt{1+k^2}$$

所以
$$2<d<2\sqrt{8-4\sqrt{3}}$$

即
$$2<d<2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

综上所述得，当 $k=-2+\sqrt{3}$ 时，折痕的长有最大值为 $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

点评 本题主要考查函数的导数、函数的单调性和极值、直线的方程等基础知识，以及分类与整合的数学思想方法，考查思维能力、运算能力、实践能力、创新意识. 虽然解答此题，抓住“对称”这一关键词，寻找对称点即可，但总体难度较大，特别是第(Ⅱ)问先抓极端求斜率范围等都是创新思维的体现.

例题链接 用长为 90 cm，宽为 48 cm 的长方形铁皮做一个无盖的容器，先在四角分别截去一个小正方形，然后把四边翻转 90° 角，再焊接而成(图 9)，问该容器的高为多少时，容器的容积最大?最大容积是多少?

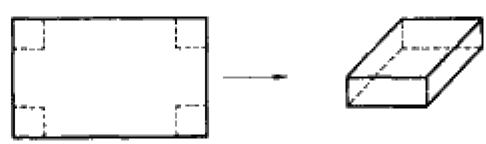


图 9

解析 设容器的高为 x，容器的体积为 V，则

$$V=x(90-2x)(48-2x)=4x^3-276x^2+4\,320x, 0<x<24$$

因为
$$V'=12x^2-552x+4\,320$$

由
$$V'=12x^2-552x+4320=0$$

得 $x_1=10, x_2=36$. 因为 $x<10$ 时，$V'>0$；$10<x<36$ 时，$V'<0$；$x>36$ 时，$V'>0$；所以，当 $x=10$，V 有极大值 $V(10)=19\,600$，又 $V(0)=0$，$V(24)=0$，所以当 $x=10$，V 有最大值 $V(10)=19\,600$.

5. 构造函数模型求最值

依据条件求出用一个参数表示的函数解析式，然后用相关方法求出限制条件下函数的最值，就可以得到问题的解(如表示成二次函数解析式 $f(x)=ax^2+bx+c$，再用配方法求其最值).

【例 6】 正方形 $ABCD$、$ABEF$ 的边长都是 1，而且平面 $ABCD$、$ABEF$ 互相垂直. 点 M 在 AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 $CM=BN=a(0<a<\sqrt{2})$.

(Ⅰ) 求 MN 的长；(Ⅱ) a 为何值时，MN 的长最小；(Ⅲ) 当 MN 的长最小时，求面 MNA 与面 MNB 所成二面角 α 的大小.

解　(Ⅰ)作 $MP \parallel AB$ 交 BC 于点 P,$NQ \parallel AB$ 交 BE 于点 Q,联结 PQ,依题意可得 $MP \parallel NQ$,且 $MP = NQ$,即 $MNQP$ 是平行四边形,所以 $MN = PQ$.由已知 $CM = BN = a$,$CB = AB = BE = 1$,所以

$$AC = BF = \sqrt{2}, CP = BQ = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$MN = PQ = \sqrt{(1 - CP)^2 + BQ^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}, 0 < a < \sqrt{2}$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)$MN = \sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}$,所以当 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

即当 M、N 分别为 AC、BF 的中点时,MN 的长最小,最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅲ)取 MN 的中点 G,联结 AG、BG,因为 $AM = AN$,$BM = BN$,G 为 MN 的中点,所以 $AG \perp MN$,$BG \perp MN$,即 $\angle AGB$ 即为二面角的平面角 α,又 $AG = BG = \frac{\sqrt{6}}{4}$,由余弦定理得

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4}} = -\frac{1}{3}$$

故所求二面角为 $\alpha = \pi - \arccos\frac{1}{3}$.

文中例 3 的例题链接 1 也可用此法解:设抛物线 $y = -x^2$ 上一点为 $(m, -m^2)$,该点到直线 $4x + 3y - 8 = 0$ 的距离为$\frac{|4m - 3m^2 - 8|}{5}$,当 $m = \frac{2}{3}$ 时,取得最小值为$\frac{4}{3}$,选 A.

例题链接　已知抛物线 $y^2 = 4x$,过点 $P(4,0)$ 的直线与抛物线相交于 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 两点,则 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值是________.

解析　过点 $P(4,0)$ 的直线方程可设为 $x = ky + 4$,由$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = ky + 4 \end{cases}$得 $y^2 - 4ky - 16 = 0$,则 $y_1^2 + y_2^2 = 16k^2 + 32$,当且仅当 $k = 0$ 时,$y_1^2 + y_2^2$ 有最小值为 32.

6. 利用不等式求最值

列出最值满足的关系式,利用平均值不等式中等号成立的条件求最值.

【例 7】　在平面直角坐标系 xOy 中,有一个以 $F_1(0, -\sqrt{3})$ 和 $F_2(0, \sqrt{3})$ 为焦点、离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆.设椭圆在第一象限的部分为曲线 C,动点 P 在 C 上,C 在点 P 处的切线与 x、y 轴的交点分别为 A、B,且向量$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.(Ⅰ)求点 M 的轨迹方程;(Ⅱ)求$|\overrightarrow{OM}|$的最小值.

解析　(Ⅰ)椭圆方程可写为$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$,式中 $a > b > 0$,且$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$得 $a^2 = 4$,$b^2 = 1$,所以曲线 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1(x > 0, y > 0)$,$y = 2\sqrt{1 - x^2}(0 < x < 1)$,$y' = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

设 $P(x_0, y_0)$,因点 P 在 C 上,有 $0 < x_0 < 1$,$y_0 = 2\sqrt{1 - x_0^2}$,$y'\big|_{x = x_0} = -\frac{4x_0}{y_0}$,得切线 AB 的方程为

$$y = -\frac{4x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0$$

设 $A(x,0)$ 和 $B(0,y)$，由切线方程得 $x=\frac{1}{x_0}, y=\frac{4}{y_0}$，由 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 得 M 的坐标为 (x,y)，由 x_0, y_0 满足 C 的方程，得点 M 的轨迹方程为

$$\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1, x>1, y>2$$

（Ⅱ）因为

$$|\overrightarrow{OM}|^2=x^2+y^2, y^2=\frac{4}{1-\frac{1}{x^2}}=4+\frac{4}{x^2-1}$$

所以
$$|\overrightarrow{OM}|^2=x^2-1+\frac{4}{x^2-1}+5\geqslant 4+5=9$$

且当 $x^2-1=\frac{4}{x^2-1}$，即 $x=\sqrt{3}>1$ 时，上式取等号，故 $|\overrightarrow{OM}|$ 的最小值为 3.

另类思维

解法 1　借助三角换元消去 x、y，设 $\frac{1}{x^2}=\cos^2\theta, \frac{4}{y^2}=\sin^2\theta, \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $x^2=\sec^2\theta, y^2=4\csc^2\theta$，所以

$$|\overrightarrow{OM}|^2=\sec^2\theta+4\csc^2\theta=1+\tan^2\theta+4(1+\cot^2\theta)=5+\tan^2\theta+4\cot^2\theta\geqslant 9$$

所以 $|\overrightarrow{OM}|^2$ 的最小值为 3.

解法 2　因为 $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}=1$，所以

$$|\overrightarrow{OM}|^2=x^2+y^2=(x^2+y^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}\right)=5+\frac{4x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\geqslant 5+4=9$$

以下同"基本思路".

点评　此题较往年要有新意，它体现了单题的综合性，重视数学知识的多元联系，在平面向量、函数、导数、圆锥曲线、曲线的切线、不等式等知识的交汇处设计试题，体现了知识的横向联系，多角度、多层次考查了考生的综合能力，可使不同层次的考生得以区分，是历年来最成功的题目之一.（Ⅱ）的解法 1 用三角代换简捷精炼，解法 2 实际上是用柯西不等式求极值，是一种很好的方法.

注　使用不等式求最值有时需用"配凑法"，要在训练过程中逐步掌握这种技巧，同时在使用均值不等式时要注意满足的三个条件：每一项均正，不等式一边为常数，等号能够成立.

例题链接　已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，A、B 是抛物线上的两动点，且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}(\lambda>0)$. 过 A、B 两点分别作抛物线的切线，设其交点为 M.

（Ⅰ）证明 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值；（Ⅱ）设 $\triangle ABM$ 的面积为 S，写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式，并求 S 的最小值.

解析　（Ⅰ）由已知条件，得 $F(0,1)$，$\lambda>0$. 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$. 由 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$，即得

$$(-x_1, 1-y)=\lambda(x_2, y_2-1)$$

$$\begin{cases}-x_1=\lambda x_2 & ①\\ 1-y_1=\lambda(y_2-1) & ②\end{cases}$$

将式①两边平方并把 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2, y_2=\frac{1}{4}x_2^2$ 代入得

$$y_1=\lambda^2 y_2 \quad ③$$

解式②③得 $y_1=\lambda, y_2=\frac{1}{\lambda}$，且有 $x_1x_2=-\lambda x_2^2=-4\lambda y_2=-4$，抛物线方程为 $y=\frac{1}{4}x^2$，求导得 $y'=\frac{1}{2}x$.

所以过抛物线上 A、B 两点的切线方程分别是

$$y=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)+y_1,y=\frac{1}{2}x_2(x-x_2)+y_2$$

即
$$y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2,y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$$

解出两条切线的交点 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},-1\right)$$

所以　$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},-2\right)\cdot(x_2-x_1,y_2-y_1)=\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)-2\left(\frac{1}{4}x_2^2-\frac{1}{4}x_1^2\right)=0$

所以$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$为定值,其值为0.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知在$\triangle ABM$中,$FM\perp AB$,因而

$$S=\frac{1}{2}|AB||FM|$$

$$|FM|=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_1x_2+4}=$$
$$\sqrt{y_1+y_2+\frac{1}{2}\times(-4)+4}=\sqrt{\lambda+\frac{1}{\lambda}+2}=\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

因为$|AF|$、$|BF|$分别等于A、B到抛物线准线$y=-1$的距离,所以

$$|AB|=|AF|+|BF|=y_1+y_2+2=\lambda+\frac{1}{\lambda}+2=\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^2$$

于是
$$S=\frac{1}{2}|AB||FM|=\left(\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)^3$$

由$\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\geqslant 2$知$S\geqslant 4$,且当$\lambda=1$时,$S$取得最小值4.

注　(1)本文例6中的例题链接也可用此法解:显然$x_1,x_2\geqslant 0$,又$y_1^2+y_2^2=4(x_1+x_2)\geqslant 8\sqrt{x_1x_2}$,当且仅当$x_1=x_2=4$时取等号,所以所求的值为32.

(2)本文例3中的例题链接3也可用此法解:

(Ⅰ)略.

(Ⅱ)设A、B的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2),则

$$x_i^2-y_i^2=(x_i+y_i)(x_i-y_i)=2,i=1,2$$

令$s_i=x_i+y_i,t_i=x_i-y_i$,则$s_it_i=2$,且$s_i>0,t_i>0(i=1,2)$,所以

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{4}(s_1+t_1)(s_2+t_2)+\frac{1}{4}(s_1-t_1)(s_2-t_2)=$$
$$\frac{1}{2}s_1s_2+\frac{1}{2}t_1t_2\geqslant\sqrt{s_1s_2t_1t_2}=2$$

当且仅当$s_1s_2=t_1t_2$,即$\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=-y_2\end{cases}$时"="成立,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的最小值是2.

(二十一)奥运中的排列组合与概率统计

排列、组合知识是学习概率的基础,概率与实际生活密切相关,它以独特的视角,特殊的思维方式,灵活的解题方法,广泛的实际应用,常常被各级各类命题者所青睐,成为每年高考必考内容之一.概率与统计的引入拓宽了应用问题取材的范围,概率的计算、离散型随机变量的分布列和数学期望的计算等内容都是考查学生实践能力的极好素材.新课程高考对这部分内容的考查力度较大,因这部分内容概念抽象,名词符号多,平时接触少,教师与学生均感陌生,故在复习备考中应切实掌握双基.

北京奥运会后以奥运为背景的排列组合与概率统计问题也成为高考命题的热点,应该予以足够的重视,下面举例说明.

1.与比赛项目有关的问题

(1) 射击

【例1】 在2008年北京奥运会的射击比赛中,假设甲、乙两人各进行一次射击,如果两人击中目标的概率都是0.8,计算:(Ⅰ)两人都击中目标的概率;(Ⅱ)其中恰有1人击中目标的概率;(Ⅲ)至少有一个人击中目标的概率.

解析 "两人都击中目标"是事件 $A\cdot B$;"恰有1人击中目标"是 $A\cdot\bar{B}$ 或 $\bar{A}\cdot B$;"至少有1人击中目标"是 $A\cdot B$ 或 $A\cdot\bar{B}$ 或 $\bar{A}\cdot B$,我们来记"甲射击一次,击中目标"为事件 A,"乙射击一次,击中目标"为事件 B.

(Ⅰ)显然,"两人各射击一次,都击中目标"就是事件:$A\cdot B$,又由于事件 A 与 B 互相独立,所以

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0.8\times0.8=0.64$$

(Ⅱ)"两人各射击一次,恰好有一人击中目标"包括两种情况:一种是甲击中乙未击中(即 $A\cdot\bar{B}$),另一种是甲未击中乙击中(即 $\bar{A}\cdot B$),根据题意这两种情况在各射击一次时不可能同时发生,即事件 $A\cdot\bar{B}$ 与 $\bar{A}\cdot B$ 是互斥的,所以所求概率为

$$P=P(A\cdot\bar{B})+P(\bar{A}\cdot B)=P(A)\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A})\cdot P(B)=$$
$$0.8\times(1-0.8)+(1-0.8)\times0.8=0.16+0.16=0.32$$

(Ⅲ)**解法1** "两人各射击一次,至少有一人击中目标"的概率为

$$P=P(A\cdot B)+[P(A\cdot\bar{B})+P(\bar{A}\cdot B)]=0.64+0.32=0.96$$

解法2 "两人都未击中目标"的概率是

$$P(\bar{A}\cdot\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-0.8)\times(1-0.8)=0.2\times0.2=0.04$$

所以至少有一个击中目标的概率为

$$P=1-P(\bar{A}\cdot\bar{B})=1-0.04=0.96$$

注 由(Ⅲ)可以看出,充分利用(Ⅰ)、(Ⅱ)两问的结果解题很简单,同时(Ⅲ)的解法2也告诉我们,即使不会解答(Ⅰ)、(Ⅱ),也可跳跃解出(Ⅲ).

(2) 田径

【例2】 在2008年北京奥运会中,甲、乙、丙三人要参加奥运跨栏比赛,先要进行体能测试,在

1 500 m 的体能测试中，甲、乙、丙三人各自通过测试的概率分别为$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{3}$，求：(Ⅰ)3 人都通过体能测试的概率；(Ⅱ) 只有 2 人通过体能测试的概率；(Ⅲ) 只有 1 人通过体能测试的概率.

解析　设 A 表示事件"甲通过体能测试"，B 表示事件"乙通过体能测试"，C 表示事件"丙通过体能测试". 由题意有 $P(A)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(C)=\frac{1}{3}$.

(Ⅰ) 设 M_1 表示"甲、乙、丙 3 人都通过体能测试"，即 $M_1=ABC$，由事件 A、B、C 相互独立，可得

$$P(M_1)=P(A)P(B)P(C)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

(Ⅱ) 设 M_2 表示事件"甲、乙、丙 3 人只有 2 人通过体能测试"，则

$$M_2=AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$$

由于事件 A、B、$\bar{C}$、A、$\bar{B}$、C、$\bar{A}$、B、C 均相互独立，并且事件 $AB\bar{C}$，$A\bar{B}C$，$\bar{A}BC$ 两两相互斥，因此所求的概率为

$$P(M_2)=P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC)=P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(C)=$$

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{23}{60}$$

(Ⅲ) 设 M_3 表示事件"甲、乙、丙 3 人只有 1 人通过体能测试" 则

$$M_3=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$$

由于 A、$\bar{B}$、$\bar{C}$、$\bar{A}$、B、$\bar{C}$、$\bar{A}$、$\bar{B}$、C 相互独立，并且事件 $A\bar{B}\bar{C}$、$\bar{A}B\bar{C}$、$\bar{A}\bar{B}C$ 两两互斥，所以所求的概率为

$$P(M_3)=P(A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C})=P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})+P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(\bar{C})=\frac{5}{12}$$

注　本题不仅用到概率乘法定理的推广，也用到了概率加法定理的推广，同时还涉及了对立事件的概率求法. 由此可知在求概率时，应充分分析事件的性质及事件之间的关系，力求用最简方法解题，并注重反思.

(3) 足球

【例 3】　在 2008 年北京奥运会中有技术相当的 30 个足球队进行淘汰赛争夺冠军，某些队首场轮空不参加第一轮比赛，试问：(Ⅰ) 首场轮空队能获得冠军的概率是多少?(Ⅱ) 某队从第一轮开始比赛，能获得冠军的概率是多少?(Ⅲ)(Ⅰ) 与(Ⅱ) 的概率的和表示什么?

解析　(Ⅰ) 完全淘汰赛必须有 32 个运动队参加，由于现在只有 30 个队，从而有 2 个队轮空，而且首场轮空队必须在以后 4 轮比赛中获胜才能争得冠军，因此所求概率等于$\frac{2}{30}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{240}$.

(Ⅱ) 有 28 个队从第 1 轮就开始比赛，他们必须在连续 5 轮比赛中获胜才能夺得冠军，因此，所求概率等于$\frac{28}{30}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{240}$.

(Ⅲ) 由于是否编入首场轮空队，这两事件是互不相容的，因此不管怎样，它们的和是获得冠军的概率，此概率等于$\frac{1}{240}+\frac{7}{240}=\frac{1}{30}$.

由于有 30 个运动队，因此，如果各队技术相当，获得冠军的概率显然都等于$\frac{1}{30}$.

注　淘汰赛必须有 2^n 个运动队参加，即应该有 $2^5=32$ 个队才能进行完全的比赛.

(4) 乒乓球

【例 4】　在 2008 年北京奥运会中，假设 A、B 两个代表队进行乒乓球对抗赛，每队 3 名队员，A 队队员是 A_1、A_2、A_3，B 队队员是 B_1、B_2、B_3，按以往多项比赛统计，对阵队员胜负概率如下：

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

按表中对阵方式出场，每场胜队得 1 分，负队得 0 分，设 A、B 队最后所得总分分别为 ξ、η.

（Ⅰ）求 ξ、η 的概率分布；（Ⅱ）求 $E\xi$、$E\eta$.

解析 （Ⅰ）ξ、η 的可能取值分别为 3，2，1，0，则

$$P(\xi=3)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{75}$$

$$P(\xi=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{28}{75}$$

$$P(\xi=1)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{30}{75}=\frac{2}{5}$$

$$P(\xi=0)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{75}=\frac{3}{25}$$

由于 $\xi+\eta=3$，所以

$$P(\eta=0)=P(\xi=3)=\frac{8}{75},\quad P(\eta=1)=P(\xi=2)=\frac{28}{75}$$

$$P(\eta=2)=P(\xi=1)=\frac{2}{5},\quad P(\eta=3)=P(\xi=0)=\frac{3}{25}$$

（Ⅱ）由（Ⅰ）

$$E\xi=3\times\frac{8}{75}+2\times\frac{28}{75}+1\times\frac{2}{5}+0\times\frac{3}{25}=\frac{22}{15}$$

因为 $\xi+\eta=3$，所以 $E\eta=3-E\xi=\frac{23}{15}$.

注 随机变量的期望和方差，对于解决实际生活中的问题很有现实意义，有时判断某事物的优劣，计算其期望就能区别出来，而有时仅靠期望不能完全说明随机变量的分布特征，此时就需研究其方差大小.

2. 与队员选派有关的问题

(1) 均匀分组问题

【例5】 假设2008年北京奥运会中有强弱不同的10支球队，若把他们均匀分为两组进行比赛，分别计算：（Ⅰ）两个最强的队被分在不同组内的概率；（Ⅱ）两个最强的队恰好在同一组内的概率.

解析 （Ⅰ）10 支球队均匀分为两组有 $\frac{1}{2}C_{10}^5$ 种分法，而两支最强队必分开的分法有 C_8^4 种，记"两最强队分开"的事件为 A，则

$$P(A)=\frac{C_8^4}{\frac{1}{2}C_{10}^5}=\frac{5}{9}$$

（Ⅱ）记"两强队分在同组"为事件 B，则 B 所包含的基本事件数为 $C_2^2C_8^3$ 种，于是

$$P(B)=\frac{C_2^2C_8^3}{\frac{1}{2}C_{10}^5}=\frac{4}{9}$$

注 解决均匀分组问题一定要分清组间是否有序，本题的基本事件是分法，即所分二组间是无序的，而不是求不同的组数，这是易错之处. 另外，对两个最强队而言，要么同组，要么不同组，二者必(只)居其一，故它们的概率和为 1，这显然是对立事件中的概率问题.

(2)"多面手"问题

【例 6】 假设在 2008 年北京奥运会中，我国先选派由 9 人组成的篮球队，其中 7 人善于打前锋，4 人善于打后卫，选出 5 人(3 名前锋，2 名后卫) 组队出场，有多少种组队方法.

解析 显然有 2 人既善于打前锋，又善于打后卫(多面手)，关键是按某种分类标准，把多面手分清楚. 按后卫分类，分 3 种情况：多面手中有 2 人都不打后卫，有 $C_2^2C_7^3$ 种；多面手中有 1 人打后卫，有 $C_2^1C_2^1C_6^3$；多面手中 2 人都打后卫，有 C_5^3 种；故共有 $C_2^2C_7^3 + C_2^1C_2^1C_6^3 + C_5^3 = 125$ 种方法.

【例 7】 有 12 名划船运动员，其中 3 人只会划左舷，4 人只会划右舷，其余 5 人既会划左舷也会划右舷，现在要从这 12 名运动员中选出 6 人平均分在左、右舷划船参加比赛，有多少种不同的选法？

解析 设集合 $A = \{$只会划左舷的 3 个人$\}$，$B = \{$只会划右舷的 4 个人$\}$，$C = \{$既会划左舷又会划右舷的 5 个人$\}$. 先分类，以集合 A 为基准，划左舷的 3 个人中，有以下几类情况：①A 中有 3 人；②A 中有 2 人；C 中有 1 人；③A 中有 1 人，C 中有 2 人；④C 中有 3 人.

第一类，划左舷的人已选定，划右舷的人可以在 $B \cup C$ 中选 3 人，即有 C_9^3 种选法，因是分步问题，所以有 $C_3^3 \cdot C_9^3$ 种选法.

第二类，划左舷的人在 A 中选 2 人，有 C_3^2 种选法，在 C 中选 1 人，有 C_5^1 种选法，划右舷的在 $B \cup C$ 中剩下的 8 人中选 3 人，有 C_8^3 种选法，因是分步问题，所以有 $C_3^2 \cdot C_5^1 \cdot C_8^3$ 种选法.

类似地，第三类，有 $C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_7^3$ 种选法.

第四类有 $C_3^0 \cdot C_5^3 \cdot C_6^3$ 种选法. 因为是分类，所以一共有 $C_3^3 \cdot C_9^3 + C_3^2 \cdot C_5^1 \cdot C_8^3 + C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_7^3 + C_3^0 \cdot C_5^3 \cdot C_6^3 = 2\,174$ 种选法.

注 这种比较复杂的在若干个集合中选取元素的问题，只要能运用分类整合的思想对所求选法正确分类，又能正确地根据题目要求合理地考察步骤，就可顺利地求其解，不过在分类时，要注意做到既不重复也不遗漏.

(3) 出场阵容问题

【例 8】 假设 2008 年北京奥运会某次准备 7 人制足球比赛，某国家有 12 名足球队员，其中有 6 人只善于进攻，4 人只善于防守，甲、乙两人既能进攻又能防守，比赛时要求场上有进攻球员 4 名，防守球员 3 名，则这个国家有多少种不同的出场阵容？

解析 本题可用分类计数原理来解决. 以甲、乙两人是否上场划分出三类：当甲、乙两人都不上场时，有 $C_6^4C_4^3$ 种阵容；当甲、乙两人中有且只有一人上场时，有 $C_2^1(C_6^3C_4^3 + C_6^4C_4^2)$ 种阵容；当甲、乙两人都上场时，有$(C_6^2C_4^3 + C_6^4C_4^1 + C_2^1C_6^3C_4^2)$ 种阵容.

综上所述：这个国家共有 $C_6^4C_4^3 + C_2^1(C_6^3C_4^3 + C_6^4C_4^2) + (C_6^2C_4^3 + C_6^4C_4^1 + C_2^1C_6^3C_4^2)$ 种出场阵容.

【例 9】 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名队员参加比赛，3 名主力队员要安排在第一、三、五位置，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有________种.

解析 本题可用特殊位置优先及分步计数原理来解决.

由于第一、三、五位的位置特殊，只能安排主力队员，有 A_3^3 种排法，而其余 7 名队员选出 2 名安排在第二、四位置，有 A_7^2 种排法，所以不同的出场安排共有 $A_3^3A_7^2 = 252$ 种.

3. 与比赛规则有关的问题

(1) 循环赛问题

【例 10】 假设在 2008 年北京奥运会的某次乒乓球单打比赛中，原计划每两名选手恰好比赛一场，但有 3 名选手各比赛了 2 场之后就退出了，这样，全部比赛只进行了 50 场，那么，在上述 3 名选手之间比

赛的场数是(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

解析　根据题意求出所有的比赛场，列出关于场数 x 和选手数 n 的关系式.

设共有 n 名选手，3名选手间比赛 x 场，那么3名选手与其余选手比赛了 $6-2x$ 场，其余的 $(n-3)$ 名选手之间每两名选手恰好比赛1场，共比赛 C_{n-3}^2 场，因此比赛总场数为 $C_{n-3}^2+x+6-2x$，则

$$C_{n-3}^2+x+6-2x=50$$

即
$$\frac{1}{2}(n-3)(n-4)+6-x=50$$

得
$$(n-3)(n-4)=88+2x,x\in \mathbf{N}^*$$

且 $0\leqslant x\leqslant 3$，当 $x=0$ 时，得 $n^2-7n-76=0$，无正整数解；当 $x=1$ 时，$n^2-7n-78=0$，解得 $n=13$；当 $x=2$ 或3，方程无正整数解.

注　解答本题的关键是：① 列出关于 x、n 的关系式；② 解关于 x、n 的等式.

【例11】　有12个队参加2008年奥运足球赛，比赛时先分成3个组(每个组4个队)，各组都实行主客场制(即每队都要与本组的其他各队交锋两次)，然后由各组的前两名共6个队进行单循环赛(即每两个队交锋一次)决定冠亚军，则共需比赛(　　)

A.51场　　B.66场　　C.48场　　D.33场

解析　每组有 A_4^2 次比赛，3个组有 $3A_4^2$ 次，各组前两名共6队单循环赛有 C_6^2 次比赛，因此共有 $3A_4^2+C_6^2=51$(场).

(2) 淘汰赛问题

【例12】　假设2008年北京奥运会有100名选手参加乒乓球赛，赛制是淘汰制，问需要安排多少场比赛才能决出冠军？

解析　用常规方法，需分多轮进行，即分类相加，非常繁琐，而用对应方法，则显得简捷快速.

一场比赛对应一个失败者(淘汰者)，要决出冠军必须淘汰99人(包括亚军)，故要进行99场比赛.

注　解此问题关键是要理解一场比赛对应一个失败者(淘汰者)，即用逆向思维法求解更简捷.

(3) 限制赛问题

【例13】　从6名短跑运动员中选4人参加 4×100 米接力，如果其中甲不能跑第一棒，乙不能跑第四棒，问共有多少种参赛方法？

解法1(分类法)　问题分成三类：① 甲、乙二人均不参加，有 A_4^4 种；② 甲、乙二人有且仅有1人参加，有 $2C_4^3(A_4^4-A_3^3)$；③ 甲、乙二人均参加，有 $C_4^2(A_4^4-2A_3^3+A_2^2)$ 种，所以共有252种.

解法2(去杂法)　6人中取4人参加的种数为 A_6^4，除去甲、乙两人中至少有一人排在不恰当位置的有 $C_2^1A_5^3$ 种，因前后把甲、乙两人都在不恰当位置的种数 A_4^2 减去了两次，故共有 $A_6^4-C_2^1A_5^3+A_4^2=252$ 种.

解法3　问题分成两类：① 乙跑第一棒，其余5人中选4人跑其他3棒有 A_5^3 种；② 乙不跑第一棒，从除甲外的4人中选1人跑第1棒有 C_4^1 种，中间两棒有 A_4^2 种，根据分类计数原理共有 $C_4^1C_4^1A_4^2$ 种，根据分类计数原理共有 $A_5^3+C_4^1C_4^1A_4^2=252$ 种.

4. 与赛前热身训练有关的问题

【例14】　2008年北京奥运会中，某国家进行射击训练，在一次射击比赛中，8个泥制的靶子挂成三列，其中两列各挂3个，一列挂2个，如图1所示，一射手射击时只准击碎三列靶子任何一列的最下面的一个，若每次射击都遵循这条原则，击碎8个靶子可以有多少种不同的次序？

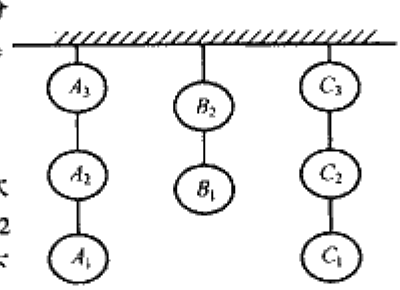


图1

解析 打完8个靶子的所有不同次序相当于8个字母排序，但要求 A_1 在 A_2 之前，A_2 在 A_3 之前，B_1 在 B_2 之前，C_1 在 C_2 之前，C_2 在 C_3 之前，例如 $B_1A_1A_2C_1B_2C_2A_3C_3$，这是其中一个次序，所以这是一个定序排列问题. 为此，可设想有一列8个位置，其中选取3个位置放置 A_1、A_2、A_3，由于 A_1、A_2、A_3 的次序是唯一的，所以有 C_8^3 种不同情形，从剩下5个位置中选取2个位置放置 B_1、B_2，有 C_5^2 种情形，其余3个位置放置 C_1、C_2、C_3 只有一种情形，所以，击碎8个靶子的不同次序 $N = C_8^3C_5^2C_3^3 = 560$ 种.

注 本题的实质是8个不同元素的组合问题.

5. 与比赛结果计数有关的问题

【例 15】 假设2008年北京奥运会中5名队员争夺3项比赛冠军，获得冠军的可能情况种数共有多少?

解析 此题可用分步计数原理解决.

完成这件事情(决定三个冠军)，需要分3步，每一项冠军都可以由5个人中的1人得到，故共有 $5\times5\times5=125$ 种.

【例 16】 在射击比赛中，某射击队队员射击8枪，共命中4枪，并且这4枪中有且仅有3枪连中，那么对于该人射击8枪，按"中"与"不中"报告结果，不同的结果共有多少种?

解析 解决此题可用等价转化的方法.

可将问题转化为:4个相同的黑球，其中3个黑球连在一起看成一个，不相邻地插入4个相同的白球之间(包括首尾两侧)，有多少种方法?因为任意相邻2个白球之间最多插1个黑球，于是，这就是将2个(其中一个为3个连在一起的黑球)黑球插入5个空位，即原题共有 $A_5^2=20$ 种获得冠军的可能情况.

(二十二) 高考二项式定理问题分类解析

二项式定理的有关知识是每年高考必不可少的内容,往往以一道选择题或填空题的形式出现."年年岁岁花相似",考查的落脚点总是与二项展开式的通项公式和二项式系数的性质相关.二项式公式看似单一,但"岁岁年年题不同",面对试题,须详究细察,分析揣摩,方可灵活应用,游刃有余.本文拟就高考中有关二项式定理应用的试题作"全扫描",并进行分类解析,旨在把握命题方向,探索解题规律,揭示解题方法.

1. 求展开式中的某一指定项

【例1】 $\left(2x^3-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$ 的展开式中常数项是(　　)

A. 14　　B. −14　　C. 42　　D. −42

解析

$$T_{r+1}=C_7^r(2x^3)^{7-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^rC_7^r\cdot2^{7-r}\cdot x^{21-\frac{7r}{2}}$$

由题意知 $21-\frac{7r}{2}=0$,得 $r=6$,即展开式中常数项是第7项,$T_7=(-1)^6C_7^6\cdot2=14$,故选A.

点评 直接利用通项公式进行求解.

2. 求展开式中某一指定项的系数

【例2】 $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式中 x^5 的系数为______.

解析 利用公式 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}\cdot b^r$ 求得

$$T_{r+1}=(-1)^r\cdot C_8^r\cdot x^{8-\frac{3}{2}r}$$

令 $8-\frac{3}{2}r=5$,得 $r=2$,进而得 x^5 的系数为28.

【例3】 $(2x+\sqrt{x})^4$ 的展开式中 x^3 的系数是(　　)

A. 6　　B. 12　　C. 24　　D. 48

解析 $T_{r+1}=C_4^r(2x)^{4-r}\cdot(\sqrt{x})^r=C_4^r\cdot2^{4-r}\cdot x^{4-r}\cdot x^{\frac{r}{2}}=C_4^r\cdot2^{4-r}\cdot x^{4-\frac{r}{2}}$

由题意设 $4-\frac{r}{2}=3$,所以 $r=2$ 即展开式中含 x^3 的项是第3项,其系数为 $C_4^2\cdot2^2=24$,故选C.

【例4】 已知 $(x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{3}})^n$ 的展开式中各项系数的和是128,则展开式中 x^5 的系数是______(以数字作答).

解析 由展开式得通项 $T_{r+1}=C_n^r\cdot x^{\frac{3}{2}n-\frac{11}{6}r}$,所以各项系数和为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n=128$,所以 $n=7$.

由 $\frac{3}{2}n-\frac{11}{6}r=5$ 知 $r=3$,则 $C_7^3=35$,故填35.

点评 分清某一项的系数与它的二项式系数是否相同,常规解法是利用通项公式 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$,先确定 r,再求其系数.

3. 求两个二项式积的展开式中某一指定项的系数

【例 5】 在$(1-x^3)(1+x)^{10}$的展开式中，x^5的系数是(　　)

A. -297　　B. -252　　C. 297　　D. 207

解析　由题意可知，只须求出$(1+x)^{10}$展开式中x^5与x^2的系数分别是C_{10}^5、C_{10}^2，所以$(1-x^3)(1+x)^{10}$的展开式中，x^5的系数为$C_{10}^5-C_{10}^2=207$，故选 D.

点评　利用两因式展开式相应项系数配对的方法.

4. 求展开式中某些项系数的和

【例 6】 若$(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2004}x^{2004}(x\in\mathbf{R})$，则$(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots+(a_0+a_{2004})=$ ______(用数字作答).

解析　(赋值法)令$x=0$得$a_0=1$.

$$原式=2\,004a_0+(a_1+a_2+\cdots+a_{2004})=2\,003a_0+(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2004})$$

令$x=1$得$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2004}=1$，所以

$$(a_0+1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots+(a_0+a_{2004})=2\,004$$

5. 求展开式中系数满足某些特殊要求的项数

【例 7】 由$(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$展开所得的$x$的多项式中，系数为有理数的共有(　　)

A. 50 项　　B. 17 项　　C. 16 项　　D. 15 项

解析　设展开式中第$r+1$项的系数为有理数，则

$$T_{r+1}=C_{100}^r3^{\frac{100-r}{2}}x^{100-r}2^{\frac{r}{3}}=C_{100}^r3^{\frac{100-r}{2}}2^{\frac{r}{3}}x^{100-r}$$

依题意r既然为偶数又为 3 的倍数，即r为 6 的倍数，且$0\leqslant r\leqslant 100$，所以$r$共有 17 个值，故选 B.

点评　先将展开式的通项进行整理，再令其幂指数为整数，进而求出所需项数.

6. 求二项式中所含参数的值

【例 8】 若在$(1+ax)^5$的展开式中x^3的系数为-80，则$a=$ ______.

解析　因为$T_4=C_5^3(ax)^3=-80x^3$，所以$10a^3x^3=-80x^3$，所以$10a^3=-80$，所以$a^3=-8$，所以$a=-2$.

点评　利用展开式的通项公式，根据题意建立方程，求出参数的值.

7. 求二项式的幂指数

【例 9】 若$\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$展开式中存在常数项，则$n$的值可以是(　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 12

解析

$$T_{r+1}=C_n^k(\sqrt{x})^{n-k}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_n^k\cdot2^k\cdot x^{\frac{3n-5k}{6}}$$

其中$\dfrac{3n-5k}{6}=0$，即$n=\dfrac{5}{3}k$. 当$k=6$时，$n=10$. 故选 C.

【例 10】 若$\left(x^3+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$的展开式中的常数项为 84，则$n=$ ______.

解析

$$T_{r+1}=C_n^rx^{3n-3r}\cdot x^{-\frac{3}{2}r}=C_n^r\cdot x^{3n-\frac{9}{2}r}$$

令$3n-\dfrac{9}{2}r=0$，得$r=\dfrac{2}{3}n$，所以n为 3 的倍数. 又由$C_n^r=84$，验证：当$n=3$时，$C_3^2=3\neq84$；当$n=6$时，$C_6^4=15\neq84$；当$n=9$时，$C_9^6=C_9^3=84$.

点评　依条件建立指数的方程.

8. 与数列、极限交汇

【例 11】 若$(1-2^x)^9$展开式的第 3 项为 288，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}\right)$的值是(　　)

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{5}$

解析 $T_3=C_9^2(-2^x)^2=288$，所以$x=\frac{3}{2}$，所以

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}=2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=2$$

故选 A.

点评 先求和再求极限(当然此题也可直接利用无穷等比数列的相关公式).

9. 与概率交汇

【例 12】 若在二项式$(x+1)^{10}$的展开式中任取一项，则该项的系数为奇数的概率是________(结果用分数表示).

解析 展开式中所有系数依次为C_{10}^0、C_{10}^1、C_{10}^2、C_{10}^3、C_{10}^4、C_{10}^5、C_{10}^6、C_{10}^7、C_{10}^8、C_{10}^9、C_{10}^{10}. 在这 11 个数中C_{10}^0、C_{10}^{10}、C_{10}^2、C_{10}^8为奇数，其余均为偶数，故所求的概率为$\frac{4}{11}$.

点评 解决此类问题关键要先找出符合要求的对象. 本题因数目不多，故既可用通项公式——列举，也可用本文例 13 中的二项式系数表(杨辉三角)观察，从而使问题得到解决.

10. 渗透在研究性学习课题的探究之中

【例 13】 如图 1，在由二项式系数所构成的杨辉三角形中第________行中从左至右第 14 与第 15 个数的比为 2 : 3.

解析 设第n行中从左至右第 14 与第 15 个数的比为 2 : 3，则依题意可得：$C_n^{13}:C_n^{14}=2:3$，解得$n=34$.

点评 分析所给题设特征，恰当使用二项式展开式的通项公式.

第 0 行						1					
第 1 行					1		1				
第 2 行				1		2		1			
第 3 行			1		3		3		1		
第 4 行		1		4		6		4		1	
第 5 行	1		5		10		10		5		1
…			…					…			

图 1

[redacted]

(1) 二项式展开式的性质

① 在二项式展开式中，与首末两端"等距离"的两项的二项式系数相等，即

$$C_n^0=C_n^n,C_n^1=C_n^{n-1},\cdots,C_n^k=C_n^{n-k}$$

② 如果n是偶数，则二项式的展开式的项数为奇数，且中间一项(第$\frac{n}{2}+1$项)的二项式系数最大；如果n是奇数，则二项式的展开式的项数为偶数，且中间两项(第$\frac{n+1}{2}$项与第$\frac{n+1}{2}+1$项)的二项式系数相等并且最大.

③ 所有二项式系数的和等于2^n，即

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

④ 奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和，即

$$C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$$

(2) 二项式系数与项的系数的区别

如对$(a+bx)^n(a,b\in \mathbf{C})$的展开式，第 $r+1$ 项的二项式系数为 C_n^r，而第 $r+1$ 项为 $C_n^r a^{n-r}b^r$.

(3) 通项公式主要用于求二项式的指数，求满足条件的项或系数，求展开式的某一项或系数，在应用通项公式时要注意以下几点：

① 分清 $C_n^k a^{n-k}b^k$ 是第 $k+1$ 项，而不是第 k 项.

② 在通项公式 $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$ 中，含有 T_{k+1}、C_n^k、a、b、n、k 这六个参数，只有 a、b、n、k 是独立的，在未知 n、k 的情况下，用通项公式解题，一般都需首先将通项公式转化为方程(组)求出 n、k，然后代入通项公式求解.

③ 求二项式展开式中的一些特殊项，如系数最大的项、常数项等，通常都是先利用通项公式，由题意列方程，求出 k，再求所需的某项；有时则需先求 n，计算时要注意 n 和 k 的取值范围以及它们之间的大小关系.

④ 二项式定理的一个重要用途是作近似运算：当 n 不很大，$|x|$ 比较小时，$(1+x)^n\approx 1+nx$.

⑤ 利用二项式定理还可以证明整除问题或求余数问题，在证明整除问题或求余数问题时要进行合理的变形，使被除式(数)展开后的每一项都含有除式的因式，要注意变形的技巧.

[redacted]

二项式定理的学习或复习应重视基础，对二项式定理的展开式、通项公式、二项式系数的性质、二项式展开式中项的系数特征要弄懂原理，注意分辨通解通法，牢固掌握，不必追求解难题、寻巧解.

（二十三）学习“导数”我们该关注什么

导数，既是近些年高中教材的新增内容，今后学习的必需，又是函数、分析与解几何等知识的交汇点，也是与大学数学知识衔接较为紧密的内容，有着至关重要的作用，现已成为新高考数学重点考查的基础知识.特别是导数内容的引入为我们分析和解决问题打开了新的视野、提供了新的方法，相对以前有关问题的传统解法，导数方法更具明显优势.所涉及的问题包括求函数的极值，求函数的单调区间，证明函数的增减性，解决相关应用问题，将导数内容和传统内容中有关不等式和函数的单调性等有机地结合在一起，设计综合试题，已经由以前在解决问题中的辅助地位上升为分析和解决问题时必不可少的工具.但是由于导数概念的定义比较抽象，学生对相关问题的处理方法一般不太熟悉，因此对导数概念、性质认识不清而导致的错误经常发生.那么对有关“导数”内容的教学我们到底最该关注些什么呢？为此笔者联系自己的教学实践，并精选数例最新高考题或高考模拟题，进行分类导析，供各位读者教与学时参考.

1.关注导数的定义

【例1】 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2$，则 $f'(x_0)$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. -1　　C. 0　　D. -2

解析　因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{-2\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-2\Delta x)-f(x_0)}{-2\Delta x}\cdot(-2)=-2f'(x_0)=2$，所以 $f'(x_0)=-1$.故选B.

例题链接　1.定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(1)=2$，对任意 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$，都有 $f(x_1x_2)=x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，求 $f(x)$ 的解析式.

解析　令 $x_1=x_2=1$，由已知关系式得

$$f(1)=0$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x(1+\frac{\Delta x}{x})]-f(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{xf(1+\frac{\Delta x}{x})+(1+\frac{\Delta x}{x})f(x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{xf(1+\frac{\Delta x}{x})+\frac{\Delta x}{x}f(x)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\frac{\Delta x}{x}\to 0}\frac{f(1+\frac{\Delta x}{x})-f(1)}{\frac{\Delta x}{x}}+\frac{f(x)}{x}=f'(1)+\frac{f(x)}{x}$$

所以
$$f'(x)-\frac{f(x)}{x}=2\Rightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{2}{x}\Rightarrow\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{2}{x}$$

所以
$$f(x)=2x\ln x+cx,\ c\text{ 为常数}$$

点评　导函数定义中的结构式为 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

2. 已知函数 $f(x)=-\frac{3}{5}x^5-\frac{7}{4}x^4+8$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$ ______.

错解 $f'(x)=-3x^4-7x^3\Rightarrow f'(1)=-10$

分析 导数的定义为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，其变形式为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\lambda\Delta x)-f(x_0)}{\omega\Delta x}=\frac{\lambda}{\omega}f'(x_0)\text{，其中 }\lambda^2+\omega^2\neq 0$$

上述错解原因是误用了导数定义，在导数的定义中增量 Δx 的形式是多种多样的，但是无论 Δx 选择哪一种形式，Δy 都应做出相应变化，所以此题利用导数定义求解较好.

正解 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=2f'(1)=-20$$

2. 关注求解导数时函数的定义域

【例 2】 已知函数 $f(x)=\ln x+x^2f'(a)$ 且 $f(1)=-1$，则实数 a 的值为______.

错解 $f(x)=\ln x+x^2f'(a)\Rightarrow f(1)=f'(a)=-1$，又 $f'(x)=\frac{1}{x}+2xf'(a)$，所以 $\frac{1}{a}-2a=-1$，即 $2a^2-a-1=0$，所以 $a=1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

分析 定义域是函数的灵魂，所以研究函数应首先研究函数的定义域，求得的导函数的定义域更不能超出原函数的定义域. 此错误解法在于没有考虑函数的定义域所致，由式子 $f'(a)$ 可知实数 a 必须在该函数的定义域之内.

正解 $f(x)=\ln x+x^2f'(a)\Rightarrow f(1)=f'(a)=-1$ 且 $a>0$，又 $f'(x)=\frac{1}{x}+2xf'(a)$，所以

$$\frac{1}{a}-2a=-1\Rightarrow 2a^2-a-1=0\Rightarrow a=1\text{ 或 }-\frac{1}{2}\text{（舍）}$$

3. 关注求解函数的单调区间时原函数的定义域

【例 3】 求函数 $y=\ln(1-2x)$ 的单调区间.

解析 因为 $1-2x>0$，所以原函数的定义域为 $\left\{x\mid x<\frac{1}{2}\right\}$，此时 $y'<0$，因此函数 $y=\ln(1-2x)$ 的单调区间是 $(-\infty,\frac{1}{2})$.

点评 如果不考虑原函数的定义域，$y'=-\frac{2}{1-2x}$，令 $y'>0$，解得 $x>\frac{1}{2}$；令 $y'<0$，解得 $x<\frac{1}{2}$. 因此，函数 $y=\ln(1-2x)$ 的单调区间是 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 和 $(-\infty,\frac{1}{2})$，所以首先考虑定义域是一条最基本原则.

4. 关注导数的运算法则（特别是复合函数的求导）

【例 4】 求函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ 的导数.

错解 $f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}(x+\sqrt{x^2-a^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\right)$

分析 此错误解法在于没有将 $\sqrt{x^2-a^2}$ 再求导，对复合函数的求导认识模糊所致.

正解 $f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}(x+\sqrt{x^2-a^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}})\times(x^2)'=$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}})$$

点评 要加强对数函数和指数函数的导数公式的记忆，同时要牢固掌握分式函数和复合函数的导数运算法则.

5. 关注导数的几何意义

【例 5】 已知曲线 $f(x)=x^3+2x$，过点 $P(0,2)$ 作曲线 $f(x)$ 的切线，求切线的方程.

解析 设切点坐标为 $M(x_0, x_0^3+2x_0)$，则切线斜率为 $k=f'(x_0)=3x_0^2+2$，所以切线方程为 $y=(3x_0^2+2)x+2$，又点 M 在切线上，故 $x_0^3+2x_0=(3x_0^2+2)x_0+2$，得 $x_0=-1$，所以切线方程为 $y=5x+2$.

点评 此例容易出现直接求出 $k=f'(0)=2$，然后得到曲线的切线的方程为 $y=2x+2$ 的错误. 要注意曲线上某一点导数的几何意义是过曲线上该点的切线的斜率，曲线上某点的切线只有一条；如果是过某点作曲线的切线，一定要看这一点是不是切点，有时切线可能不只一条（不管这点在不在曲线上）. 如过点 $P(1,1)$ 作曲线 $y=x^3$ 的切线，切线方程为 $y=3x-2$ 或 $3x-4y+1=0$.

例题链接 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-2x)}{2x}=-1$，则过曲线 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为（ ）

A. 2　　B. -1　　C. 1　　D. -2

解析
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-2x)}{2x}=\lim_{-2x\to 0}\frac{f(1-2x)-f(1)}{-2x}=-1$$
所以 $y'|_{x=1}=-1$，则 $y=f(x)$ 上点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 -1.

6. 关注"过某一点"作函数图象的切线与"在该点"处作函数图象切线的异同

【例 6】 已知曲线方程 $y=\dfrac{1}{3}x^3$，求过 $P(2,\dfrac{8}{3})$ 的切线方程.

错解 因为 $y'=x^2$，所以曲线在点 P 的导数 $y'=4$，即过点 P 的切线的斜率为 4，故切线方程为 $y=4(x-2)+\dfrac{8}{3}$，整理得 $12x-3y-16=0$.

分析 此错误解法在于混淆了"过某点"与"在某点"处的切线的概念，因此应考虑 $P(2,\dfrac{8}{3})$ 是切点和不是切点两种情况.

正解 当 $P(2,\dfrac{8}{3})$ 为切点时，因为 $y'=x^2$，所以曲线在点 P 的导数 $y'=4$，即在 P 的切线的斜率为 4，故切线方程为 $y=4(x-2)+\dfrac{8}{3}$，整理得 $12x-3y-16=0$.

当 $P(2,\dfrac{8}{3})$ 不是切点时，设切点为 $Q(x_0,\dfrac{1}{3}x_0^3)(x_0\neq 2)$，因为 $y'=x^2$，所以 $y'\Big|_{x=x_0}=x_0^2$，即在 Q 的切线的斜率为 x_0^2，故切线方程为 $y=x_0^2(x-x_0)+\dfrac{1}{3}x_0^3$，因点 P 在切线上，所以有
$$\frac{8}{3}=x_0^2(2-x_0)+\frac{1}{3}x_0^3$$
即
$$\frac{1}{3}(x_0-2)^2(x_0+4)=0$$
所以
$$x_0=-4$$
即 $Q(-4,-\dfrac{64}{3})$，所以点 Q 处的切线方程为 $y=16(x+4)-\dfrac{64}{3}$，整理得 $16x-3y+128=0$.

点评 ①曲线的切线不一定和曲线只有一个公共点；②"在"某一点的切线和"过"某一点的切线是两个不同的概念；③在某一点的切线若有则只有一条，而过某一点的切线往往不只是一条；④用导数求切线的斜率时，必须设出切点，即采取"待定切点法".

7. 关注切点在曲线上的隐含条件

【例 7】 已知抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 在点 $(1,2)$ 处的切线为 $y=-2x+4$，求 a 和 b 的值.

解析 因为 $y' = 2ax + b$，所以 $y'|_{x=1} = 2a + b = k$，所以方程 $y - 2 = (2a + b)(x - 1)$ 与 $y = -2x + 4$ 重合，即 $\begin{cases}2a + b = -2\\2 - 2a - b = 4\end{cases}$，化简得 $2a + b = -2$，又点(1,2)在曲线上，所以 $a + b + 3 = 2$，联立方程组 $\begin{cases}2a + b = -2\\a + b + 3 = 2\end{cases}$，解得 $a = -1, b = 0$.

点评 在已知曲线上某点的切线有两层意思：一是在该点的导数值等于切线的斜率；二是该点的坐标满足已知曲线的方程. 本题可能会出现以下解答：因为 $y' = 2ax + b$，所以 $y'\Big|_{x=1} = 2a + b = k$，所以方程 $y - 2 = (2a + b)(x - 1)$ 与 $y = -2x + 4$ 重合，即 $\begin{cases}2a + b = -2\\2 - 2a - b = 4\end{cases}$，化简得 $2a + b = -2$，少一个条件，问题不可解.

8. 关注导数运算性质的逆用

【例 8】 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的非负可导函数，且满足 $xf'(x) - f(x) \leqslant 0$，对任意正数 a、b，若 $a < b$，则必有(　　)

A. $af(a) \leqslant bf(b)$　　B. $bf(a) \leqslant af(b)$　　C. $af(b) \leqslant bf(a)$　　D. $bf(b) \leqslant af(a)$

解析 构造函数 $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$，因为 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的非负可导函数，且满足 $xf'(x) - f(x) \leqslant 0$，所以 $F'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \leqslant 0$，即 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，又对任意正数 a、b，$a < b$，则 $F(a) \geqslant F(b) \Rightarrow \dfrac{f(a)}{a} \geqslant \dfrac{f(b)}{b} \Rightarrow bf(a) \geqslant af(b)$，故选 C.

例题链接 已知 $f(x)$、$g(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，$g(x) \neq 0$，$f'(x)g(x) < f(x)g'(x)$，$f(x) = a^x g(x)$，$\dfrac{f(1)}{g(1)} + \dfrac{f(-1)}{g(-1)} = \dfrac{5}{2}$，在有穷数列 $\left\{\dfrac{f(n)}{g(n)}\right\}(n = 1,2,\cdots,10)$ 中，任意取前 k 项相加，则前 k 项的和大于 $\dfrac{15}{16}$ 的概率是(　　)

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

解析 $a^x = \dfrac{f(x)}{g(x)}$，可知 $(a^x)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0$，所以 $y = a^x$ 递减，又 $a + a^{-1} = \dfrac{f(1)}{g(1)} + \dfrac{f(-1)}{g(-1)} = \dfrac{5}{2}$，所以 $2a^2 - 5a + 2 = 0$，所以 $a = \dfrac{1}{2}$ 或 $a = 2$(舍)，所以 $\dfrac{f(n)}{g(n)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，所以 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$，所以 $k = 5,6,7,8,9,10$，故所求概率为 $\dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$，故选 B.

9. 关注求解 $f'(x_0)$ 的顺序

【例 9】 求函数 $f(x) = 2x^3$ 在 $x = 2$ 的导数 $f'(2)$.

解析 因为 $f'(x) = 6x^2$，所以函数 $f(x) = 2x^3$ 在 $x = 2$ 的导数为 $f'(2) = 24$.

点评 求函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，应先求函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$，再将 x_0 代入导函数 $f'(x)$，求出导数值，顺序不能颠倒.

10. 关注导数与函数单调性的关系

【例 10】 已知函数 $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - (4m - 1)x^2 + (15m^2 - 2m - 7)x + 2$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上为单调增函数，求实数 m 的取值范围.

错解
$$f'(x) = x^2 - 2(4m - 1)x + 15m^2 - 2m - 7$$
依题意可得 $f'(x) > 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立，所以

$$\Delta = 4(m^2 - 6m + 8) < 0 \Rightarrow 2 < m < 4$$

分析 错解在于应用了错误结论:"$f(x)$ 单调递增,则 $f'(x) > 0$ 恒成立",如 $f(x) = x^3$ 是增函数,但是 $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$.

正解 $$f'(x) = x^2 - 2(4m - 1)x + 15m^2 - 2m - 7$$

依题意可得 $f'(x) \geqslant 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立,所以

$$\Delta = 4(m^2 - 6m + 8) \leqslant 0 \Rightarrow 2 \leqslant m \leqslant 4$$

点评 如果 $f'(x)$ 在某个区间内存在有限个零点且其余各点均为正(或负)时,那么函数 $f(x)$ 在该区间上仍旧是增函数(或减函数).另外还要注意 $f'(x) > 0$(或 < 0)与单调增区间(或减区间)的关系,如 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$,则 $f'(x) = x^2 - 2x - 3 > 0$ 解得 $x > 3$ 或 $x < -1$,此时应为函数的单调递增区间为 $(3, +\infty)$,$(-\infty, -1)$ 而不是 $(3, +\infty) \cup (-\infty, -1)$(也可以将开区间记为闭区间).

11. 关注闭区间上极值与最值的关系

【例 11】 求函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ 在 $[-3,3]$ 上的最值.

解析 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$,令 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$,解得 $x_1 = 1$,$x_2 = \frac{1}{3}$,所以极值点为 $x_1 = 1$ 与 $x_2 = \frac{1}{3}$,所以 $f(1) = 0$,$f(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27}$,又 $f(-3) = -48$,$f(3) = 12$,所以函数的最大值为 12,最小值为 -48.

点评 求解闭区间上的最值问题就是极值点处的函数值与端点处的函数值比较大小,然后取其最大值和最小值为函数的最值,而不能简单地把极值等同最值.函数的极值和最值是不同的概念,在一个区间上可能有几个极大值和极小值,而且还可能某些极大值小于极小值,因此,求函数在闭区间上的最值需要将函数的一切极值和其端点值进行比较才能确定.由于高考只对单峰函数有要求,故在求解闭区间上的函数的最值时,只须求解极值点和其端点值即可获解.

例题链接 求函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在 $[-3,3]$ 上的最值.

错解 由 $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$ 可得 $x = 1$ 或 $x = -1$,易验证 $x = 1$ 和 $x = -1$ 为极值点,即 $f(1) = -2$ 为极小值,$f(-1) = 2$ 为极大值,所以函数 $f(x)$ 的最大值为 2,最小值为 -2.

分析 此错误解法在于将极值和最值混淆,要注意极值为局部概念,是函数在某一点附近的最值;最值是整体概念,是函数在整个区间上的最值.

正解 由 $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$ 可得 $x = 1$ 或 $x = -1$,易验证 $x = 1$ 和 $x = -1$ 为极值点,即 $f(1) = -2$ 为极小值,$f(-1) = 2$ 为极大值.又 $f(3) = 18$ 且 $f(-3) = -18$,故以函数 $f(x)$ 的最大值为 18,最小值为 -18.

12. 关注 $f'(x_0) = 0$ 与 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值的关系

【例 12】 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 在 $x = 1$ 处取得极值 10,求 $f(2)$ 的值.

错解 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,依题意可得 $\begin{cases} f(1) = 10 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$,即

$$\begin{cases} a^2 + a + b + 1 = 10 \\ 2a + b + 3 = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = 4 \\ b = -11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \end{cases}$,故 $f(2) = 18$ 或 11.

分析 此错误解法在于将 $f'(x_0) = 0$ 看作是函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极值的充分条件.

正解 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,依题意可得 $\begin{cases} f(1) = 10 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$,即

$$\begin{cases}a^2+a+b+1=10\\2a+b+3=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=4\\b=-11\end{cases}$或$\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}$.

当$\begin{cases}a=4\\b=-11\end{cases}$时，$f'(x)=0\Rightarrow x_1=1,x_2=-\frac{11}{3}$.

x	$(-\infty,-\frac{11}{3})$	$-\frac{11}{3}$	$(-\frac{11}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极值	↘	极值	↗

由上表可知 $x=1$ 处取得极值 10，即 $f(2)=18$.

当$\begin{cases}a=-3\\b=3\end{cases}$时，$f'(x)=3x^2-6x+3\geqslant 0$，即此时函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，所以 $x=1$ 不是其极值点，故舍去，综上 $f(2)=18$.

点评 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导，则 $f'(x_0)=0$ 是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值的必要不充分条件.

13. 关注借助导数解决数列问题

【例 13】 已知数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n=n\cdot a^n(0<a<1)$ 且 $a_n>a_{n+1}$ 对所有正整数 n 均成立，求实数 a 的取值范围.

错解 令 $f(x)=x\cdot a^x(0<a<1)$，由 $a_n>a_{n+1}$ 可得函数 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上单调递减，故 $f'(x)=a^x(1+x\cdot\ln a)\leqslant 0$ 在区间$[1,+\infty)$上恒成立.

$$a^x(1+x\cdot\ln a)\leqslant 0\Leftrightarrow 1+x\cdot\ln a\leqslant 0\Leftrightarrow\ln a\leqslant-\frac{1}{x}$$

即

$$\ln a\leqslant\left(-\frac{1}{x}\right)_{\min}\Rightarrow\ln a\leqslant-1\Rightarrow 0<a\leqslant\frac{1}{e}$$

点评 错解在于将 $f(n)>f(n+1)$ 看作是函数 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上单调递减，事实上，(n,a_n)只是该函数的图象上一系列的点，因此要使 $a_1>a_2$ 不一定有函数 $f(x)$ 在区间$[1,2]$上单调递减.

正解 $a_n>a_{n+1}\Leftrightarrow n\cdot a^n>(n+1)\cdot a^{n+1}\Rightarrow a<\frac{n}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，故 $0<a<\frac{1}{2}$.

另解 令

$$f(x)=x\cdot a^x(0<a<1),f'(x)=a^x(1+x\cdot\ln a)=0\Rightarrow x=-\frac{1}{\ln a}$$

所以当 $x<-\frac{1}{\ln a}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数；当 $x>-\frac{1}{\ln a}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数.

要使 $f(n)>f(n+1)$，则$\begin{cases}-\frac{1}{\ln a}<2\\f(1)>f(2)\end{cases}$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$.

点评 利用函数的单调性解决数列单调性问题时，不能直接求导，如$(a_n)'=(n\cdot a^n)'$，也不能将数列的单调性等同于函数的单调性，借助函数的单调性时需要增加比较前两项的大小.

14. 关注导函数图象信息的解读

【例 15】 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间(a,b)，导函数 $f'(x)$ 在(a,b)内的图象如图 1 所示，则函数 $f(x)$ 在区间内有极小值点(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解析 由导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 内的图象及几何意义知，函数在极小值点的左边单调递减，在右边单调递增，则函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 只有 1 个极小值点. 故选 A.

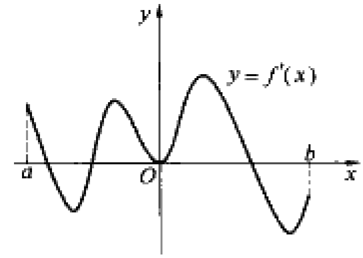


图 1

例题链接 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，$y=f'(x)$ 的图象如图 2 所示，则 $y=f(x)$ 的图象最有可能是(　　)

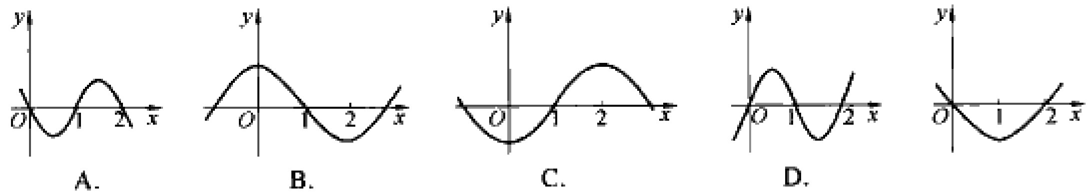


图 2

解析 易知函数在 $[0,2]$ 上单调递减，在 $(-\infty,0]$ 和 $[2,+\infty)$ 上单调递增，故选 B.

点评 函数的导函数大于零，表示函数单调递增；函数的导函数小于零，表示函数单调递减. 导函数在 x 轴上方的部分表示导数大于零，在 x 轴下方的部分表示导数小于零.

(二十四) 高考数学应用题完全解读

为了检测考生分析问题和解决问题的能力，近几年来的高考数学试卷中增加了一定数量的联系生产和生活实际的应用问题.数学应用性问题是历年高考命题的主要题型之一(一般命制一道解答题和两道选择、填空题)，也是考生失分较多的一种题型.此类题目意在突出能力考查，加大区分度，更好地体现高考试题的选拔功能，从而更好地贯彻了"重视应用，培养用数学的意识，培养综合、灵活运用数学知识"的精神.

解答这类问题的关键是要深刻理解题意，学会文字语言向数学的符号语言的翻译转化，这就需要建立恰当的数学模型，将实际问题转化为数学问题，最后再用已学过的数学知识去解决问题.思路如图1所示.

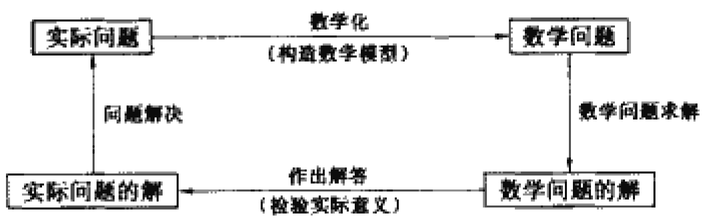


图1

高考应用题的解答可从以下步骤入手：

① 审清题目，把握题意.从题目入手，边读边悟，读后能用自己的语言将题目的含义全面准确地表达出来.

② 建立各量之间的关系.要理顺题目中各种数量之间的关系，联想归结为我们熟悉的某种基本数量关系.

③ 建构数学模型.把题目的已知量、未知量、常量、变量等分门别类地列出，再穿插题目中各种制约条件，形成"数学模型".

高考应用性问题的热门话题是增减比率型和方案优化型，当然计算型和信息迁移型有时也出现.另外，数学高考应用性问题往往关注当前国内外的政治、经济、文化等，紧扣时代的主旋律，凸显了学科综合的特色，是历年高考命题的一道亮丽风景线.

高考中的应用性问题是以考查学生的数学知识、方法与能力为主，考查学生应用数学的意识，在学习中要准确把握基础、能力和应用三者的关系.本文将按所涉及的主要数学知识点，分类解读高考数学应用题.

1. 以函数、方程、不等式、导数等知识为背景的应用题

【例1】 甲方是一农场，乙方是一工厂.由于乙方生产须占用甲方的资源，因此甲方有权向乙方索赔以弥补经济损失并获得一定净收入，在乙方不赔付甲方的情况下，乙方的年利润 x(元)与年产量 t(t)满足函数关系 $x=2\,000\sqrt{t}$.若乙方每生产1 t产品必须赔付甲方 s 元(以下称 s 为赔付价格).

（Ⅰ）将乙方的年利润 ω（元）表示为年产量 t（t）的函数，并求出乙方获得最大利润的年产量；

（Ⅱ）甲方每年受乙方生产影响的经济损失金额 $y = 0.002t^2$（元），在乙方按照获得最大利润的产量进行生产的前提下，甲方要在索赔中获得最大净收入，应向乙方要求的赔付价格 s 是多少？

解析 利用已知条件写出实际年利润关系式 $\omega = 2\,000\sqrt{t} - st$，利用二次函数求最值或利用导数求最值，再写出甲方净收入 $v = st - 0.002t^2$，化为 s 的函数求最值.

（Ⅰ）**解法1** 乙方的实际年利润为：$\omega = -s\left[\sqrt{t} - \frac{1\,000}{s}\right]^2 + \frac{1\,000^2}{s}$（后略）.

解法2 $\omega = 2\,000\sqrt{t} - st$，由 $\omega' = \frac{1\,000 - s\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$，令 $\omega' = 0$ 得 $t = t_0 = \left(\frac{1\,000}{s}\right)^2$.

易知当 $t = t_0$ 时，ω 取得最大值，因此乙方取得最大年利润的年产量 $t_0 = \left(\frac{1\,000}{s}\right)^2$（t）.

（Ⅱ）设甲方净收入为 v 元，则 $v = st - 0.002t^2$. 将 $t = \left(\frac{1\,000}{s}\right)^2$ 代入上式，得到甲方净收入 v 与赔付价格 s 之间的函数关系式 $v = \frac{1\,000^2}{s} - \frac{2\times 1\,000^3}{s^4}$. 令 $v' = 0$，得 $s = 20$.

易知当 $s = 20$ 时，v 取得最大值.

点评 本小题主要考查函数的概念，运用导数求函数最大值、最小值的方法，以及运用数学知识，建立简单数学模型并解决实际问题的能力.

【例2】 某日中午12时整，甲船自 A 处以16 km/h的速度向正东行驶，乙船自 A 的正北18 km处以24 km/h的速度向正南行驶，则当日12时30分时两船之间距离对时间的变化率是________ km/h.

解析 以点 A 为原点，正东、正北方向所在的直线分别为 x 轴、y 轴建立如图2所示的直角坐标系，t 时刻甲位于 $(16t, 0)$ 处，乙位于 $(0, 18-24t)$ 处，则两地间距离

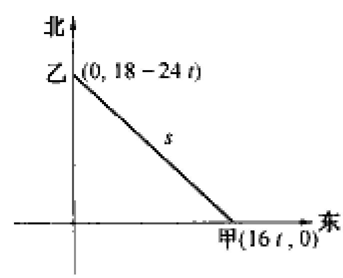


图2

$$S(t) = \sqrt{(16t)^2 + (18-24t)^2}$$

$$S'(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{16(t)^2 + (18-24t)^2}} \times [2\times 16^2 t - 48(18-24t)]$$

所以12时30分时，$t = 0.5$，则

$$S'(0.5) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{8^2+6^2}} \times (32\times 8 - 48\times 6) = -1.6$$

点评 此题考查了方位角的概念，画图识图的能力，列方程解应用题的思想，同时也考查了同学们对导数的物理意义及导数定义的理解，特别是不同的方向设计，使得变化率是一个负值. 这要求大家能将物理知识与数学知识相结合，能熟练运用复合函数的求导法则. 从更深的角度分析，它还考查了同学们用所学数学知识处理实际问题的能力，以及进入高校后学习的潜能.

提示 ① 易出现结果为“$\frac{S(t)}{t} = \frac{10}{0.5} = 20$”的错误，要认真区分 $\frac{s}{t}$ 与 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的含义.

② 若对 $S(t)$ 的关系式化简展开后求导数，则运算极繁.

③ 由于不能真正理解距离对时间的导数是瞬时速度，而速度是一个向量，许多考生在求出对应的变化率是一个负值后，给出答案时竟然特意将其中的负号舍去，以致痛失4分，实为可惜！

④ 此题是由人教版高三数学教材（选修Ⅱ）第三章复习参考题B组题第6题改编而成.

解题方略 高考中以函数等知识为背景的应用问题主要涉及初等函数（一次函数、反比例函数、二次函数、分段函数以及形如 $y = ax + \frac{b}{x}$ 的函数等），故解答此类问题常按以下程序进行：建立函数表达式 → 实际问题数学化（文字语言转化为数学的符号语言或图形语言）→ 在其定义域内给出问题完整准

确的解答.

2. 以数列知识为背景的应用题

【例3】 假设某市2004年新建住房400万 m^2,其中有250万 m^2 是中低价房.预计在今后的若干年后,该市每年新建住房面积平均比上年增长8%.另外,每年新建住房中,中低价房的面积均比上一年增加50万 m^2.那么,到哪一年底

(Ⅰ)该市历年所建中低价房的累计面积(以2004年为累计的第一年)将首次不少于4 750万 m^2?

(Ⅱ)当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于85%?

解析 (Ⅰ)设中低价房面积形成数列 $\{a_n\}$,由题意可知是等差数列.

其中 $a_1 = 250, d = 50$,则 $S_n = 250n + \dfrac{n(n-1)}{2} \times 50 = 25n^2 + 225n$.

令 $25n^2 + 225n \geqslant 4\ 750$,即 $n^2 + 9n - 190 \geqslant 0$,而 n 是正整数,所以 $n \geqslant 10$.

所以到2013年底,该市历年所建中低价房的累计面积将首次不少于4 750万 m^2.

(Ⅱ)设新建住房面积形成数列 $\{b_n\}$,由题意可知 $\{b_n\}$ 是等比数列,其中 $b_1 = 400, q = 1.08$,则 $b_n = 400 \cdot (1.08)^{n-1}$.由题意可知 $a_n > 0.85b_n$,有 $250 + (n-1)50 > 400 \cdot (1.08)^{n-1} \cdot 0.85$.

由计算器解得满足上述不等式的最小正整数 $n = 6$,所以到2009年底,当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于85%.

点评 这是一道以"住房改革"为背景,关注社会生活热点问题的常规应用题.

解题方略 由实际问题构建出数列模型,所涉及的各量用数列的项、项数、通项、前 n 项和等来表达,从而求解.有关平均增长率、利率(复利)以及等值增减等实际问题,都需利用数列知识来建立数学模型,常用的数学模型有:① 构造等差、等比数列模型→用数列的通项公式、求和公式求解;② 用无穷递缩等比数列的求和公式求解;③ 归纳得到结论→用数列知识求解.

3. 以三角函数知识为背景的应用题

【例4】 如图3,某城市有一条公路从正西方 AO 通过市中心 O 后转向东北方 OB.现要修建一条铁路 L,L 在 OA 上设一站 A,在 OB 上设一站 B,铁路在 AB 部分为直线段,现要求市中心 O 与 AB 的距离为10 km,问把 A、B 分别设在公路上离中心 O 多远处才能使 $|AB|$ 最短,并求其最短距离(不要求作近似计算).

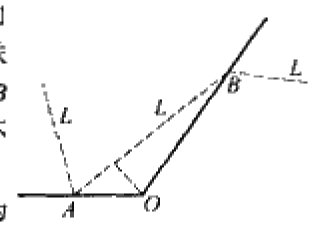


图3

解析 在 $\triangle AOB$ 中,设 $OA = a, OB = b$.因为 OA 为正西方向,OB 为东北方向,所以 $\angle AOB = 135°$,$|AB|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos 45° = a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab \geqslant 2ab + \sqrt{2}ab = (2+\sqrt{2})ab$(当 $a = b$ 时,等号成立).

又 O 到 AB 的距离为10,设 $\angle OAB = \alpha$,则 $\angle OBA = 45° - \alpha$,所以

$$a = \frac{10}{\sin\alpha}, b = \frac{10}{\sin(45° - \alpha)}$$

于是 $$ab = \frac{10}{\sin\alpha} \cdot \frac{10}{\sin(45° - \alpha)} = \frac{100}{\sin\alpha \cdot \sin(45° - \alpha)} = \frac{100}{-\frac{1}{2}[\cos 45° - \cos(2\alpha - 45°)]} =$$

$$\frac{400}{2\cos(2\alpha - 45°) - \sqrt{2}} \geqslant \frac{400}{2 - \sqrt{2}} (\alpha = 22°30',\text{当 } a = b \text{ 时,等号成立.})$$

所以 $$|AB|^2 \geqslant \frac{400(2+\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}} = 400(\sqrt{2}+1)^2 (\text{当 } a = b \text{ 且 } \alpha = 22°30' \text{ 时,等号成立})$$

所以当 $a = b = \dfrac{10}{\sin 22°30'} = 10\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$ 时,$|AB|$ 最短,其最短距离为 $20(\sqrt{2}+1)$,即当 A、B 分别在 OA、OB 上离点 O 为 $10\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$ km处时,能使 $|AB|$ 最短,其最短距离为 $20(\sqrt{2}+1)$ km.

点评 本题主要考查根据图形建立函数关系、三角函数公式、用反三角函数表示角以及解和三角函数有关的极值问题等基础知识，考查综合运用三角函数知识的能力.此题的"闪光点"：几何的面孔，三角的关系，导数的有效使用.

解题方略 三角函数在测量计算与角有关的问题中应用广泛.引入角作为参变量，构造三角形，借助正弦定理、余弦定理、勾股定理、三角函数、向量、不等式等知识，即可解决许多相关的应用问题，但要注意角参数范围的限制，以防解题失误.

4.以向量知识为背景的应用题

【例5】 平面上有两个向量 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$，今有动点 P 从 $P_0(-1,2)$ 开始沿着与向量 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 相同的方向作匀速直线运动，速度为 $|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|$；另一动点 Q 从点 $Q_0(-2,-2)$ 出发，沿着与向量 $3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ 相同的方向作匀速直线运动，速度为 $|3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2|$，设 P、Q 在时刻 $t=0$ s时分别在 P_0、Q_0 处，则当 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{P_0Q_0}$ 时用了多长时间？

解析 依题意，得 $P_0(-1,2)$、$Q_0(-2,-2)$，所以 $\overrightarrow{P_0Q_0}=(-1,-3)$.

因为 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=(1,1)$，所以 $|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{2}$.因为 $3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2=(3,2)$，所以 $|3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{13}$.

所以当 t 时刻时，点 P 的位置为 $(-1+t,2+t)$，点 Q 的位置为 $(-2+3t,-1+2t)$.

所以 $\overrightarrow{PQ}=(-1+2t,-3+t)$.因为 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{P_0Q_0}$，所以 $(-1)\times(-1+2t)+(-3)\times(-3+t)=0$.

解得 $t=2$，所以用了 2 s.

点评 本题是一个以向量知识为背景的点运动问题.确定动点 P、Q 经过 t s时的位置坐标是解答本题的关键.

解题方略 关键要恰当地利用好平面向量的有关概念、性质及运算法则.

5.以解析几何中的直线、线性规划、圆锥曲线等知识为背景的应用题

【例6】 某实验室需购某种化工原料 106 kg，现在市场上该原料有两种包装，一种是每袋 35 kg，价格为 140 元；另一种是每袋 24 kg，价格为 120 元，在满足需要的条件下，最少要花费________元.

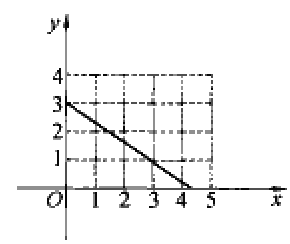


图 4

解析 设要 35 kg 化工原料 y 袋、24 kg 的化工原料 x 袋，其中 x、y 满足 $\begin{cases}24x+35y\geqslant 106\\ x\in\mathbf{N}^*,y\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，其费用 $Z=120x+140y$ 取最小值.由图 4 知，当 $\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$ 时，$Z_{\min}=500$ 元.

点评 这道应用题考查了线性规划中有关整数点的问题，其背景既源于教材又走近生活、贴近时代，不仅可以检测出考生将知识迁移到不同情境中的能力，而且可更有效地甄别考生的数学素养.

【例7】 在平面直角坐标系中，已知矩形 $ABCD$ 的长为 2，宽为 1，AB、AD 边分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，点 A 与坐标原点重合，如图5所示.将矩形折叠，使点 A 落在线段 DC 上.

（Ⅰ）若折痕所在直线的斜率为 k，试写出折痕所在直线的方程；

（Ⅱ）求折痕的长的最大值.

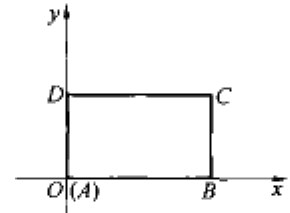


图 5

解析 见"（三）分类与整合思想"中的例 13.

点评 本题涉及函数的导数、函数的单调性和极值、直线的方程、对称等知识，渗透了数形结合与分类整合等数学思想方法，考查了思维能力、运算能力、实践能力和创新应用意识，具有一定的思维深度.解题时要切实把握几何图形的运动过程，并注意运动过程中的特殊位置，掌握在"动"中求"静"，在"静"中求"动"的一般规律.

【例 8】 学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验，设计方案如图 6 所示，航天器运行（按顺时针方向）的轨迹方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$，变轨（即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线）后返回的轨迹是以 y 轴为对称轴，$M(0,\frac{64}{7})$ 为顶点的抛物线的实线部分，降落点为 $D(8,0)$. 观测点 $A(4,0)$、$B(6,0)$ 同时跟踪航天器.

（Ⅰ）求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程；

（Ⅱ）试问当航天器在 x 轴上方时，观测点 A、B 测得离航天器的距离分别为多少时应向航天器发出变轨指令？

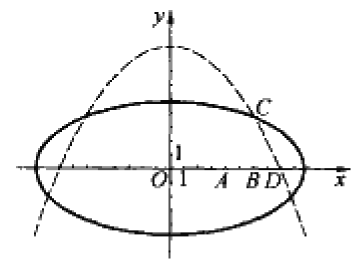


图 6

解析　（Ⅰ）设曲线方程为 $y=ax^2+\frac{64}{7}$，由题意可知 $0=a\cdot64+\frac{64}{7}$，所以 $a=-\frac{1}{7}$，所以曲线方程为 $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}$.

（Ⅱ）设变轨点为 $C(x,y)$，根据题意可知

$$\begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1\\ y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}\end{cases}$$

得 $4y^2-7y-36=0$，$y=4$ 或 $y=-\frac{9}{4}$（不合题意，舍去）.

所以 $y=4$，得 $x=6$ 或 $x=-6$（不合题意，舍去），所以点 C 的坐标为 $(6,4)$，$|AC|=2\sqrt{5}$，$|BC|=4$.

当观测点 A、B 测得 AC、BC 距离分别为 $2\sqrt{5}$、4 时，应向航天器发出变轨指令.

解题方略　解析几何应用题主要包括：线性规划问题、椭圆问题、双曲线问题、抛物线问题等. 解决这类问题，要在理解题意的基础上建构数学模型，利用线性规划、圆锥曲线的定义和性质等来求解相关问题.

6. 以立体几何知识为背景的应用题

【例 9】 将一个表面涂有红颜色的正方体积木，每个表面切成“#”字形，从而分成 27 个形状完全相同的小正方体，从中任取 1 个观察，则最有可能取到的是涂有______面红颜色的小正方体.

解析　在 27 个小正方体中，6 个涂有一面红色，8 个涂有三面红色，12 个涂有两面红色，1 个各面均无红色，所以取出两面涂有红色的概率 $P=\frac{C_{12}^1}{C_{27}^1}=\frac{4}{9}$ 为最大.

故最有可能取到的是涂有两面红颜色的小正方体.

点评　本题是立体几何与概率的综合应用题，题目中对概率的考查属隐性考查，即未明确提出求其概率，而是用“最有可能”的字眼，需要我们自己运用概率知识来解决问题. 由此例让我们进一步领悟“学以致用”，强化了“应用意识”.

【例 10】 如图 7，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=\sqrt{2}$，$BB_1=2$，$\angle ABC=90°$，E、F 分别为 AA_1、C_1B_1 的中点，沿棱柱的表面从 E 到 F 两点的最短路径的长度为______.

解析　本题主要考查空间距离转化为平面距离.

分别延长 BB_1、A_1C_1 和 A_1B_1 将 E、F 展开到同一平面内，则易得

$$EF=\sqrt{\frac{9}{2}+1}=\frac{\sqrt{22}}{2},\quad EF=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

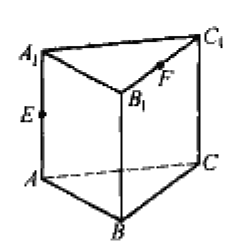


图 7

或
$$EF=\sqrt{2+\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4}}=\frac{\sqrt{16+4\sqrt{2}}}{2}$$

比较可得，最小值为$\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

点评 ① 将平面图形空间化是立体几何的另一种问题形式，大家知道在立体几何中许多问题都可进行空间图形平面化，即将一个个空间图形，通过所学的几何知识，转化成平面图形，最后使用平面几何的若干知识得以解决. 而本题却反其道而行之，所以在做法上就不能和上述的方法相同，但在本质上有许多相通之处，在这类题目中，尽量找出两图形变化过程中的相关联之处，哪些量变了，哪些量没有变，然后解决起来，就会顺手很多！

② 翻折问题的解题关键有二：一是画好两个图 —— 翻折前的平面图和翻折后生成的立体直观图；二是分析好两个关系 —— 翻折前后哪些位置关系和度量关系发生变化，哪些没有改变.

解题方略 求解此类问题的关键是：理解题意 → 构建几何图形 → 利用空间的点、线、面之间的关系处理. 方法有构建多面体模型、构建异面直线上两点间距离、构建几何的体积或面积模型、研究侧面展开图、用逆向思维分析问题、对几何图形进行割补等方法.

7. 以排列、组合、概率、统计等知识为背景的应用题

【例 11】 已知正四面体 $A-BCD$，有一只小虫自顶点 A 沿每一条棱以等可能的概率爬到另外三个顶点 B、C、D，然后又从 B、C、D 中的一个顶点沿每一条棱以等可能的概率爬到其他 3 个顶点，依次进行下去. 记 P_n 为第 n 次到顶点 A 的概率（小虫刚开始在点 A，此时算作第 1 次到 A，即记为 $P_1=1$）.

（Ⅰ）求 P_n 的通项公式；

（Ⅱ）求第 2 005 次爬行到顶点 A 的概率.

解析 （Ⅰ）由于第 n 次到顶点 A 是从 B、C、D 3 个顶点爬行而来，从其中任何一个顶点到达 A 的概率都是$\frac{1}{3}$，而第 $n-1$ 次在顶点 A 与小虫在顶点 B、C、D 是对立事件，因此，第 n 次到达顶点 A 的概率为 $P_n=\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$，即 $P_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}(P_{n-1}-\frac{1}{4})$.

因为 $P_1=1$，所以$\left\{P_n-\frac{1}{4}\right\}$是以 $P_1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，所以
$$P_n=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4},\quad n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}$$

故
$$\begin{cases}1, & n=1\\ \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}, & n\geqslant 2\end{cases}$$

（Ⅱ）第 2 005 次爬行到顶点 A 的概率 $P_{2005}=\frac{3}{4}\cdot(-\frac{1}{3})^{2005-1}+\frac{1}{4}\approx\frac{1}{4}$.

点评 本题是立体几何知识和概率、数列等知识融合.

【例 12】 某地最近出台一项机动车驾照考试规定：每位考试者一年内最多有 4 次参加考试的机会，一旦某次考试通过，便可领取驾照，不再参加以后的考试，否则就一直考到第 4 次为止. 如果李明决定参加驾照考试，设他每次参加考试通过的概率依次为 0.6、0.7、0.8、0.9. 求在一年内李明参加驾照考试次数 ξ 的分布列和 ξ 的期望，并求李明在一年内领到驾照的概率.

解析 ξ 的取值分别为 1,2,3,4. 当 $\xi=1$ 时，表明李明第一次参加驾照考试就通过了，故 $P(\xi=1)=0.6$；当 $\xi=2$ 时，表明李明在第一次考试未通过，第二次通过了，故 $P(\xi=2)=(1-0.6)\times0.7=0.28$；当 $\xi=3$ 时，表明李明在第一、二次考试都未通过，第三次通过了，故 $P(\xi=3)=(1-0.6)\times(1-0.7)\times0.8=0.009\,6$；当 $\xi=4$ 时，表明李明在第一、二、三次都未通过，故 $P(\xi=4)=(1-0.6)\times(1-0.7)\times(1-0.8)=0.024$，所以李明实际参加考试次数的分布如表 1

所示.

表 1

ξ	1	2	3	4
P	0.6	0.28	0.096	0.024

所以 ξ 的期望 $E\xi = 1\times0.6+2\times0.28+3\times0.096+4\times0.024=1.544$.

李明在一年内领到驾照的概率为 $1-(1-0.6)(1-0.7)(1-0.8)(1-0.9)=0.9976$.

点评　① 本小题主要考查随机变量的分布列和数学期望的概念和运算,以及运用概率统计的知识解决实际问题的能力.

② 离散型随机变量 ξ 的数学期望(包括方差)的运算是建立在其分布列基础上的,分布列的计算过程:确定 ξ 的可能取值以及取每一个值时所表示的意义;求出相应的概率 $P(\xi=k)$(利用等可能性事件、互斥事件、相互独立事件的概率等有关知识),此时应仔细分析题意,当概率分布不是熟知类型时,应全面地剖析各个随机变量所包含的各种事件,并准确判断各事件的相互关系,再由此求出各随机变量的概率;形成分布列(表格形式);检验分布列(从它的两个性质检查).只有一个准确的分布列,才能进行期望和方差的运算,除特殊分布列(如二项分布等)外,计算分布列是必不可少并且相当重要的过程.

解题方略　求解此类问题不论是思考方法还是解题方法都与其他内容有很大的不同,概念性强、抽象性强、灵活性强、思维方法新颖,具有一定的特殊性,排列组合应用题常以选择、填空题的身份出现,但概率与统计问题一般出现在解答题中,从教材改革和新高考的发展趋势来看,高考势必会对其加大考查力度且会常考常新.

[redacted]

解数学应用题首先要读懂题意,对于关键字、词、句、式等信息要咬文嚼字,仔细分析,捕捉题中的数学模型与数量关系.对于较复杂的数量关系,可根据事物类别、时间先后、问题的项目列出表格或作出草图,将复杂的数量关系清晰化.最后要联系问题的原始背景对所得结果进行检验,以确保所得结论具有实际意义.

（二十五）全国高考数学压轴题分类导析
—— 以“数列”为主体

高考是检测学生综合素质的“选拔性”考试，为让数学素质好的考生拿高分，命题者总会在编创若干压轴题上下足功夫．每年高考，各地命题专家、学者、资深教师集思广益、百“虑”千锤，创作出了不少独具匠心的压轴题．这些题新而不怪，活而不偏，综合而不繁琐，成为新高考数学教学的一笔宝贵财富，既有突出的选拔功能，又对中学数学具有良好的导向作用．

导读 数列既是高中数学的重要内容，又是学习高等数学的基础，在历年的高考中占有重要地位，常充当压轴题角色．近年高考数列压轴题考查的重点是与递推数列有关的知识和解题方法，特别突出考查递推、叠加、待定系数、分类讨论等重要数学思想方法和必要的逻辑推理能力、运算能力．在命题方向上以数列为载体，综合函数、方程、不等式、三角、解析几何等知识交汇处的内容，使其变得更具新意，更有效地考查灵活运用相关知识分析问题、解决问题的能力，考查学生的思维品质和创新意识．

【例 1】 已知 $a>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a$，$a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$，$n=1,2,\cdots$．

（Ⅰ）已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$（将 A 用 a 表示）；

（Ⅱ）设 $b_n=a_n-A$，$n=1,2,\cdots$．证明：$b_{n+1}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$；

（Ⅲ）若 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立，求 a 的取值范围．

解析 （Ⅰ）由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，且 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ (A>0)$，对 $a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ 两边取极限得 $A=a+\frac{1}{A}$，解得 $A=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$．又 $A>0$，所以 $A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$．

（Ⅱ）由 $a_n=b_n+A$，$a_{n+1}=a+\frac{1}{a_n}$ 得 $b_{n+1}+A=a+\frac{1}{b_n+A}$，所以

$$b_{n+1}=a-A+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{1}{A}+\frac{1}{b_n+A}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$$

即 $b_{n+1}=-\frac{b_n}{A(b_n+A)}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立．

（Ⅲ）**解法 1** 令 $|b_1|\leqslant\frac{1}{2}$，得

$$\left|a-\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4})\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

所以

$$\left|\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

所以 $\sqrt{a^2+4}-a\leqslant1$，解得 $a\geqslant\frac{3}{2}$．

现证明当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时，$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立．

① 当 $n=1$ 时结论成立(已验证).

② 假设当 $n=k(k\geqslant 1)$ 时结论成立,即 $|b_k|\leqslant \frac{1}{2^k}$,那么

$$|b_{k+1}|=\frac{|b_k|}{|A(b_k+A)|}\leqslant\frac{1}{A|b_k+A|}\times\frac{1}{2^k}$$

故只须证明$\frac{1}{A|b_k+A|}\leqslant\frac{1}{2}$,即证 $A|b_k+A|\geqslant 2$ 对 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 成立.

由于 $A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}=\frac{2}{\sqrt{a^2+4}-a}$,而当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时,$\sqrt{a^2+4}-a\leqslant 1$,所以 $A\geqslant 2$.

所以 $|b_k+A|\geqslant A-|b_k|\geqslant 2-\frac{1}{2^k}\geqslant 1$,即 $A|b_k+A|\geqslant 2$.

故当 $a\geqslant\frac{3}{2}$ 时,$|b_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k+1}}$.

即 $n=k+1$ 时结论成立.

根据 ① 和 ② 可知结论对一切正整数都成立.

故 $|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立的 a 的取值范围为$[\frac{3}{2},+\infty)$.

解法 2 由(Ⅰ)求得 $A=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$,所以 $-\frac{1}{A}=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$.所以

$$a-A=-\frac{1}{A},a+\frac{1}{A}=A,A^2=\frac{a^2+2+a\sqrt{a^2+4}}{2},A+\frac{1}{A}=\sqrt{a^2+4}$$

所以

$$a_{n+1}-A=a+\frac{1}{a_n}-A=\frac{a_n-A}{-Aa_n},a_{n+1}+\frac{1}{A}=a+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{A}=\frac{Aa_n+1}{a_n}$$

因此

$$\frac{a_{n+1}-A}{a_{n+1}+\frac{1}{A}}=\frac{-\frac{1}{A}a_n+1}{Aa_n+1}=-\frac{1}{A^2}\cdot\frac{a_n-A}{a_n+\frac{1}{A}}$$

所以$\left\{\frac{a_n-A}{a_n+\frac{1}{A}}\right\}$是以$\frac{a_1-A}{a_1+\frac{1}{A}}=-\frac{1}{A^2}$ 为首项,$-\frac{1}{A^2}$ 为公比的等比数列,故$\frac{a_n-A}{a_n+\frac{1}{A}}=(-\frac{1}{A^2})^n$.再将 $a_n=b_n+A$ 代入上式,得 $b_n=\frac{\sqrt{a^2+4}}{(-A^2)^n-1}$.

因为$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立,所以$|b_1|=|a-A|\leqslant\frac{1}{2}$,即$\left|\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$,得 $a\geqslant\frac{3}{2}$.

从而 $A^2\geqslant\frac{(\frac{3}{2})^2+2+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2}=4$,即 $A\geqslant 2$,所以$|b_n|=\begin{cases}\frac{\sqrt{a^2+4}}{A^{2n}+1}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{\sqrt{a^2+4}}{A^{2n}-1}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$.

当 n 为奇数时,$|b_n|\leqslant\frac{1}{2^n}$ 可变为$(\frac{A^2}{2})^n+(\frac{1}{2})^n\geqslant\sqrt{a^2+4}$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立,设 $C_n=\left(\frac{A^2}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$,则

$$\frac{C_{n+1}}{C_n}=\frac{\left(\frac{A^2}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{A^2}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{A^{2n+2}+1}{2A^{2n}+2}\geqslant\frac{4A^{2n}+1}{2A^{2n}+2}>\frac{2A^{2n}+2}{2A^{2n}+2}=1$$

所以 $C_{n+1} > C_n$,所以 $\{C_n\}$ 为递增数列.

当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时,$C_1 \geqslant \sqrt{a^2+4}$ 已成立,故 n 为奇数时已满足 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

当 n 为偶数时,$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 恒成立,化为 $f(n) = (\frac{A^2}{2})^n - (\frac{1}{2})^n \geqslant \sqrt{a^2+4}$ 恒成立.

因为 $\frac{A^2}{2} > 2$,所以 $f(n) = (\frac{A^2}{2})^n - (\frac{1}{2})^n$ 为递增数列,故只须 $f(2) \geqslant \sqrt{a^2+4}$.

而 $f(2) = \left(\frac{A^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{A^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{A^2}{2} + \frac{1}{2}\right) > \frac{A^2}{2} + \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{a^2+4}$ 也成立,故 n 为偶数时已满足 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

综上,当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时,有 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 恒成立.

点评 这道压轴题是一道数列题,内容涉及递推数列、数列极限(极限存在求极限化归为解方程)、数列恒等式的证明、不等式的证明(归纳法、放缩法),"三问"各有侧重,特别是第三问,其目的是考查我们灵活运用数学知识去分析问题、解决问题的能力.其中前两问主要考查基本概念及运算技能,第一问即考查数列极限的定义,只须抓住 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,再结合解方程便迎刃而解.但有些考生对这些概念问题不是很重视,按思维定式试图由递推关系推导出通项公式,能力强的考生可能用此法勉强解决,但运算量大,得不偿失;第二问实际上是基本的数学式的变形,应该是这三问中最简单的一问,在第一问未解决的情况下,也应能完成,可实施"跳步解答",本问的分数应该分段智取;第三问实质是用数学归纳法证明不等式,但入口较难,首先要用到第一问得出的 A 值,还要联想第二问递推关系式,从而选择使用数学归纳法,形式新颖,对考生思维层次要求极高!

此题的设计同时顺应了今年高考《数学考试大纲》中首次提出的个性品质要求:"以实事求是的科学态度解答试题,树立战胜困难的信心,体现锲而不舍的精神."试想当同学们不能顺利解出第一问时,还会心平气和地做好第二问吗?这里正是考查我们是否具有良好个性品质之匠心所在!

[illegible]

【例2】 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}(n = 1,2,3,\cdots)$.

(Ⅰ)证明:$a_n > \sqrt{2n+1}$ 对一切正整数 n 成立;

(Ⅱ)令 $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{n}}(n = 1,2,3,\cdots)$,判断 b_n 与 b_{n+1} 的大小,并说明理由.

解析 本小题重点考查数列与不等式等知识.

(Ⅰ)**证法1** 当 $n = 1$ 时,$a_1 = 2 > \sqrt{2\times1+1}$,不等式成立.

假设 $n = k$ 时,$a_k > \sqrt{2k+1}$ 成立.当 $n = k+1$ 时

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + \frac{1}{a_k^2} + 2 > 2k+3+\frac{1}{a_k^2} > 2(k+1)+1$$

所以当 $n = k+1$ 时,$a_{k+1} > \sqrt{2(k+1)+1}$ 时成立.

综上由数学归纳法可知,$a_n > \sqrt{2n+1}$ 对一切正整数成立.

证法2 当 $n = 1$ 时,$a_1 = 2 > \sqrt{3} = \sqrt{2\times1+1}$,结论成立.

假设当 $n = k$ 时结论成立,即 $a_k > \sqrt{2k+1}$.

当 $n = k+1$ 时,由函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}(x > 1)$ 的单调性和归纳假设有

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k} > \sqrt{2k+1} + \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

因此只须证$\sqrt{2k+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}\geqslant\sqrt{2k+3}$.

而这等价于$\left(\sqrt{2k+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}\right)^2\geqslant 2k+3\Leftrightarrow\dfrac{1}{2k+1}\geqslant 0$显然成立.

所以当$n=k+1$时,结论成立.因此,$a_n>\sqrt{2n+1}$对一切正整数n均成立.

证法3　由递推公式得

$$a_n^2=a_{n-1}^2+2+\frac{1}{a_{n-1}^2},a_{n-1}^2=a_{n-2}^2+2+\frac{1}{a_{n-2}^2},\cdots,a_2^2=a_1^2+2+\frac{1}{a_1^2}$$

上述各式相加并化简得

$$a_n^2=a_1^2+2(n-1)+\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}>2^2+2(n-1)=2n+2>2n+1,\quad n\geqslant 2$$

又当$n=1$时,$a_n>\sqrt{2n+1}$明显成立,故$a_n>\sqrt{2n+1}(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅱ)**解法1**　$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{a_{n+1}\sqrt{n}}{a_n\sqrt{n+1}}=\left(1+\dfrac{1}{a_n^2}\right)\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}<\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=$

$$\frac{2(n+1)\sqrt{n}}{(2n+1)\sqrt{n+1}}=\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}=\frac{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}{n+\frac{1}{2}}<1$$

故$b_{n+1}<b_n$.

解法2　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)-\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}=$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}a_n}[\sqrt{n}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})a_n^2]\leqslant$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}a_n}[\sqrt{n}-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(2n+1)]\text{(由(Ⅰ)的结论)}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n}[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-(2n+1)]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n}[\sqrt{n(n+1)}-(n+1)]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})a_n}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})<0$$

所以$b_{n+1}<b_n$.

解法3　$b_{n+1}^2-b_n^2=\dfrac{a_{n+1}^2}{n+1}-\dfrac{a_n^2}{n}=$

$$\frac{1}{n+1}\left(a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2\right)-\frac{a_n^2}{n}=\frac{1}{n+1}\left(2+\frac{1}{a_n^2}-\frac{a_n^2}{n}\right)<$$

$$\frac{1}{n+1}\left(2+\frac{1}{2n+1}-\frac{2n+1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}\right)<0$$

故$b_{n+1}^2<b_n^2$,因此$b_{n+1}<b_n$.

点评　应用数学归纳法证明问题,要按照其步骤,特别是利用假设证$n=k+1$成立,步骤要清晰、明确.由于数列是一种特殊的函数,可利用函数的单调性解决比较两数式的大小,一般采用作商作差等方式解决并灵活运用放缩法.

[redacted]

设$a_1=2,a_2=\dfrac{5}{3},a_{n+2}=\dfrac{5}{3}a_{n+1}-\dfrac{2}{3}a_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)令 $b_n = a_{n+1} - a_n (n = 1,2,\cdots)$,求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)求数列$\{na_n\}$的前 n 项和S_n.

提示 解决数列综合问题要深刻理解题意,利用递推公式寻求思路、明确数列特征.(Ⅰ)$b_n = (\frac{2}{3})^n (n = 1,2,\cdots)$;(Ⅱ)$S_n = \frac{3}{2}n(n+1) + \frac{(3+n)2^{n+1}}{3^{n-1}} - 18$.

【例 3】 已知数列$\{a_n\}$中 $a_1 = 1$,且 $a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k$,$a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k$,其中 $k = 1,2,3,\cdots$.

(Ⅰ)求 a_3、a_5;(Ⅱ)求$\{a_n\}$的通项公式.

解析 本小题主要考查数列、递推数列、求前 n 项、求通项式、等比数列的概念和基本知识,考查运算能力以及分析、归纳和推理能力,考查学生分类讨论的数学思想,对学生的能力有较高要求.相邻两项的递推关系,可化归为奇、偶项数列讨论.

(Ⅰ)$a_2 = a_1 + (-1)^1 = 0$,$a_3 = a_2 + 3^1 = 3$,$a_4 = a_3 + (-1)^2 = 4$,$a_5 = a_4 + 3^2 = 13$.

所以 $a_3 = 3$,$a_5 = 13$.

(Ⅱ)**解法 1**
$$a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k = a_{2k-1} + (-1)^k + 3^k$$

所以
$$a_{2k+1} - a_{2k-1} = 3^k + (-1)^k$$

同理
$$a_{2k-1} - a_{2k-3} = 3^{k-1} + (-1)^{k-1},\cdots,a_3 - a_1 = 3 + (-1)$$

所以
$$(a_{2k+1} - a_{2k-1}) + (a_{2k-1} - a_{2k-3}) + \cdots + (a_3 - a_1) =$$
$$(3^k + 3^{k-1} + \cdots + 3) + [(-1)^k + (-1)^{k-1} + \cdots + (-1)]$$

由此得
$$a_{2k+1} - a_1 = \frac{3}{2}(3^k - 1) + \frac{1}{2}[(-1)^k - 1]$$

于是
$$a_{2k+1} = \frac{3^{k+1}}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k - 1$$

$$a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k = \frac{3^k}{2} + \frac{1}{2}(-1)^{k-1} - 1 + (-1)^k = \frac{3^k}{2} + \frac{1}{2}(-1)^k - 1$$

$\{a_n\}$的通项公式为:

当 n 为奇数时,$a_n = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \frac{1}{2} - 1$;当 n 为偶数时,$a_n = \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2} + (-1)^{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{2} - 1$.

解法 2 $a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k = a_{2k-1} + (-1)^k + 3^k = \cdots =$

$$a_1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^k + 3^k + 3^{k-1} + \cdots + 3 =$$
$$(-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^k + 3^k + 3^{k-1} + \cdots + 3 + 1 =$$
$$\frac{1}{2} \cdot 3^{k+1} + \frac{1}{2}(-1)^k - 1$$

同理
$$a_{2k} = \frac{1}{2} \cdot 3^k + \frac{1}{2}(-1)^k - 1$$

因此
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} - 1, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n}{2}} - 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

解法 3 因 $a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k$,故当 k 为奇数时,$a_{2k} = a_{2k-1} - 1$,当 k 为偶数时,$a_{2k} = a_{2k-1} + 1$.另外由 $a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k$ 可得

$$a_{4k+4} = a_{4k+3} + 1 = a_{4k+2} + 3^{2k+1} + 1 = (a_{4k+1} - 1) + 3^{2k+1} + 1 = a_{4k+1} + 3^{2k+1} =$$
$$(a_{4k} + 3^{2k}) + 3^{2k+1} = a_{4k} + 4 \cdot 3^{2k}$$

所以 $a_{4k+4} - a_{4k} = 4 \cdot 3^{2k}$,所以

$$a_{4k+4} = a_4 + (a_8 - a_4) + (a_{12} - a_8) + \cdots + (a_{4k+4} - a_{4k}) =$$

$$4+4\cdot 3^2+4\cdot 3^4+4\cdot 3^6+\cdots+4\cdot 3^{2k}=4\cdot\frac{3^{2(k+1)}-1}{3^2-1}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2(k+1)}-\frac{1}{2}$$

所以 $a_{4k}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k}-\frac{1}{2}$，所以

$$a_{4k+1}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k}-\frac{1}{2}+3^{2k}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k+1}-\frac{1}{2}$$

$$a_{4k+2}=a_{4k+1}-1=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k+1}-\frac{3}{2},\ a_{4k+3}=a_{4k+2}+3^{2k+1}=\frac{1}{2}\cdot 3^{2k+2}-\frac{3}{2}$$

由上可得 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n+1}{2}}-\frac{1}{2}, & n=4k+1\\ \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n}{2}}-\frac{3}{2}, & n=4k+2\\ \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n+1}{2}}-\frac{3}{2}, & n=4k+3\\ \frac{1}{2}\cdot 3^{\frac{n}{2}}-\frac{1}{2}, & n=4k+4\end{cases}$$

点评　求数列的通项公式关键是寻找项与项数之间的关系.

【例4】　如图1，$\triangle OBC$ 的三个顶点坐标分别为(0,0)、(1,0)、(0,2)，设 P 为线段 BC 的中点，P_2 为线段 CO 的中点，P_3 为线段 OP_1 的中点，对于每一个正整数 n，P_{n+3} 为线段 P_nP_{n+1} 的中点，令 P_n 的坐标为 (x_n, y_n)，$a_n=\frac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}$.

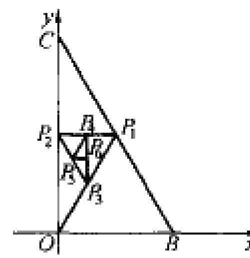


图 1

(Ⅰ) 求 a_1、a_2、a_3 及 a_n；

(Ⅱ) 证明：$y_{n+4}=1-\frac{y_n}{4}$，$n\in\mathbf{N}^*$；

(Ⅲ) 若记 $b_n=y_{4n+4}-y_{4n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\{b_n\}$ 是等比数列.

解析　本题考查数列的递推关系、等比数列等基础知识，考查知识的综合运用和解决问题的创新能力.

(Ⅰ) 因为 $y_1=y_2=y_4=1$，$y_3=\frac{1}{2}$，$y_5=\frac{3}{4}$，所以 $a_1=a_2=a_3=2$. 又由题意可知 $y_{n+3}=\frac{y_n+y_{n+1}}{2}$，所以

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}y_{n+1}+y_{n+2}+y_{n+3}=\frac{1}{2}y_{n+1}+y_{n+2}+\frac{y_n+y_{n+1}}{2}=$$
$$\frac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}=a_n$$

所以 $\{a_n\}$ 为常数列，所以 $a_n=a_1=2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(Ⅱ) 将等式 $\frac{1}{2}y_n+y_{n+1}+y_{n+2}=2$ 两边除以2，得 $\frac{1}{4}y_n+\frac{y_{n+1}+y_{n+2}}{2}=1$.

又因为 $y_{n+4}=\frac{y_{n+1}+y_{n+2}}{2}$，所以 $y_{n+4}=1-\frac{y_n}{4}$.

(Ⅲ) 因为

$$b_{n-1}=y_{4n+8}-y_{4n+4}=\left(1-\frac{y_{4n+4}}{4}\right)-\left(1-\frac{y_{4n}}{4}\right)=-\frac{1}{4}(y_{4n+4}-y_{4n})=-\frac{1}{4}b_n$$

又因为 $b_1=y_3-y_4=-\frac{1}{4}\neq 0$，所以 $\{b_n\}$ 是公比为 $-\frac{1}{4}$ 的等比数列.

点评　本题以坐标为载体，以数列为主体内容，将解析几何、平面几何与数列的相关知识合而为一，充分体现了高考《数学考试大纲》所要求的"注重学科知识的内在联系".

（二十六）全国高考数学压轴题分类导析
——以“函数、不等式”为主体

导读　“函数”和“不等式”是高中数学中起联结和支撑作用的主干知识，是贯穿于高中数学的一条主线，其知识点多、覆盖面广、思想丰富、综合性强，极易与其他知识（方程、数列等）建立相关联系，相互渗透和交叉．正因如此，历年高考以“函数、不等式”为主体内容的压轴题频频出现，且常考常新．特别是新高考增加了“导数”和“向量”等内容之后，给函数和不等式问题注入了新的生机和活力，开辟了许多新的解题途径，同时也拓宽了高考对函数和不等式问题的命题空间．

【例 1】　已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足下列条件：对任意的实数 x_1、x_2 都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$，其中 λ 是大于 0 的常数．设实数 a_0、a、b 满足 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$．

（Ⅰ）证明：$\lambda\leqslant1$，并且不存在 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$；

（Ⅱ）证明：$(b-a_0)^2\leqslant(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$；

（Ⅲ）证明：$[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$．

解析　利用绝对值不等式及反证法等思想方法解决此类问题较方便．

（Ⅰ）任取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，则由

$$\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\qquad①$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|\qquad②$$

可知

$$\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant|x_1-x_2|\cdot|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|^2$$

从而 $\lambda\leqslant1$．假设有 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$，则由式①知 $0<\lambda(a_0-b_0)^2\leqslant(a_0-b_0)[f(a_0)-f(b_0)]=0$，矛盾，所以不存在 $b_0\neq a_0$，使得 $f(b_0)=0$．

（Ⅱ）由

$$b=a-\lambda f(a)\qquad③$$

可知

$$(b-a_0)^2=[a-a_0-\lambda f(a)]^2=(a-a_0)^2-2\lambda(a-a_0)f(a)+\lambda^2[f(a)]^2\qquad④$$

由 $f(a_0)=0$ 和式①，得

$$(a-a_0)f(a)=(a-a_0)[f(a)-f(a_0)]\geqslant\lambda(a-a_0)^2\qquad⑤$$

由 $f(a_0)=0$ 和式②知

$$[f(a)]^2=[f(a)-f(a_0)]^2\leqslant(a-a_0)^2\qquad⑥$$

将⑤⑥代入式④，得

$$(b-a_0)^2\leqslant(a-a_0)^2-2\lambda^2(a-a_0)^2+\lambda^2(a-a_0)^2=(1-\lambda^2)(a-a_0)^2$$

（Ⅲ）由式③可知

$$[f(b)]^2=[f(b)-f(a)+f(a)]^2=[f(b)-f(a)]^2+2f(a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\leqslant$$

$$(b-a)^2-2\cdot\frac{b-a}{\lambda}[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2(\text{用式②})=$$

$$\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}(b-a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\leqslant$$

$$\lambda^2[f(a)^2-\frac{2}{\lambda}\cdot\lambda\cdot(b-a)^2+[f(a)]^2(\text{用式①})=$$

$$\lambda^2[f(a)]^2-2\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2=(1-\lambda^2)[f(a)]^2$$

点评 对于第(Ⅰ)问,由于题设明显,使得入口难度大为下降,因而对基本功比较扎实的考生来说,较易得分.

对于第(Ⅱ)问,为使用题设,减少不等式两边的差异而实施消元、化归、添项是解题的突破口.

对于第(Ⅲ)问,与第(Ⅱ)问的思路基本相同,需从整体上把握函数 $f(x)$ 的性质,但代换要求更高(逆向代换),且加、减项代换更为灵活.实际上(Ⅱ)和(Ⅲ)的关系是特殊和一般的关系.

这道压轴题设计新颖、构思精巧,"既有高等数学的深刻背景,又有数学分析的方法要求".它以抽象函数为载体,综合考查函数、不等式的证明等热点问题.涉及的数学思想方法主要有分析法、特值法、反证法、消参法、拆项添项法、放缩法、分类讨论法、等价转换思想等,此题运算量较大,能力要求较高,从题意的理解到解题对考生而言都有一定的难度,体现了新高考对考生能力考查的新要求(以逻辑思维能力为核心,全面考查各种能力,强调探究性、综合性应用),综合考查考生的阅读、理解、观察、分析、抽象、概括、推理等数学思维能力,对数学思维品质提出了极高要求.是抽象思维、逻辑思维、数学技巧的全面检测,尤其需要考生具备很强的分析问题的能力,并能灵活运用函数、不等式的综合知识.

解答该题,需认真审读试题,要有整体意识和目标意识.

妙解品评 (Ⅰ)当 $x_1\neq x_2$ 时,由已知及绝对值不等式的性质易得

$$\lambda\leqslant\frac{(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]}{(x_1-x_2)^2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leqslant\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leqslant 1$$

即对任意的两个不相等的实数 x_1、x_2,都有

$$\lambda\leqslant\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leqslant 1 \quad ①$$

由上面的不等式易知 $\lambda\leqslant 1$.假设存在 $b_0\neq a_0$,使得 $f(b_0)=0$,则在①中令 $x_1=b_0,x_2=a_0$,由于 $f(b_0)-f(a_0)=0$,故此时式①不能成立,矛盾.故不存在 $b_0\neq a_0$,使得 $f(b_0)=0$.

(Ⅱ)若 $a=a_0$,则 $b=a=a_0$,不等式显然成立;若 $a\neq a_0$,则

$$\left(\frac{b-a_0}{a-a_0}\right)^2=\left(\frac{a-\lambda f(a)-a_0+\lambda f(a_0)}{a-a_0}\right)^2=\left(1-\lambda\frac{f(a)-f(a_0)}{a-a_0}\right)^2\leqslant(1-\lambda^2)^2\leqslant 1-\lambda^2$$

变形即得所证不等式.

(Ⅲ)若 $b=a$,则 $a=a_0$,不等式显然成立;若 $b\neq a$,则令 $x_1=b,x_2=a$,代入式①得 $\lambda\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant 1$,将 $b-a=-\lambda f(a)$ 代入上式,并变形得 $-\lambda\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}\leqslant-\lambda^2$,于是

$$0\leqslant 1-\lambda\leqslant\frac{f(b)}{f(a)}\leqslant 1-\lambda^2$$

故

$$\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|\leqslant 1-\lambda^2$$

从而

$$[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)^2[f(a)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$$

以上证法,抓住了问题的本质特征,在众多字母中抓住最关键的 λ,进而采用分离参变量法,一气呵成,一石三鸟,令人叫绝.考生的能力在本解法中展现得淋漓尽致,足见该考生之水平非同一般.

此外,由该证法,我们还可将后两问结论加强为:

(Ⅱ)$\left|\frac{b-a_0}{a-a_0}\right|\leqslant 1-\lambda^2$;

(Ⅲ) $\left|\dfrac{f(b)}{f(a)}\right| \leqslant 1-\lambda^2$.

本题意境深远,解法较多,但无论从何处入手,其关键在于将题目所给条件几何化,应用数形结合的思想,结合函数、解析几何、不等式等相关知识方可迅速获解.

【例 2】 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x, g(x)=x\ln x$.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的最大值;

(Ⅱ)设 $0<a<b$,证明:$0<g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<(b-a)\ln 2$.

解析 本小题主要考查导数的基本性质和应用、对数函数性质和均值不等式等知识以及综合推理论证的能力.

(Ⅰ)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1$. 令 $f'(x)=0$,解得 $x=0$.

当 $-1<x<0$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>0$ 时,$f'(x)<0$;又 $f(0)=0$,故当且仅当 $x=0$ 时,$f(x)$ 取得最大值,最大值为 0.

(Ⅱ)**证法 1** $g(x)=x\ln x, g'(x)=\ln x+1$. 设 $F(x)=g(a)+g(x)-2g\left(\dfrac{a+x}{2}\right)$,则

$$F'(x)=g'(x)-2\left[g\left(\frac{a+x}{2}\right)\right]'=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}$$

当 $0<x<a$ 时,$F'(x)<0$,在此 $F(x)$ 在 $(0,a)$ 内为减函数.

当 $x>a$ 时,$F'(x)>0$,因此 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上为增函数.

从而,当 $x=a$ 时,$F(x)$ 有极小值 $F(a)$.

因此 $F(a)=0, b>a$,所以 $F(b)>0$,即 $0<g(a)+g(b)-2g(\dfrac{a+b}{2})$.

设 $G(x)=F(x)-(x-a)\ln 2$,则

$$G'(x)=\ln x-\ln\frac{a+x}{2}-\ln 2=\ln x-\ln(a+x)$$

当 $x>0$ 时,$G'(x)<0$,因此 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数.

因为 $G(a)=0, b>a$,所以 $G(b)<0$,即 $g(a)+g(b)-2g(\dfrac{a+b}{2})<(b-a)\ln 2$.

点评 本题第(Ⅰ)问是个常规问题,只须对函数求导数,再令导数等于 0 即可求得函数 $f(x)$ 的最大值.这一问承前启后,既能使考查继续深入,达到一定的深度;同时又能化解难度,使众多考生容易入手,保持一定的区分度,使不同考生的水平都能得到充分的发挥,从而达到合理区分不同层次考生的目的.第(Ⅱ)问有一定的难度,可考虑用导数法证,应用导数法证明不等式的一个通行办法是设辅助函数,本题是在一个区间上证明不等式,而不等式涉及的变量就是两个区间的端点,因此设辅助函数时就要把其中的一个端点设为自变量.

也可用初等数学方法证明,但要注意应用第(Ⅰ)问的结论.

证法 2 $g(a)+g(b)-2g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=a\ln a+b\ln b-(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2}=a\ln\dfrac{2a}{a+b}+b\ln\dfrac{2b}{a+b}$

由(Ⅰ)结论知 $\ln(1+x)-x<0(x>-1$,且 $x\neq 0)$,由题设 $0<a<b$,得 $\dfrac{b-a}{2a}>0$, $-1<\dfrac{a-b}{2b}<0$,因此

$$\ln\frac{2b}{a+b}=-\ln(1+\frac{b-a}{2a})>-\frac{b-a}{2a},\ln\frac{2b}{a+b}=-\ln(1+\frac{a-b}{2b})>-\frac{a-b}{2b}$$

所以
$$a\ln\frac{2a}{a+b}+b\ln\frac{2b}{a+b}>-\frac{b-a}{2}-\frac{a-b}{2}=0$$

又 $\dfrac{2a}{a+b}<\dfrac{a+b}{2b}$, $a\ln\dfrac{2a}{a+b}+b\ln\dfrac{2b}{a+b}<a\ln\dfrac{a+b}{2b}+b\ln\dfrac{2b}{a+b}=(b-a)\ln\dfrac{2b}{a+b}<(b-a)\ln 2$

综上得
$$0 < g(a) + g(b) - 2g(\frac{a+b}{2}) < (b-a)\ln 2$$

【例 3】 已知函数 $f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$，将满足 $f'(x) = 0$ 的所有正数 x 从小到大排成数列 $\{x_n\}$.

（Ⅰ）证明：数列 $\{f(x_n)\}$ 为等比数列；

（Ⅱ）记 S_n 是数列 $\{x_n f(x_n)\}$ 的前 n 项和，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}$.

解析　对 $f(x)$ 求导之后，令 $f'(x) = 0$，解方程得 x_n，易证（Ⅰ）；进而求出 S_n，再用错位相减法求和.

（Ⅰ）
$$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x) + e^{-x}(-\sin x + \cos x) = -2e^{-x}\sin x$$

由 $f'(x) = 0$，得 $-2e^{-x}\sin x = 0$. 解出 $x = n\pi$，n 为整数，从而 $x_n = n\pi, n = 1,2,3,\cdots$.
$$f(x_n) = (-1)^n e^{-n\pi}. \frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)} = -e^{-\pi}$$

所以数列 $\{f(x_n)\}$ 是公比 $q = -e^{-\pi}$ 的等比数列，且首项 $f(x_1) = q$.

（Ⅱ）
$$S_n = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) = \pi q(1 + 2q + \cdots + nq^{n-1})$$
$$qS_n = \pi q(q + 2q^2 + \cdots + nq^n)$$
$$S_n - qS_n = \pi q(1 + 2q^2 + \cdots + q^{n-1} - nq^n) = \pi q(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n)$$

从而
$$S_n = \frac{\pi q}{1-q}\left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n\right)$$

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} = \frac{\pi q}{(1-q)^2} - \frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}(1 + q + \cdots + q^{n-1}) - \frac{\pi q^2}{n(1-q)}(1 + 2q + \cdots + nq^{n-1}) =$$
$$\frac{\pi q}{(1-q)^2} - \frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}\frac{1-q^n}{1-q} - \frac{\pi q^2}{n(1-q)^2}(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n) =$$
$$\frac{\pi q}{(1-q)^2} - \frac{2\pi q^2}{n(1-q)^3}(1-q^n) + \frac{\pi q^{n+2}}{(1-q)^2}$$

因为 $|q| = e^{-\pi} < 1, \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} = \frac{\pi q}{(1-q)^2} = \frac{-\pi e^{\pi}}{(e^{\pi}+1)^2}$$

点评　这道题是函数、数列、导数、三角、极限等内容的完美结合，几乎涉及高中代数部分（复数除外）的所有知识，成为一道思维难度较大的综合题. 通过错位相减法求数列前 n 项和以考查数学中的方程思想，而在求和的过程中，通过大运算量考查学生的运算能力及是否具有良好的个性品质. 此类综合题是新高考考查的重点及热点. 请各位老师和同学们予以重视！

[redacted]

1. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + a)(a > 0)$.

（Ⅰ）求函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$；

（Ⅱ）假设对任意 $x \in [\ln(3a), \ln(4a)]$，不等式 $|m - f^{-1}(x)| + \ln(f'(x)) < 0$ 成立，求实数 m 的取值范围.

解析　本小题主要考查反函数、指数函数和对数函数的基础知识，导数的概念和计算，以及运用函数的性质分析问题和解决问题的能力. 利用对数函数的复合函数导数公式求解.

（Ⅰ）由 $y = f(x) = \ln(e^x + a)$ 得 $x = \ln(e^y - a)$，所以
$$y = f^{-1}(x) = \ln(e^x - a), x > \ln a, f'(x) = [\ln(e^x + a)]' = \frac{e^x}{e^x + a}$$

(Ⅱ)**解法1** 由已知 $|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$ 得

$$-\ln\frac{e^x+a}{e^x}+\ln(e^x-a)<m<\ln(e^x-a)+\ln\frac{e^x+a}{e^x}$$

即对于 $x\in[\ln 3a,\ln 4a]$ 恒有

$$\frac{e^x(e^x-a)}{(e^x+a)}<e^m<\frac{(e^x)^2-a^2}{e^x} \quad ①$$

设 $t=e^x,u(t)=\dfrac{t(t-a)}{t+a},v(t)=\dfrac{t^2-a^2}{t}$,于是不等式①化为

$$u(t)<e^m<v(t),t\in[3a,4a] \quad ②$$

当 $t_1<t_2,t_1、t_2\in[3a,4a]$ 时

$$u(t_2)-u(t_1)=\frac{t_2(t_2-a)}{t_2+a}-\frac{t_1(t_1-a)}{t_1+a}=\frac{(t_2-t_1)[t_1t_2+a(t_1+t_2)-a^2]}{(t_1+a)(t_2+a)}>0$$

$$v(t_2)-v(t_1)=\frac{t_2^2-a^2}{t_2}-\frac{t_1^2-a^2}{t_1}=\frac{t_1t_2(t_2-t_1)-a^2(t_2-t_1)}{t_1t_2}>0$$

所以 $u(t)、v(t)$ 都是增函数.

因此当 $t\in[3a,4a]$ 时,$u(t)$ 的最大值为 $u(4a)=\dfrac{12}{5}a$,$v(t)$ 的最小值为 $v(3a)=\dfrac{8}{3}a$,而不等式②成立当且仅当 $u(4a)<e^m<v(3a)$,即

$$\frac{12}{5}a<e^m<\frac{8}{3}a$$

于是得

$$\ln(\frac{12}{5}a)<m<\ln(\frac{8}{3}a)$$

解法2 由 $|m-f^{-1}(x)|+\ln(f'(x))<0$ 得

$$\ln(e^x-a)-\ln(e^x+a)+x<m<\ln(e^x-a)+\ln(e^x+a)-x$$

设 $\varphi(x)=\ln(e^x-a)-\ln(e^x+a)+x,\psi(x)=\ln(e^x-a)+\ln(e^x+a)-x$,于是原不等式对于 $x\in[\ln 3a,\ln 4a]$ 恒成立等价于

$$\varphi(x)<m<\psi(x) \quad ③$$

由 $\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-a}-\dfrac{e^x}{e^x+a}+1,\psi'(x)=\dfrac{e^x}{e^x-a}+\dfrac{e^x}{e^x+a}-1$,注意到 $0<e^x-a<e^x<e^x+a$,故 $\varphi'(x)>0,\psi'(x)>0$,从而可知 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 均在 $[\ln 3a,\ln 4a]$ 上单调递增,因此不等式③成立当且仅当 $\varphi(\ln 4a)<m<\psi(\ln 3a)$,即 $\ln\dfrac{12}{5}a<m<\ln\dfrac{8}{3}a$.

2.给定有限个正数满足条件 T:每个数都不大于50且总和 $L=1\,275$.现将这些数按下列要求进行分组,每组数之和不大于150且分组的步骤是:

首先,从这些数中选择这样一些数构成第一组,使得150与这组数之和的差 r_1 与所有可能的其他选择相比是最小的,r_1 称为第一组余差;

然后,在去掉已选入第一组的数后,对余下的数按第一组的选择方式构成第二组,这时的余差为 r_2;如此继续构成第三组(余差为 r_3),第四组(余差为 r_4),……,直至第 N 组(余差为 r_N)把这些数全部分完为止.

(Ⅰ)判断 $r_1,r_2,\cdots,r_N$ 的大小关系,并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数;

(Ⅱ)当构成第 $n(n<N)$ 组后,指出余下的每个数与 r_n 的大小关系,并证明 $r_{n-1}>\dfrac{150n-L}{n-1}$;

(Ⅲ)对任何满足条件 T 的有限个正数,证明:$N\leqslant 11$.

解析 本小题主要考查不等式的证明等基本知识,考查逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力.正确理解数的分组方法,推断分组余数的关系,第 n 组形成后,有 $n<N$,可知已有数没分完,这时余

下的每个数必大于余差 r_N，余下数之和也大于第 n 组的余差 r_n，从而列出不等式，用反证法证明第(Ⅲ)问．处理此类问题，需有严密的逻辑思维，具有良好的数学素养、灵活的思维方法．

(Ⅰ) $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_N$，除第 N 组外的每组至少含有 $\frac{150}{50}=3$ 个数．

(Ⅱ) 当第 n 组形成后，因为 $n < N$，所以还有数没分完，这时余下的每个数必大于余差 r_n，余下数之和也大于第 n 组的余差 r_n，即

$$L-[(150-r_1)+(150-r_2)+\cdots+(150-r_n)] > r_n$$

由此可得

$$r_1+r_2+\cdots+r_{n-1} > 150n-L$$

因为 $(n-1)r_{n-1} \geqslant r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}$，所以 $r_{n-1} > \frac{150n-L}{n-1}$．

(Ⅲ) 用反证法证明结论，假设 $N > 11$，即第 11 组形成后，还有数没分完，由(Ⅰ)和(Ⅱ)可知，余下的每个数都大于第 11 组的余差 r_{11}，且 $r_{11} \geqslant r_{10}$，故

$$\text{余下的每个数} > r_{11} \geqslant r_{10} > \frac{150\times 11-1\,275}{10}=37.5 \quad ①$$

因为第 11 组数中至少含有 3 个数，所以第 11 组数之和大于 $37.5\times 3=112.5$．

此时第 11 组的余差 $r_{11}=150-$ 第 11 组数之和 $<150-112.5=37.5$．

这与式①中 $r_{11} > 37.5$ 矛盾，所以 $N \leqslant 11$．

3. 已知 $f(x)=4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数．

(Ⅰ) 求实数 a 的值组成的集合 A；

(Ⅱ) 设关于 x 的方程 $f(x)=2x+\frac{1}{3}x^3$ 的两个非零实根为 x_1、x_2．试问：是否存在实数 m，使得不等式 $m^2+tm+1 \geqslant |x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立?若存在，求 m 的取值范围；若不存在，请说明理由．

解析 本题主要考查函数的单调性，导数的应用和不等式等有关知识，考查数形结合及分类讨论思想和灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力．

利用导数及函数的单调性求 a 的范围，列不等式得 m 的范围．

(Ⅰ) $f'(x)=4+2ax-2x^2$，因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，所以 $f'(x)\geqslant 0$，对 $x\in[-1,1]$ 恒成立，即 $x^2-ax-2\leqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立①．

设 $\varphi(x)=x^2-ax-2$．

解法 1

$$①\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$$

因为对 $x\in[-1,1]$，只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$，所以 $A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$．

解法 2

$$①\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 0\\ \varphi(-1)=1+a-2\leqslant 0\end{cases}\text{或}\begin{cases}\frac{a}{2}<0\\ \varphi(1)=1-a-2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leqslant a\leqslant 1\text{ 或 }-1\leqslant a<0\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$$

因为对 $x\in[-1,1]$，只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$，所以 $A=\{a\mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$．

(Ⅱ) 由 $4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3=2x+\frac{1}{3}x^3$，得 $x=0$ 或 $x^2-ax-2=0$．

因为 $\Delta=a^2+8>0$，所以 x_1、x_2 是方程 $x^2-ax-2=0$ 的两非零实根，所以 $\begin{cases}x_1+x_2=a\\ x_1x_2=-2\end{cases}$，从而

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{a^2 + 8}$$

因为 $-1 \leqslant a \leqslant 1$,所以 $|x_1 - x_2| = \sqrt{a^2 + 8} \leqslant 3$.

要使不等式 $m^2 + tm + 1 \geqslant |x_1 - x_2|$ 对任意 $a \in A$ 及 $t \in [-1,1]$ 恒成立,当且仅当 $m^2 + tm + 1 \geqslant 3$ 对任意 $t \in [-1,1]$ 恒成立,即 $m^2 + tm - 2 \geqslant 0$ 对任意 $t \in [-1,1]$ 恒成立②.

设 $g(t) = m^2 + tm - 2 = mt + (m^2 - 2)$.

解法 1

$$②\Leftrightarrow\begin{cases} g(-1) = m^2 - m - 2 \geqslant 0 \\ g(1) = m^2 + m - 2 \geqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow m \geqslant 2 \text{ 或 } m \leqslant -2$$

所以,存在实数 m,使不等式 $m^2 + tm + 1 \geqslant |x_1 - x_2|$ 对任意 $a \in A$ 及 $t \in [-1,1]$ 恒成立,其取值范围是 $\{m \mid m \geqslant 2 \text{ 或 } m \leqslant -2\}$.

解法 2 当 $m = 0$ 时,② 显然不成立;当 $m \neq 0$ 时

$$②\Leftrightarrow\begin{cases} m > 0 \\ g(-1) = m^2 - m - 2 \geqslant 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} m < 0 \\ g(1) = m^2 + m - 2 \geqslant 0 \end{cases}\Leftrightarrow m \geqslant 2 \text{ 或 } m \leqslant -2$$

所以,存在实数 m,使不等式 $m^2 + tm + 1 \geqslant |x_1 - x_2|$ 对任意 $a \in A$ 及 $t \in [-1,1]$ 恒成立,其取值范围是 $\{m \mid m \geqslant 2 \text{ 或 } m \leqslant -2\}$.

注 函数的单调性、导数、不等式问题是历年高考考查的重点.

(二十七)全国高考数学压轴题分类导析
——以“直线及圆锥曲线”为主体

平面解析几何作为中学数学中几何代数化的典型代表,历来是高考的重头戏.每年全国高考不同省市数学试卷中,就有多道“压轴题”均以解几何知识为载体,体现为重视能力立意,强调思维空间,是用“活题”考“死知识”的典范.具有涉及面广、综合性强、运算量大,题目新颖、灵活多样、能力要求高等特点,难度中等偏高.基本以圆锥曲线为背景,全面考查三基和能力,重点考查等价转化、数形结合、分类讨论、函数与方程等数学思想,以及定义法、配方法、待定系数法、参数法、判别式法等数学解题通法.

特别指出,近几年全国高考又将平面向量、导数等融入解析几何,或将解析几何与数列、函数、不等式等整合,或将解析几何与立体几何嫁接形成知识的交汇,成为新高考命题的热点及焦点.

【例1】 设 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),\cdots,P_n(x_n,y_n)(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N})$ 是二次曲线 C 上的点,且 $a_1=|OP_1|^2,a_2=|OP_2|^2,\cdots,a_n=|OP_n|^2$ 构成了一个公差为 $d(d\neq 0)$ 的等差数列,其中 O 是坐标原点.记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(Ⅰ)若 C 的方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1,n=3$,点 $P_1(10,0)$ 及 $S_3=255$,求点 P_3 的坐标(只须写出一个);

(Ⅱ)若 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,点 $P_1(a,0)$,对于给定的自然数 n,当公差 d 变化时,求 S_n 的最小值;

(Ⅲ)请选定一条除椭圆外的二次曲线 C 及 C 上的一点 P_1,对于给定的自然数 n,写出符合条件的点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 存在的充要条件,并说明理由.

解析　(Ⅰ)$a_1=|OP_1|^2=100$,由 $S_3=\frac{3}{2}(a_1+a_3)=255$,得 $a_3=|OP_3|^2=70$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1\\ x_3^2+y_3^2=70\end{cases}$,得 $\begin{cases}x_3^2=60\\ y_3^2=10\end{cases}$,所以点 P_3 的坐标可以为 $(2\sqrt{15},\sqrt{10})$.

(Ⅱ)**解法1**　原点 O 到二次曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上各点的最小距离为 b,最大距离为 a.因为 $a_1=|OP_1|^2=a^2$,所以 $d<0$,且 $a_n=|OP_n|^2=a^2+(n-1)d\geqslant b^2$,所以 $\frac{b^2-a^2}{n-1}\leqslant d<0$.因为 $n\geqslant 3,\frac{n(n-1)}{2}>0$,所以 $S_n=na^2+\frac{n(n-1)}{2}d$ 在 $[\frac{b^2-a^2}{n-1},0)$ 上递增,故 S_n 的最小值为

$$na^2+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{b^2-a^2}{n-1}=\frac{n(a^2+b^2)}{2}$$

解法2　对每个自然数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$,由 $\begin{cases}x_k^2+y_k^2=a^2+(k-1)d\\ \frac{x_k^2}{a^2}+\frac{y_k^2}{b^2}=1\end{cases}$,解得 $y_k^2=\frac{-b^2(k-1)d}{a^2-b^2}$.

因为 $0<y_k^2\leqslant b^2$,得 $\frac{b^2-a^2}{k-1}\leqslant d<0$,所以 $\frac{b^2-a^2}{n-1}\leqslant d<0$.以下与解法1相同.

（Ⅲ）**解法1**　若双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，点 $P_1(a,0)$，则对于给定的 n，点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 存在的充要条件是 $d>0$.

因为原点 O 到双曲线 C 上各点的距离 $h\in[|a|,+\infty)$，且 $|OP_1|=a^2$，所以点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 存在当且仅当 $|OP_n|^2>|OP_1|^2$，即 $d>0$.

解法2　若抛物线 $C:y^2=2Px$，点 $P_1(0,0)$，则对于给定的 n，点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 存在的充要条件是 $d>0$. 理由同上.

解法3　若圆 $C:(x-a)^2+y^2=a^2(a\neq 0)$，$P_1(0,0)$，则对于给定的 n，点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 存在的充要条件是 $0<d\leqslant\frac{4a^2}{n-1}$.

因为原点 O 到圆 C 上各点的最小距离为0，最大距离为 $2|a|$ 且 $|OP_1|^2=0$，所以 $d>0$ 且 $|OP_n|^2=(n-1)d\leqslant 4a^2$，即 $0<d\leqslant\frac{4a^2}{n-1}$，即 $0<d\leqslant\frac{4a^2}{n-1}$.

点评　该题是一道开放性试题，涉及的知识点较多，主要考查二次曲线、数列、函数、简易逻辑、不等式等基础知识，考查综合运用相关知识解决问题的能力，综合性强，能力要求高. 第（Ⅱ）小题要注意 d 是变量，n 是给定的量，这一点与平时对数列的处理不同；第（Ⅲ）小题要求考生写出除椭圆外的二次曲线上符合条件的点 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 存在的充要条件，这一问是对二次曲线性质及解方程理论的综合考查，属探究性题型，其思考方向有多种，既可选择双曲线、抛物线，也可选择圆，灵活性比较大，从而构成了一道思维难度较大的综合题. 本题通过求点的坐标考查数学中的方程思想，通过求函数最值考查学生的抽象思维能力以及逻辑推理能力，特别是第（Ⅲ）小题虽题不难，但寻找"解题入口"较艰难，这就要求考生必须具备灵活的思维、严谨的态度和扎实过硬的基本功方可准确获解. 命题者如此独到设计能有效区分考生层次，这必将成为今后高考命题的趋势之一.

【例2】　如图1，直线相交于点 P. 直线 l_1 与 x 轴交于点 P_1，过点 P_1 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_1，过点 Q_1 作 y 轴的垂线交直线 l_1 于点 P_2，过点 P_2 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_2，…，这样一直作下去，可得到一系列点 $P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots$，点 $P_n(n=1,2,\cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{x_n\}$.

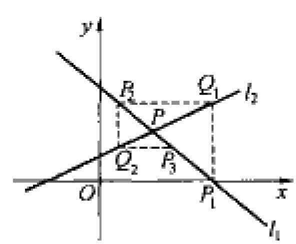


图1

（Ⅰ）证明：$x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$；

（Ⅱ）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）比较 $2|PP_n|^2$ 与 $4k^2|PP_1|^2+5$ 的大小.

解析　（Ⅰ）设点 P_n 的坐标是 (x_n,y_n)，由已知条件得点 Q_n、P_{n+1} 的坐标分别是

$$\left(x_n,\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}\right),\left(x_{n+1},\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}\right)$$

由 P_{n+1} 在直线 l_1 上，得

$$\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}=kx_{n+1}+1-k$$

所以

$$\frac{1}{2}(x_n-1)=k(x_{n+1}-1)$$

即

$$x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1),n\in\mathbf{N}^*$$

（Ⅱ）由题设知 $x_1=1-\frac{1}{k}$，$x_1-1=-\frac{1}{k}\neq 0$，又由（Ⅰ）知 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，所以数列 $\{x_n-1\}$ 是首项为 x_1-1，公比为 $\frac{1}{2k}$ 的等比数列.

从而 $x_n-1=-\frac{1}{k}\times(\frac{1}{2k})^{n-1}$,即 $x_n=1-2\times(\frac{1}{2k})^n,n\in\mathbf{N}^*$.

(Ⅲ)由 $\begin{cases}y=kx+1-k\\y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\end{cases}$ 得点 P 的坐标为(1,1).所以

$$2|PP_n|^2=2(x_n-1)^2+2(kx_n+1-k-1)^2=8\times(\frac{1}{2k})^{2n}+2(\frac{1}{2k})^{2n-2}$$

$$4k^2|PP_1|^2+5=4k^2[(1-\frac{1}{k}-1)^2+(0-1)^2]+5=4k^2+9$$

① 当 $|k|>\frac{1}{2}$,即 $k<-\frac{1}{2}$ 或 $k>\frac{1}{2}$ 时

$$4k^2|PP_1|^2+5>1+9=10$$

而此时 $0<|\frac{1}{2k}|<1$,所以

$$2|PP_n|^2<8\times1+2=10$$

故 $$2|PP_n|^2<4k^2|PP_1|^2+5$$

② 当 $0<|k|<\frac{1}{2}$,即 $k\in(-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{2})$ 时

$$4k^2|PP_1|^2+5<1+9=10$$

而此时 $|\frac{1}{2k}|>1$,所以

$$2|PP_n|^2>8\times1+2=10$$

故 $$2|PP_n|^2>4k^2|PP_1|^2+5$$

点评 ① 本题依托平面直角坐标系和直线方程,把解析几何、数列、不等式等相关知识有机结合起来,揭示出数学知识更深层次的内在联系.

② 解析几何以平面曲线为研究对象,而平面曲线是点的集合.近几年的高考中,常常出现解几何与数列交汇的综合试题,该类试题多以数列与曲线上点的坐标关系为背景,考查学生的应变能力和迁移能力.因此复习中,既要注重解几何知识的纵向联系,又要注重解几何知识的横向联系,特别要关注解几何与递推数列的交汇.

【例 3】 如图 2,P 是抛物线 $C:y=\frac{1}{2}x^2$ 上一点,直线 l 过点 P 且与抛物线 C 交于另一点 Q.

(Ⅰ)若直线 l 与过点 P 的切线垂直,求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程;

(Ⅱ)若直线 l 不过原点且与 x 轴交于点 S,与 y 轴交于点 T,试求 $\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围.

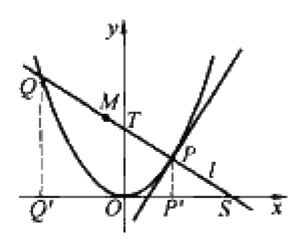


图 2

解析 (Ⅰ)设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$、$M(x_0,y_0)$,依题意 $x_1\neq0,y_1>0,y_2>0$.由 $y=x^2$①,得 $y'=x$,所以过点 P 的切线的斜率 $k_{切}=x_1$.因为 $x_1=0$ 不合题意,所以 $x_1\neq0$,所以直线 l 的斜率 $k_l=-\frac{1}{k_{切}}=-\frac{1}{x_1}$,所以直线 l 的方程为

$$y-\frac{1}{2}x_1^2=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)$$

解法 1 联立①② 消去 y,得 $x^2+\frac{2}{x_1}x-x_1^2-2=0$.因为 M 是 PQ 的中点,所以

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{1}{x_1} \\ y_0 = \dfrac{1}{2}x_1^2 - \dfrac{1}{x_1}(x_0 - x_1) \end{cases}$$

消去 x_1，得 $y_0 = x_0^2 + \dfrac{1}{2x_0^2} + 1(x_0 \neq 0)$，所以 PQ 中点 M 的轨迹方程为

$$y = x^2 + \frac{1}{2x_0^2} + 1,\quad x \neq 0$$

解法 2 由 $y_1 = \dfrac{1}{2}x_1^2, y_2 = \dfrac{1}{2}x_2^2, x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，得

$$y_1 - y_2 = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_0(x_1 - x_2)$$

则
$$x_0 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k_1 = -\frac{1}{x_1}$$

所以
$$x_1 = -\frac{1}{x_0}$$

将上式代入 ② 并整理，得 $y_0 = x_0^2 + \dfrac{1}{2x_0^2} + 1(x_0 \neq 0)$，所以 PQ 中点 M 的轨迹方程为

$$y = x^2 + \frac{1}{2x_0^2} + 1,\quad x \neq 0$$

（Ⅱ）设直线 $l: y = kx + b$，依题意 $k \neq 0, b \neq 0$，则 $T(0, b)$.

分别过 P、Q 作 $PP' \perp x$ 轴，$QQ' \perp y$ 轴，垂足分别为 P'、Q'，则

$$\frac{|ST|}{|SP|} + \frac{|ST|}{|SQ|} = \frac{|OT|}{|P'P|} + \frac{|OT|}{|Q'Q|} = \frac{|b|}{|y_1|} + \frac{|b|}{|y_2|}$$

由 $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ y = kx + b \end{cases}$ 消去 x，得

$$y^2 - 2(k^2 + b)y + b^2 = 0 \qquad ③$$

则
$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2(k^2 + b) \\ y_1 y_2 = b^2 \end{cases}$$

解法 1 所以

$$\frac{|ST|}{|SP|} + \frac{|ST|}{|SQ|} = |b|\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) \geqslant 2|b|\sqrt{\frac{1}{y_1 y_2}} = 2|b|\sqrt{\frac{1}{b^2}} = 2$$

因为 y_1、y_2 可取一切不相等的正数，所以 $\dfrac{|ST|}{|SP|} + \dfrac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

解法 2 所以

$$\frac{|ST|}{|SP|} + \frac{|ST|}{|SQ|} = |b|\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2} = |b|\frac{2(k^2 + b)}{b^2}$$

当 $b > 0$ 时

$$\frac{|ST|}{|SP|} + \frac{|ST|}{|SQ|} = b\frac{2(k^2 + b)}{b^2} = \frac{2(k^2 + b)}{b} = \frac{2k^2}{b} + 2 > 2$$

当 $b < 0$ 时

$$\frac{|ST|}{|SP|} + \frac{|ST|}{|SQ|} = -b\frac{2(k^2 + b)}{b^2} = \frac{2(k^2 + b)}{-b}$$

又由方程 ③ 有两个相异实根，得

$$\Delta = 4(k^2 + b)^2 - 4b^2 = 4k^2(k^2 + 2b) > 0$$

于是 $k^2+2b>0$,即 $k^2>-2b$,所以

$$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}>\frac{2(-2b+b)}{-b}=2$$

因为当 $b>0$ 时,$\frac{2k^2}{b}$ 可取一切正数,所以$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围是$(2,+\infty)$.

解法 3 由 P、Q、T 三点共线得 $k_{TQ}=k_{TP}$,即$\frac{y_2-b}{x_2}=\frac{y_1-b}{x_1}$.则

$$x_1y_2-bx_1=x_2y_1-bx_2$$

即

$$b(x_2-x_1)=(x_2y_1-x_1y_2)$$

于是

$$b=\frac{x_2\cdot\frac{1}{2}x_1^2-x_1\cdot\frac{1}{2}x_2^2}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}x_1x_2$$

所以

$$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}=\frac{|b|}{|y_1|}+\frac{|b|}{|y_2|}=\frac{|-\frac{1}{2}x_1x_2|}{|y_2|}+\frac{|-\frac{1}{2}x_1x_2|}{|y_2|}=\left|\frac{x_2}{x_1}\right|+\left|\frac{x_1}{x_2}\right|\geqslant 2$$

因为$\left|\frac{x_2}{x_1}\right|$可取一切不等于 1 的正数,所以$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$ 的取值范围是$(2,+\infty)$.

点评 ① 本题综合性较强,主要考查直线、抛物线、导数、不等式等基础知识,考查求轨迹方程的方法、解析几何的基本思想和综合解题能力.第(Ⅰ)问主要涉及求轨迹的基本方法——代换法;第(Ⅱ)问中观察图形可知,只要找到$\frac{|ST|}{|SP|}+\frac{|ST|}{|SQ|}$的最小值即可求出其取值范围,故利用图形寻找待求式与 P、Q 两点纵坐标的关系,再利用重要不等式方可确定待求式的取值范围.考查的内容涉及方程中根与系数的关系、不等式的性质等,关键是要有较强的分析解决问题的能力.

② 注意解直线、曲线的弦中点问题"设而不求法"及求最值时的"重要不等式法"的灵活使用.

③ 利用导数的几何意义将导数与解析几何自然融合,结合方程思想,考查学生的灵活应变能力、综合分析解决问题的能力.这样的考题构造新颖,综合性强,考查效果明显.

【例 4】 给定抛物线 $C:y^2=4x$,F 是 C 的焦点,过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.

(Ⅰ) 设 l 的斜率为 1,求$\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{OB}$ 的夹角的大小;

(Ⅱ) 设$\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{AF}$,若 $\lambda\in[4,9]$,求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

解析 (Ⅰ) C 的焦点为 $F(1,0)$,直线 l 的斜率为 1,所以 l 的方程为 $y=x-1$.将 $y=x-1$ 代入方程 $y^2=4x$,整理得 $x^2-6x+1=0$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则有 $x_1+x_2=6$,$x_1x_2=1$.

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=2x_1x_2-(x_1+x_2)+1=-3$$

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_1x_2[x_1x_2+4(x_1+x_2)+16]}=\sqrt{41}$$

$$\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=-\frac{3\sqrt{14}}{41}$$

所以$\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小为 $\pi-\arccos\frac{3\sqrt{14}}{41}$.

此问还可这样解:

解法 1 设$\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 α,再利用三角形的面积公式 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\alpha$ 求得.

解法 2 求得 l 的方程为 $y=x-1$.将 $y=x-1$ 代入方程 $y^2=4x$,并整理得 $x^2-6x+1=0$.设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则有 $x_1+x_2=6$,$x_1x_2=1$.然后借助两直线的"到角"公式 $\tan\alpha=\frac{k_{OA}-k_{OB}}{1+k_{OA}\cdot k_{OB}}$,

求得$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角α.

（Ⅱ）由题设$\overrightarrow{FB} = \lambda\overrightarrow{AF}$，得$(x_2 - 1, y_2) = \lambda(1 - x_1, -y_1)$，即

$$\begin{cases} x_2 - 1 = \lambda(1 - x_1) & ① \\ y_2 = -\lambda y_1 & ② \end{cases}$$

由 ② 得 $y_2^2 = \lambda^2 y_1^2$，因为 $y_1^2 = 4x_1, y_2^2 = 4x_2$，所以

$$x_2 = \lambda^2 x_1 \qquad ③$$

联立 ①③ 解得 $x_2 = \lambda$，依题意有 $\lambda > 0$.

所以 $B(\lambda, 2\sqrt{\lambda})$ 或 $B(\lambda, -2\sqrt{\lambda})$，又 $F(1,0)$，得直线 l 方程为$(\lambda - 1)y = 2\sqrt{\lambda}(x - 1)$或$(\lambda - 1)y = -2\sqrt{\lambda}(x - 1)$.

当 $\lambda \in [4,9]$ 时，l 在方程 y 轴上的截距为$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$ 或 $-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$.

由$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} + 1} + \frac{2}{\lambda - 1}$，可知$\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$在$[4,9]$上是递减的，所以$\frac{3}{4} \leqslant \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \leqslant \frac{4}{3}$，$-\frac{4}{3} \leqslant -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \leqslant -\frac{3}{4}$，直线 l 在 y 轴上截距的变化范围为$\left[-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$.

该问也可这样解：

设 l 的方程为 $y = k(x - 1)$，则 $k \neq 0$ 且 l 在 y 轴上的截距为 $-k$. 联立 l 和 C 的方程得 $ky^2 - 4y - 4k = 0$，求得 y_1、y_2. 再由$\overrightarrow{FB} = \lambda\overrightarrow{AF}$ 得 $y_2 = -\lambda y_1$，将 y_1、y_2 代入，即可用 k 的代数式表示λ，最后借助 λ 的范围求得 k 的范围.

点评 本题主要考查了抛物线的性质、直线与抛物线的关系以及解析几何的基本思想方法和综合解题能力（利用代数的方法研究几何问题的特点和性质）. 第（Ⅰ）问中，直线的斜率是固定的，通过代数运算就能求出向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$的夹角，这其中的运算有一定的技巧. 这里并未先求出 A、B 的具体坐标值，而是根据韦达定理，通过变形，整体代换即可求解. 第（Ⅱ）问中条件发生了变化，直线的位置不是固定的，直线 l 的斜率不再是1，其位置关系满足$\overrightarrow{FB} = \lambda\overrightarrow{AF}$，由此找出其坐标之间的关系，得到直线 l 的方程至关重要. 由于 λ 在$[4,9]$的范围内变化且两个向量是同方向的，所以 λ 就代表其长度之间的关系，即$\overrightarrow{FB}$的长度是$\overrightarrow{AF}$长度的 4 到 9 倍. 又因为交点 A、B 的位置并不固定可以相互交换，所以直线 l 在 y 轴上的截距的变化范围应在两个对称的区间里.

值得指出的是，在整个解题的过程中，计算占了很大的比重，但计算需根据题目中曲线的特点和相互之间的关系进行，所以对曲线的定义和性质的理解是解题之基础，如起初抛物线焦点的确定、直线方程的求得、直线和抛物线交点的获取、由关系式$\overrightarrow{FB} = \lambda\overrightarrow{AF}$列出方程等. 在接下来的计算中又要灵活应用韦达定理、函数的增减性等，这样可以简化计算，达到提高解题效率之功效，同时本题也体现了新高考对考生综合能力考查的特点.

【例5】 椭圆的中心是原点 O，它的短轴长为$2\sqrt{2}$，相应于焦点 $F(c,0)(c > 0)$ 的准线 l 与 x 轴相交于点 A，$|OF| = 2|FA|$，过点 A 的直线与椭圆相交于 P、Q 两点.

（Ⅰ）求椭圆的方程及离心率；

（Ⅱ）若$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$，求直线 PQ 的方程；

（Ⅲ）设$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda > 1)$，过点 P 且平行于准线 l 的直线与椭圆相交于另一点 M. 证明：$\overrightarrow{FM} = -\lambda\overrightarrow{FQ}$.

解析 （Ⅰ）由题意，可设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1(a > \sqrt{2})$.

由已知得$\begin{cases} a^2 - c^2 = 2 \\ c = 2(\frac{a^2}{c} - c) \end{cases}$，解得 $a = \sqrt{6}, c = 2$. 所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$，离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $A(3,0)$，设直线 PQ 的方程为 $y = k(x - 3)$. 由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x-3)\end{cases}$$

得
$$(3k^2+1)x^2-18k^2x+27k^2-6=0$$

依题意 $\Delta=12(2-3k^2)>0$,得 $-\frac{\sqrt{6}}{3}<k<\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$,则

$$x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2+1} \quad ①$$

$$x_1x_2=\frac{27k^2-6}{3k^2+1} \quad ②$$

由直线 PQ 的方程得 $y_1=k(x_1-3)$,$y_2=k(x_2-3)$,于是

$$y_1y_2=k^2(x_1-3)(x_2-3)=k^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9] \quad ③$$

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,所以

$$x_1x_2+y_1y_2=0 \quad ④$$

由①②③④得 $5k^2=1$,从而 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}\in\left(-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

所以直线 PQ 的方程为 $x-\sqrt{5}y-3=0$ 或 $x+\sqrt{5}y-3=0$.

(Ⅱ) $\overrightarrow{AP}=(x_1-3,y_1)$,$\overrightarrow{AQ}=(x_2-3,y_2)$.由已知得方程组

$$\begin{cases}x_1-3=\lambda(x_2-3)\\ y_1=\lambda y_2\\ \dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{2}=1\\ \dfrac{x_2^2}{6}+\dfrac{y_2^2}{2}=1\end{cases}$$

注意 $\lambda>1$,解得 $x_2=\frac{5\lambda-1}{2\lambda}$.

因 $F(2,0)$,$M(x_1,-y_1)$,故

$$\overrightarrow{FM}=(x_1-2,-y_1)=(\lambda(x_2-3)+1,-y_1)=\left(\frac{1-\lambda}{2},-y_1\right)=-\lambda\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda},y_2\right)$$

而
$$\overrightarrow{FQ}=(x_2-2,y_2)=\left(\frac{\lambda-1}{2\lambda},y_2\right)$$

所以
$$\overrightarrow{FM}=-\lambda\overrightarrow{FQ}$$

点评 ① 本题通过三问分层推进,主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程、平面向量的计算、曲线和方程的关系等解析几何的基本思想方法和综合解题能力.用向量语言说明几何元素的位置关系,对向量知识有较高要求,对考生的运算能力及综合文化素质有较高的要求.

② 以向量为载体的解析几何问题,是近几年各省市新课程高考中出现的一种新题型,这种问题往往融向量、解几何、方程、不等式等知识于一体,能有效考查学生的思维水平和综合能力.由于向量和解几何都涉及数和形,对于解析几何中图形的重要位置关系(如平行、相交、三点共线、三线共点等)和数量关系(如距离、面积、角等),都可以通过向量的运算而得到解决.解决此类问题的基本策略是:利用平面向量的坐标表示法,将问题中的向量关系转化为代数关系,再依据解几何中已有的知识和方法求解.

【例6】 如图3,已知双曲线的中心在原点,右顶点为 $A(1,0)$,点 P、Q 在双曲线的右支上,点 $M(m,0)$ 到直线 AP 的距离为1.

（Ⅰ）若直线 AP 的斜率为 k，且 $|k| \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$，求实数 m 的取值范围；

（Ⅱ）当 $m=\sqrt{2}+1$ 时，$\triangle APQ$ 的内心恰好是点 M，求此双曲线的方程.

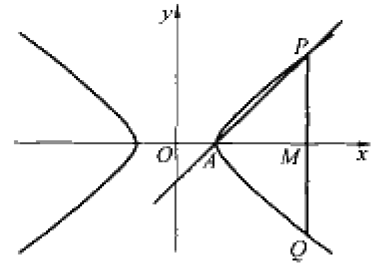


图 3

解析 （Ⅰ）由条件得直线 AP 的方程 $y=k(x-1)$，即 $kx-y-k=0$. 因为点 M 到直线 AP 的距离为 1，因为 $\frac{|mk-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即

$$|m-1|=\frac{\sqrt{k^2+1}}{|k|}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$$

因为 $|k| \in [\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}]$，所以 $\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqslant |m-1| \leqslant 2$，解得 $\frac{2\sqrt{3}}{3}+1 \leqslant m \leqslant 3$ 或 $-1 \leqslant m \leqslant 1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 所以 m 的取值范围是 $\left[-1,1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[1+\frac{2\sqrt{3}}{3},3\right]$.

（Ⅱ）可设双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b \neq 0)$，由 $M(\sqrt{2}+1,0)$，$A(1,0)$，得 $|AM|=\sqrt{2}$.

又因为 M 是 $\triangle APQ$ 的内心，M 到 AP 的距离为 1，所以 $\angle MAP=45°$，直线 AM 是 $\angle PAQ$ 的角平分线，且 M 到 AQ、PQ 的距离均为 1. 因此，$k_{AP}=1$，$k_{AQ}=-1$（不妨设 P 在第一象限）.

直线 PQ 方程为 $x=2+\sqrt{2}$，直线 AP 的方程 $y=x-1$，所以解得 P 的坐标是 $(2+\sqrt{2},1+\sqrt{2})$，将点 P 坐标代入 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得 $b^2=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+3}$，所以所求双曲线方程为 $x^2-\frac{(\sqrt{2}+3)}{\sqrt{2}+1}y^2=1$，即 $x^2-(2\sqrt{2}-1)y^2=1$.

点评 本题主要考查直线、双曲线方程和性质等基础知识，考查解析几何的基本思想方法和综合解题能力，是一道涉及直线与圆锥曲线相交问题的常见题型，虽说平淡，但平中见奇. 试题回避了直线与圆锥曲线联立消元这一计算繁琐的传统思维模式，取而代之的是注入了较多的理性思维.

对于第（Ⅰ）问，直接利用点到直线的距离公式求解，但具体操作时还需具备整体意识.

对于第（Ⅱ）问，可结合图形联想已得数据，抓住"$\triangle APQ$ 的内心恰好是点 M"这个重要信息源，易得直线 AP、AQ 的斜率，方可打开解题突破口.

我们再一起回过头来观察内接的 $\triangle APQ$ 的状态，清晰可见：一个内接于双曲线右支且关于 x 轴对称、美观大方的等腰 $\triangle APQ$. 从更深层次思考"此题将评价内容更多地指向有价值的数学任务和数学活动"，命题者如此设计，不但考查了学生对所学数学知识的掌握情况，而且使学生获得了理性思维的培育和数学美的熏陶，对学生思维灵活性的考查力度较大（"苦"了习惯套题型的考生！），真可谓匠心独具！

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　　名	出版时间	定　价
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	即将出版	58.00
500个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00
400个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00
500个最新世界著名数学征解题	即将出版	68.00
400个最佳数学征解老问题	即将出版	48.00
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00
初等数论难题集(第二卷)	即将出版	98.00
组合数学难题集	即将出版	38.00
数学 我爱你	2008-01	28.00
博弈论精粹	2008-03	58.00
精神的圣徒　别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00
数学史概论	即将出版	78.00
多项式和无理数	2008-01	68.00
模糊数据统计学	2008-03	48.00
解析不等式新论	即将出版	68.00
数学奥林匹克不等式研究	即将出版	68.00
初等数学研究(Ⅰ)	2008-09	68.00
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009-05	118.00
中国初等数学研究	2009-05	20.00
数学奥林匹克超级题库(初中卷)	即将出版	88.00
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00
统计学专业英语	2007-03	28.00
中考数学专题总复习	2007-04	28.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
邮　　编:150006
联系电话:0451-86281378　　13904613167
E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书名	出版时间	定价
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00
新编平面解析几何解题方法全书	即将出版	28.00
数学眼光透视	2008-01	38.00
数学思想领悟	2008-01	38.00
数学应用展观	2008-01	38.00
数学建模导引	2008-01	28.00
数学方法溯源	2008-01	38.00
数学史话览胜	2008-01	28.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00
从庞加莱到佩雷尔曼	即将出版	88.00
天穹的秩序——三体问题的历史	即将出版	88.00
空间想象力的发展	即将出版	48.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)	2006-12	68.00
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006-12	18.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2009-08	48.00
几何变换与几何证题	即将出版	68.00
500个世界著名几何名题及1000个著名几何定理	即将出版	78.00
三角形的五心	即将出版	28.00
历届IMO试题集(1959—2005)	2006-05	58.00
历届CMO试题集	2008-09	28.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00